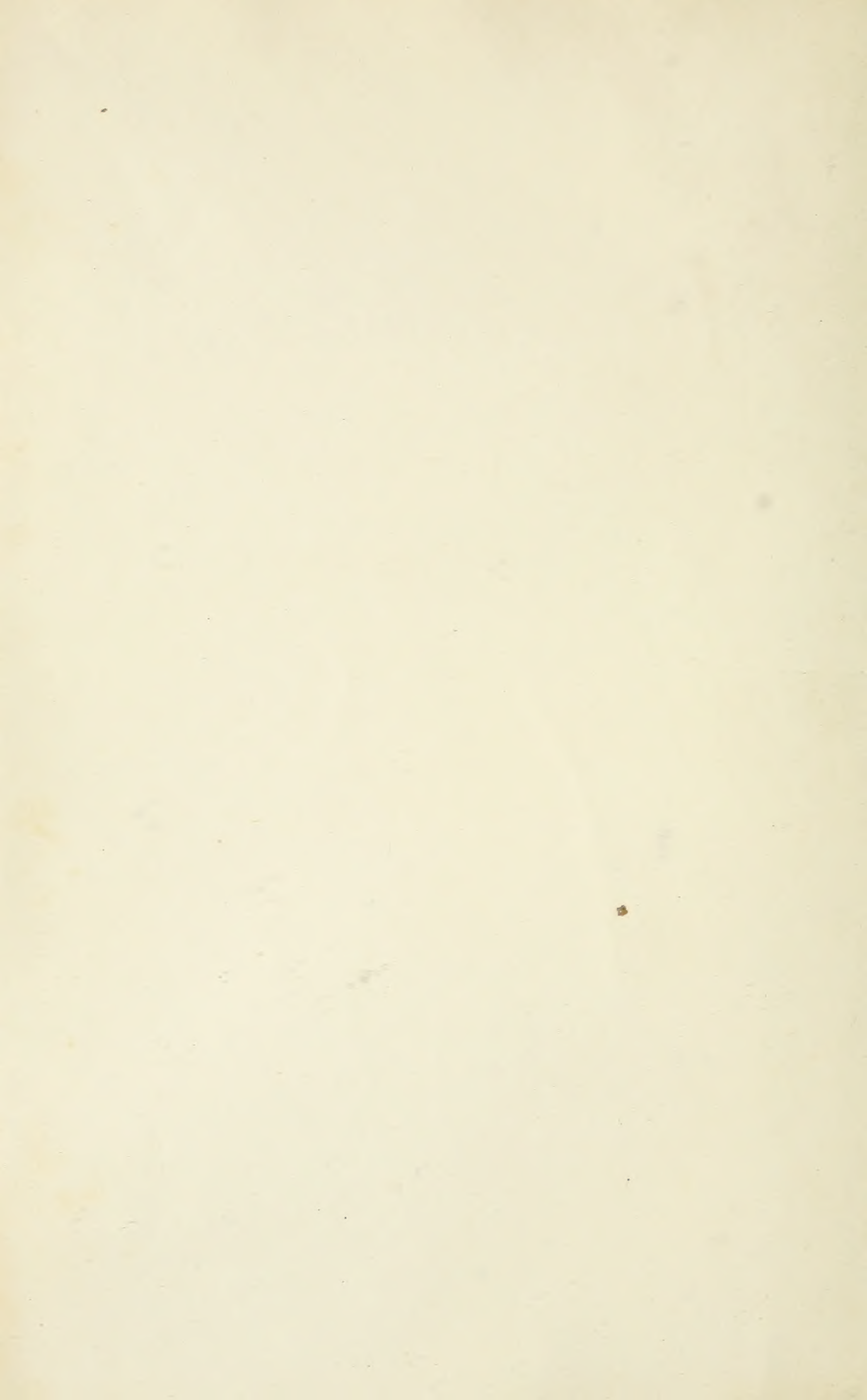




A.R. McLeod







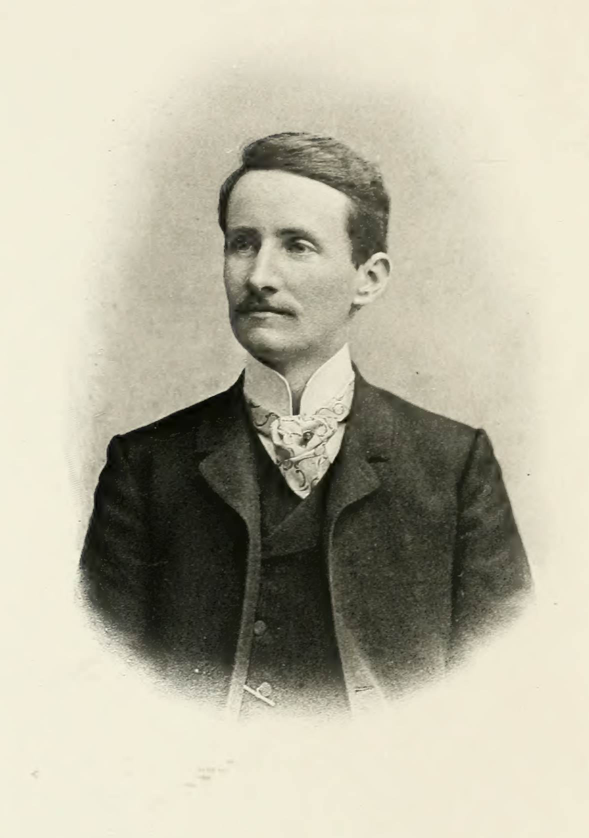
GESAMMELTE WERKE

WALTHER RITZ

ŒUVRES.

45685 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.





GESAMMELTE WERKE

WALTHER RITZ

ŒUVRES

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ SUISSE DE PHYSIQUE.



PARIS,

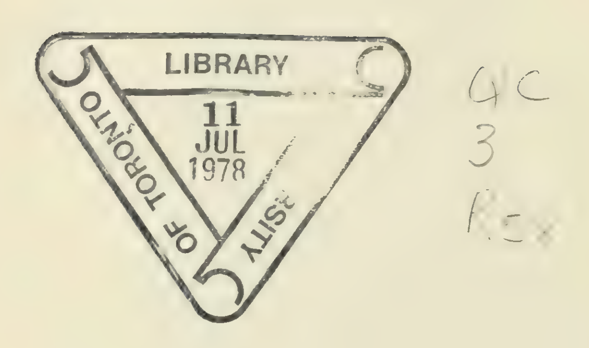
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1911


LIBRARY
11
JUL
1978
OF TORONTO
SITY

AVERTISSEMENT.

La Société suisse de Physique a pris l'initiative de publier les œuvres de Walther Ritz, le jeune physicien mort le 7 juillet 1909, à l'âge de 31 ans.

Elle ne s'est pas proposé seulement, en contribuant à faire connaître des travaux scientifiques d'une rare beauté, d'attirer encore une fois l'attention des mathématiciens et des physiciens sur l'œuvre d'un esprit d'élite. Mais elle est convaincue qu'en facilitant la diffusion d'idées nouvelles et hardies elle favorise les progrès de la Science. Beaucoup d'entre elles, même celles qui ont dès à présent prouvé leur fécondité, ouvrent des voies nouvelles et réclament des continuateurs. Nous souhaitons que cette publication [1] contribue à les susciter.

M[me] Raphaël Ritz a voulu consacrer à la mémoire de son fils les sommes qui lui avaient été allouées pour favoriser ou récompenser ses travaux scientifiques et pour lui permettre de prendre soin d'une santé particulièrement précieuse et continuellement menacée.

---

[1] Nous publions chacun des mémoires dans la langue où il a été écrit.

Il convient de citer parmi ceux qui ont ainsi pris part à cette publication :

Un groupe d'amis anonymes de Gœttingue.
L'Institut de France.
L'École polytechnique fédérale.
La Société suisse de Physique.

PRÉFACE.

Walther Ritz naquit le 22 février 1878 à Sion (Valais). Son père était Raphaël Ritz, le peintre bien connu par ses paysages valaisans, ses intérieurs et ses scènes de la vie populaire. Élève de l'École de Dusseldorf, contemporain et camarade d'études de Vauthier, de Koller et de Boecklin, il retourna en 1865 vivre en Valais, son pays natal. En 1875, il épousa la fille de l'ingénieur Noerdlinger, de Tubingue. W. Ritz dut à son père le sens de la beauté de la nature, la connaissance des populations du Valais, de leurs usages, de leurs traditions, de leurs légendes. Toute sa vie il conserva un très profond attachement pour son pays et aimait dans des conversations pleines de charme à le faire connaître à ses amis.

Brillamment doué, Ritz fit sans effort de bonnes études au Lycée communal de Sion. Il eut, très jeune, avec la sûreté de jugement qui présida plus tard au choix des sujets de ses travaux, l'intuition qu'il pourrait faire des découvertes scientifiques et s'en ouvrit à sa mère qui le comprit.

En 1897, il entra à l'École polytechnique de Zurich pour s'y préparer à la carrière d'ingénieur. Mais il ne trouva dans les études techniques qu'une demi-satisfaction. Son esprit épris d'absolu s'accommodait mal des démonstrations sommaires à l'usage des ingénieurs, des compromis entre les

solutions théoriques et les exigences de la vie réelle. Aussi, quand, en 1900, une pleurésie mal guérie rendit impossible pour lui le climat humide de Zurich, alla-t-il chercher dans le milieu scientifique de Gœttingue un régime intellectuel plus conforme à ses goûts.

Son séjour à Gœttingue fut la partie la plus heureuse de sa vie. Sa santé n'était pas encore assez compromise pour l'empêcher de suivre avec toute l'ardeur de sa nature l'enseignement des maîtres qu'il avait choisis. Hilbert et Voigt surtout eurent une influence durable sur la formation de son esprit. C'est Voigt qui reçut sa thèse sur la Théorie des spectres en série, le 19 décembre 1902. Il trouva à Gœttingue parmi ses compagnons d'étude des amis dévoués avec lesquels il entretint jusqu'à sa mort un commerce d'idées qui, pendant les années d'éloignement, le maintint en contact avec le mouvement scientifique.

Il passa l'été de 1903 à Leyde, attiré par H.-A. Lorentz et déjà préoccupé des problèmes électrodynamiques, puis pendant un séjour relativement court à Bonn, il eut la satisfaction de découvrir lui-même une raie du spectre du potassium que les formules de sa thèse lui avaient fait prévoir. Plus tard, dans les mesures faites par d'autres, il devait ne plus compter les succès de cette espèce.

En novembre 1903, il se rendit à Paris, où il trouva un accueil amical auprès de A. Cotton qui lui ouvrit son laboratoire à l'École Normale et qui, dans la suite, ne cessa de s'intéresser vivement à lui. Mais le travail de laboratoire avançait lentement à son gré et lorsque, fatigué par une journée de lutte contre les difficultés matérielles de l'expérience, il ne tenait aucun résultat positif, il cherchait à dissiper l'impression de temps perdu en suivant sans mesure son penchant pour les spéculations abstraites.

A partir de l'hiver 1904, le soin de sa santé tient une grande place dans sa vie. Après un séjour au sanatorium de St. Blasien, dans la Forêt Noire, il put pendant quelques semaines passées à Zurich mener à bonne fin la préparation des plaques photographiques sensibles à l'infra-rouge à laquelle il avait travaillé à Paris. Puis ce furent des séjours à Rapallo, aux Mayens de Sion. Il passa l'hiver 1905-1906 à Sion où, grâce à la sollicitude maternelle et à l'excellence du climat valaisan, il réunit les conditions de vie les plus favorables à son rétablissement. Malgré tout, cet hiver fut une dure épreuve pour lui. Il y avait quelque chose de douloureusement tragique dans son cas : l'ardeur au travail qui le dévorait était à la fois sa meilleure raison de vivre et, de l'avis du médecin, le principal obstacle à sa guérison. On lui interdit de travailler plus d'un quart d'heure par jour, prescription qu'il s'efforça vainement de suivre, puisque c'est de cette époque que datent ses idées nouvelles sur l'électrodynamique. Déjà commençait une lutte dans laquelle il hésita souvent entre deux voies à suivre : ou vouloir guérir en sacrifiant son travail, ou dépenser sans compter ce qui lui restait de forces pour conserver plus sûrement à la science les idées qui hantaient son cerveau. Ce fut la deuxième manière qui l'emporta. Au cours de l'hiver suivant qu'il passa à Nice, il écrivait : « Vous m'accorderez que je ne puis dans la même mesure que d'autres me reposer sur l'avenir comme devant compenser le présent. Il ne me reste peut-être que peu de temps, et je suis fermement résolu à passer ce temps dans des milieux scientifiques et intellectuels qui seuls peuvent me donner le contentement, le sentiment de vivre, et sont ainsi peut-être une condition de santé ? Cher ami, je ne puis espérer ni les joies de la famille ni le bien-être du vieux garçon qui jouit de sa santé ; il ne me reste que

la Science et la vie intellectuelle; et vraiment je ne me sens pas la force, pour un résultat incertain, de continuer à m'enterrer ainsi. » A partir de ce moment il n'interrompit guère le travail que pendant les accès de fièvre et les journées d'épuisement de plus en plus fréquentes. C'est à Nice qu'il eut l'intuition géniale du mécanisme électromagnétique des raies spectrales par lequel il pénétra plus profondément que personne avant lui dans la connaissance de ce monde d'une merveilleuse beauté et d'une inimitable précision qu'est l'intérieur de l'atome. Ayant trouvé au cours de l'été un peu de repos à Waldkirch, près du lac de Constance, il se décida à retourner dans les centres de travail intellectuel en Allemagne, pensant y retrouver le temps heureux de Gœttingue. Il passa l'hiver 1907-1908 à Tubingue, où il trouva, avec l'amitié de F. Paschen, l'occasion d'un échange de vues des plus féconds. Lui soumettant ses idées théoriques sur les spectres, il recevait la primeur de mesures qui apportaient à sa théorie de nombreuses et éclatantes confirmations.

En 1908, il émigra vers Gœttingue où l'attiraient tant de souvenirs. Il eut la joie de s'y sentir compris par ceux qui avaient été ses maîtres et de prendre nettement conscience de sa célébrité naissante. L'état précaire de sa santé lui valut de connaître plus complètement les amitiés qu'il avait su inspirer. Il eut aussi la satisfaction d'achever la plupart des travaux commencés, notamment son beau travail sur le problème classique des plaques vibrantes. M. Henri Poincaré, lors de son passage à Gœttingue, demanda à le voir et lui annonça, en le félicitant, l'intention qu'avait l'Académie des Sciences de lui décerner un prix en récompense de ses travaux. Le prix Lecomte lui a été attribué après sa mort. Son habilitation comme privat-docent à l'Université fut son dernier

succès. Il était fier d'être adopté plutôt que jugé par un jury comprenant Hilbert, le regretté Minkowski, Voigt et Runge. Son électrodynamique est restée inachevée. Au cours de sa dernière maladie, l'idée de la tâche à accomplir subsiste et le soutient jusqu'à la fin. Le jour même de sa mort, il dit à la sœur qui le veille : « Soignez-moi bien, ma sœur, il est si nécessaire que je vive encore quelques années pour la Science ».

*
* *

Ritz a eu le sens très net de l'importance relative des problèmes. Il a vu que l'extrême précision des raies spectrales fait de leur étude l'un des moyens d'exploration les plus puissants des propriétés cachées de la matière. Dans sa thèse il aborde cette étude par la seule voie où elle paraissait alors accessible, par l'analogie supposée avec les vibrations élastiques. Cette tentative, malgré toute l'ingéniosité mise à son service, n'a qu'un succès relatif : elle conduit à des formules meilleures que celles de ses prédécesseurs, à nombre égal de constantes. Mais il s'est rendu compte qu'il est impossible de croire à la réalité physique des lois de force compliquées qu'il avait imaginées et de la nécessité de les remplacer par autre chose : le problème était posé dans son esprit. Il avait été vivement frappé surtout du vice capital de toutes les solutions faisant appel aux vibrations élastiques qui font intervenir — lord Rayleigh y avait déjà insisté — le carré de la fréquence alors que les lois expérimentales s'expriment au moyen de la première puissance. Ce n'est que cinq ans plus tard, à Nice, qu'il entrevit pour la première fois l'une des parties essentielles de la solution : la fréquence du mouvement périodique d'un électron lancé dans un champ magnétique s'exprime par la première puissance du champ.

Il restait, pour achever la construction d'un mécanisme donnant les raies de l'hydrogène, à obtenir des champs magnétiques échelonnés suivant les inverses des carrés des nombres entiers. La première solution qu'il donna alors était logiquement admissible mais très improbable. Quelques mois après il la remplaçait par une autre d'une séduisante simplicité : le champ est obtenu au moyen d'éléments rectilignes, juxtaposés bout à bout, tous de la même longueur, et dont une partie possède des pôles magnétiques de même grandeur, tandis que les autres sont à l'état neutre. Il montra plus tard comment son modèle électromagnétique peut, au moyen de modifications peu importantes, représenter les séries des métaux alcalins. Il faut à cet effet faire quelques hypothèses accessoires qui reviennent à ajouter un trait nouveau à l'image de la constitution intime de l'atome. Il ne considérait pas cette dernière partie de son travail comme achevée. Voici ce qu'il dit dans une lettre :

« Tübingen, 1er févr. 1908.

» Je viens d'envoyer aux *Annalen* mon Mémoire sur les spectres et les champs atomiques. Ce n'est pas que je sois satisfait, loin de là ; mais après divers essais pour découvrir de nouvelles relations numériques, je n'ai pu que constater que mon ancienne formule est toujours ce qu'il y a de mieux ; il faudra des hypothèses détaillées sur la structure des atomes pour aller plus loin, et le courage et les forces m'ont trahi. Le problème peut d'ailleurs fort bien ne pas être mûr à l'heure qu'il est. »

Dans le Mémoire en question il donne aussi, au moyen du même mécanisme, une nouvelle théorie du phénomène

de Zeeman. H.-A. Lorentz a expliqué le premier la décomposition magnétique en triplet par le mouvement d'un électron soumis à des forces quasi-élastiques, mais on sait les difficultés rencontrées à étendre cette théorie aux raies à décomposition multiple. La théorie électromagnétique de Ritz les surmonte sans peine.

« Mon investigation sur le phénomène de Zeeman se résume en ceci : tout mouvement périodique de la molécule (exemples : toupie, pendule, etc.) décompose une raie *née d'un champ atomique* (le théorème ne s'applique pas à une force élastique, comme la veut Lorentz) en un certain nombre de composantes ayant les polarisations que vous savez, et des rapports *rationnels* entre les distances. La distance maximum observée pour un triplet correspond, dans mon système, à $\frac{e}{m}$ = valeur cathodique ; la valeur cathodique n'est jamais dépassée. Chez Lorentz les mêmes faits s'énoncent en disant qu'il y a des triplets inférieurs et supérieurs à cette valeur, mais que la valeur limite est le *double* de la valeur cathodique de $\frac{e}{m}$. Ce passage du simple au double de $\frac{e}{m}$, dans l'interprétation des expériences faites jusqu'ici, est caractéristique de l'hypothèse d'un champ atomique et l'énoncé que tire des expériences ma théorie $\left(=\frac{e}{m}\text{ cathod.}\right)$ me semble préférable à celui de Lorentz $\left(=2\,\frac{e}{m}\text{ cathod.}\right)$

» J'obtiens avec facilité les triplets et quadruplets inverses, et les décompositions en 15 lignes, récemment observées, sont pour moi un jeu. Je simplifie la loi des rapports rationnels, la forme de ma théorie n'introduisant que les entiers 0, 1, 2, 3, parfois 4, tandis que Runge monte jusqu'à 21. »

Il réussit, enfin, à donner une portée encore plus grande à ses idées sur l'origine des spectres en séries en y rattachant une remarquable loi de combinaison entre les formules des diverses séries d'un même corps, donnant des séries nouvelles sans l'emploi d'aucune constante nouvelle. Il appliqua cette méthode, dans le Mémoire : *Ueber ein neues Gesetz der Serienspektren*, à l'hydrogène, aux métaux alcalins et alcalino-terreux, au cuivre et à l'hélium et trouva dans les spectres de ces corps une riche moisson de confirmations. Les nouvelles raies non sériées récemment découvertes par Lenard dans les métaux alcalins, entre autres, vinrent se placer dans les nouvelles séries ainsi calculées.

D'après quelques notes trouvées dans ses papiers, nous avons aussi reconstitué une ébauche de *théorie des spectres de bandes*, fondée sur l'emploi d'un mécanisme ayant une proche parenté avec celui des spectres en séries. Nous y avons ajouté une discussion sur la structure des bandes suggérée par quelques notes de Ritz et des souvenirs de conversations.

Il s'était proposé, dès l'achèvement de sa thèse, de faire lui-même des mesures spectroscopiques. C'est ainsi qu'il a été amené à étudier les plaques au collodion d'Abney, sensibles à l'infra-rouge, que personne n'avait su reproduire. Après de nombreux tâtonnements, il a réussi à déterminer les conditions de succès de cette expérience, puis, avec des plaques à la gélatine, à dépasser la limite de sensibilité atteinte par Abney. La Note publiée par Ritz aux *Comptes Rendus de l'Académie*, qui ne contient que des indications sommaires sur ce procédé, ne permet pas de le réaliser. Nous avons pu, avec l'aide de M. A. Cotton, extraire de ses cahiers de laboratoire une description complète de la méthode de préparation qui lui a donné ce résultat remarquable.

*
* *

A la thèse de doctorat se rattache aussi un deuxième groupe de travaux sur les méthodes de calcul des problèmes dépendant des équations aux dérivées partielles. M. Henri Poincaré a bien voulu nous donner l'appréciation suivante de la portée mathématique de cette œuvre :

« *Les problèmes de Physique mathématique se ramènent presque tous à un type commun. C'est le mérite de Fredholm d'avoir trouvé une méthode générale et rigoureuse qui leur est applicable à tous. Elle consiste en dernière analyse à traiter les équations intégrales et différentielles linéaires comme un système d'une infinité d'équations du premier degré à une infinité d'inconnues. La solution se présente ainsi comme le quotient de deux expressions analogues à des déterminants.*

» *Ces déterminants se présentent eux-mêmes sous la forme de séries ; le premier terme de chacune de ces séries est une intégrale simple, le second une intégrale double et ainsi de suite. Bien que les séries soient extrêmement convergentes, bien que la loi de formation des termes soit élégante et simple, il en résulte pour le calcul numérique des difficultés presque insurmontables. Aussi la méthode de Fredholm, excellente pour démontrer rigoureusement la possibilité du problème, ce qui était considéré naguère encore comme extrêmement difficile, excellente peut-être aussi pour découvrir certaines propriétés analytiques de la solution, quoique à cet égard elle n'ait pas encore fait ses preuves, n'a pas encore été employée pour le calcul numérique et ne paraît pas devoir l'être sous sa forme actuelle.*

» *La méthode de Ritz se prête mieux au calcul numérique. Elle consiste à représenter la solution comme une somme de termes d'une forme donnée affectés de coefficients indéterminés et à déterminer ces coefficients par la méthode des moindres carrés.*

» *C'est une méthode d'ingénieur; seulement Ritz est parvenu dans deux cas, celui du problème de Dirichlet et celui de l'élasticité, à montrer d'une façon tout à fait rigoureuse qu'en prenant un nombre suffisamment grand de termes, on peut approcher autant qu'on le veut de la solution exacte. Il a montré aussi quelles étaient les propriétés analytiques essentielles de cette solution, telles qu'elles étaient déjà connues par la méthode de Fredholm.*

» *Les mêmes procédés de démonstration seraient-ils applicables à tous les problèmes analogues et, par exemple, aux problèmes de Fourier ? Ritz le croyait, je le crois aussi, mais le temps lui a manqué pour le vérifier.* »

Les trois Mémoires contenant cette nouvelle méthode et les résultats qu'elle a donnés sont : l'exposé général paru au *Journal für reine und angewandte Mathematik* et présenté plus tard comme thèse d'habilitation, le Mémoire *Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben* présenté le 16 mai 1908 à la Société Royale des Sciences de Gœttingue et le Mémoire, écrit en janvier 1909, sur la théorie des vibrations d'une plaque carrée à bords libres, publié aux *Annalen der Physik*. Il écrivait au cours de l'exécution de ce dernier travail :

« Gœttingue, 15 décembre 1908.

« La théorie des figures de Chladni va être pour ma méthode une bonne occasion de montrer ses qualités. Je trouve

un résultat remarquablement simple : soit $u_m(x)$ la déformation d'une verge vibrante à extrémités libres ($m^{\text{ième}}$ harmonique), de même longueur que le côté de la plaque carrée vibrante ; eh bien ! toutes les vibrations de celle-ci sont, à quelques pour cent près, données par les expressions :

$$u_m(x)u_n(y) + u_m(y)u_n(x); \qquad u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x)$$

(x, y parallèles aux côtés du carré). J'ai calculé pour $m = 0, 1, 2$; $n = 1, 2\ldots$ les approximations supérieures à $\frac{1}{3000}$ près, cela concorde très bien avec les expériences les plus précises ; et je donnerai pour la première fois, la série des figures exactes de Chladni jusqu'au 30[ième] harmonique ! ! Cela m'a fatigué, mais il n'y a aucun rapport entre la fatigue et la célébrité de ce problème resté insoluble malgré tant d'efforts. »

Le troisième groupe des travaux de Ritz a pour objet la plus importante question, peut-être, de la Physique actuelle : les lois de l'Électrodynamique générale et de l'Optique. Il s'était proposé d'écrire d'abord une étude critique montrant l'insuffisance des théories antérieures et de faire ensuite la synthèse d'une électrodynamique nouvelle comprenant l'optique. La partie critique seule est achevée. C'est elle qui fait l'objet principal de l'important Mémoire publié en février 1908 aux *Annales de Chimie et de Physique* qui contient en outre, à titre d'acheminement vers la synthèse, la délimitation de l'ensemble des lois élémentaires possibles pour l'action mutuelle de deux électrons. Il a donné un exposé plus condensé de sa pensée aux *Archives des Sciences physiques et naturelles* et dans deux articles de Philosophie scientifique : *Du Rôle de l'Éther en Physique* et *La Gravitation* publiés dans la revue : *Scientia*. Dans le premier de ces

articles il montre l'impossibilité de conserver le concept éther malgré les services qu'il a rendus. Mais la voie dans laquelle il s'est engagé est toute différente de celle qu'ont suivie Lorentz et Einstein. Il remarque que la Mécanique classique satisfait au *principe de relativité* et que la théorie de l'émission fondée sur elle est, en conséquence, conforme à ce principe. Attribuant les phénomènes électriques et lumineux à une énergie projetée par l'électron avec la vitesse de la lumière il peut conserver l'universalité du temps, le parallélogramme des vitesses, le solide invariable auxquels ont renoncé les électrodynamiques rivales. Dans sa théorie, l'action élémentaire entre deux électrons, par un retour imprévu au point de vue newtonien et à celui de W. Weber, ne dépend que de la distance, des vitesses relatives et des accélérations. Ritz conserve la constance de la masse, rendant les forces infinies pour la vitesse limite. Ce sont là de très grands avantages. Ils sont liés au postulat de la communication de l'heure par le transport d'horloges et non au moyen de signaux électromagnétiques. Cette conception des choses est-elle réellement féconde? Il n'a pu en fournir la preuve, mais il avait la ferme conviction qu'il y réussirait. Il l'exprimait dans les lettres dont nous donnons ici des extraits; elles contiennent aussi des indications sur la manière dont il entrevoyait le développement ultérieur de sa théorie :

« Waldkirch, 19 août 07.

« L'étude attentive de l'optique m'a montré que mes hypothèses étaient insuffisantes pour certains phénomènes tels que l'entraînement des ondes (de Fizeau); au lieu de laisser mon « émission » filer tout droit à travers les corps, modi-

fiant leur mouvement s'ils sont électrisés, mais n'étant pas modifiée elle-même, je vois qu'il y a action *et* réaction ; la partie de l'émission qui frappe un électron rediverge en nouvelle onde à partir de ce centre. J'entrevois encore beaucoup d'autres choses, et en somme une belle théorie physique. Mais mon travail critique ne rentre pas dans ce cadre, et d'ailleurs je ne peux le laisser dormir indéfiniment. Je me suis dit que ce sont là deux choses différentes et me suis décidé à publier ma critique — d'abord toute négative — de la théorie de Lorentz, d'introduire l'hypothèse de l'émission seulement dans le but de pouvoir ajouter la partie positive de ma critique (qui est l'expression mathématique la plus générale pour l'action élémentaire de deux électrons, rendant compte de toutes les expériences électrodynamiques y compris celles de Hertz) ; j'indique seulement les lignes générales de la théorie physique telle que je la conçois ; et me borne à une recherche mathématique critique, dont les résultats sont le complément indispensable de la critique négative, et qui sont même assez curieux, eux aussi. »

« Waldkirch, 17 Sept. 1907.

« ... Wenn ich kann, sende ich Dir die Correcturbogen meiner kritischen Arbeit. Doch erwarte ich höchstens, dass Du zugeben wirst nach Lectüre : Die Elektrodynamik ist noch ganz im Argen, der Aether ist aufzugeben und das Emissionsbild wieder aufzunehmen. Du wirst sehen, dass ich demselben noch nicht seine definitive Fassung gegeben habe ; so wie ich es im Kopfe habe ist es viel einfacher und befriedigender, dank der *Aufgabe des Superpositionsprincipes.* Aber dieses habe ich in meiner kritischen Arbeit nicht aufgeben wollen und es war mir wichtig zu untersuchen, wie sich die Dinge mit und ohne dieses wichtige Prinzip ausnehmen. »

« Gœttingue, lundi de Pentecôte 1908.

« Je vais maintenant revenir à l'optique des corps en mouvement, mais sans enthousiasme, par acquit de conscience. Je ne saurais douter, en effet, qu'on ne viendra à mes idées, quelle que soit la perfection que je leur donne, qu'extrêmement à contre-cœur ; une conversation avec X après beaucoup d'autres conversations, m'en a persuadé. Personne ne parvient à me faire une objection valable, et j'ai fait taire X lui-même. Ça n'y fait rien, on trouve mes idées « scheusslich ». Pourtant, j'ai trouvé en dehors du critérium relatif à l'influence d'un aimant fermé sur un rayon β (1) que vous connaissez, un autre critérium réalisable au moyen des puissantes installations de la télégraphie sans fils. C'est l'action d'une antenne verticale, rectiligne, sur du fer ou sur un tube de Braun. Si le résultat est négatif, comme cela est possible, c'est l'enterrement de la théorie de Maxwell. Si non, il faudra voir le détail : les choses pourraient se passer comme le veut Lorentz, sans que, au reste, ses équations soient justes. En tous cas le résultat serait intéressant. »

« Göttingen 17. XII. 08.

« Die « Scheusal-Theorie » in den Annales de Chimie et de Physique ist nicht wahre Theorie, sondern nur Gegenbeispiel. An der wahren Theorie, die unter grössten Schwierigkeiten langsam wächst, wirst Du kaum etwas auszusetzen haben, gesetzt ich erlebe ihre Vollendung. »

---

(1) Déviation ou absence de déviation des rayons β par un aimant fermé ou un solénoïde fermé, dans les diverses positions relatives.

Nous avons ajouté aux travaux sur l'Électrodynamique le discours d'habilitation qu'il a prononcé le 5 mars 1909 dans sa leçon inaugurale. Il n'a pu mettre la dernière main à cet exposé qu'il avait l'intention de publier et nous avons dû le reconstituer d'après des brouillons. Il n'a sans doute pas la perfection de forme qu'il aurait su lui donner, et tout ce qu'il contient d'essentiel est déjà énoncé dans ses autres travaux. Mais nous avons cru devoir le conserver, ne serait-ce que comme résumé en langue allemande d'une partie de son œuvre écrite entièrement en français.

*
* *

Il avait, sur d'autres questions encore que celles qui sont traitées dans ses écrits, des idées neuves et sans doute fécondes dont il avait parlé à ses amis. Il était convaincu entre autres que les problèmes de la Mécanique statistique ne sont si difficiles que parce que les véritables méthodes de calcul restent encore à trouver, et il semble, d'après une de ses lettres, que pendant l'hiver passé à St. Blasien il se soit occupé de ces questions avec un commencement de succès :

« .....einen weitgehenden Ansatz gefunden, ganz neuer Art (eine noch nicht dagewesene Methode in der kinetischen Theorie der Materie), durch die ich den Satz beweisen werde, dass die irreversiblen Erscheinungen wie Wärmeleitung, Reibung etc., auf einem gewissen Grundgesetz beruhen, und dass dieses aus der Elektronentheorie, combinirt mit der gewöhnlichen kinetischen Theorie sich *beweisen* lässt, ganz streng... »

Les idées auxquelles il fait allusion dans cette lettre étaient-elles encore les siennes quelques années plus tard? Il est

difficile de s'en rendre compte et les recherches attentives faites dans ses papiers n'ont rien donné à cet égard. Il nous a paru cependant que cette indication méritait d'être conservée, comme aussi les extraits de lettres que nous donnons plus loin et dans lesquelles il exprime son intention de reviser la théorie de la polarisation rotatoire et de l'absorption. Jusqu'à ses derniers jours il n'avait pas renoncé à mettre ce projet à exécution.

*
* *

C'est donner une image bien incomplète de la richesse de sa nature que de ne parler que de ses travaux scientifiques. Il avait un sentiment artistique très affiné, une vive compréhension de la peinture, il aimait la musique dont les chefs-d'œuvre avaient dans son âme sensible une répercussion profonde. Il faudrait dire aussi l'affection qu'il avait pour ses amis et pour sa famille à qui son jugement si sûr en toute circonstance était devenu indispensable. Il faudrait apprécier sa parfaite indépendance d'esprit, ennemie des idées reçues, l'attrait de sa conversation pleine d'aperçus pittoresques et à laquelle le souci de l'expression juste donnait parfois comme une nuance d'hésitation qui était un charme de plus.

Mais sachant qu'il eût préféré le silence à toute manifestation un peu excessive, nous éviterons d'écrire ce qui n'aurait pas manqué d'éveiller son ironique et malicieux sourire.

Pierre Weiss.

GESAMMELTE WERKE

WALTHER RITZ

ŒUVRES.

I.

ZUR

THEORIE DER SERIENSPEKTREN.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde, vorgelegt der Hohen Philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen.

EINLEITUNG.

Die merkwürdigen Gesetze, die von Balmer [1], Kayser und Runge, und Rydberg in vielen Linienspektren entdeckt worden sind, zeigen bekanntlich, dass die Eigenschwingungen des Lichterregers einen durchaus anderen Typus besitzen als die uns aus der Elektrodynamik, Elastizitätstheorie und Hydrodynamik bekannten Fälle von Eigenschwingungen. Während in letzteren die Schwingungszahlen ν, als Funktionen willkürlicher ganzer Zahlen dargestellt, für grosse Werte dieser Zahlen arithmetische Progressionen bilden, welches auch immer die Gestalt der schwingenden Körper sei, und somit niemals zwischen zwei endlichen Werten

---

([1]) J.-J. Balmer, *Wied. Ann.*, t. XXV, 1885, p. 80.

von ν unendlich viele Eigentöne liegen, so findet genau das Gegenteil für die den Serienspektren (und wie es scheint, auch den Bandenspektren) entsprechenden schwingenden Systeme statt.

So ist das Wasserstoffspektrum bekanntlich mit ausserordentlicher Genauigkeit darstellbar durch die Balmersche Formel, die man schreiben kann

$$\frac{10^8}{\lambda} = 109675,0\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right),$$

wo λ der Reihe nach die auf Vakuum reduzierten Wellenlängen der Wasserstofflinien in Ångströmeinheiten (10^{-8} cm) bedeutet, wenn $m = 3, 4, 5 \ldots 32$ gesetzt wird [1]. Mit unendlich wachsendem m nähern sich die $1/\lambda$ immer wachsend einer endlichen Grenze, in deren Nähe unendlich viele Spektrallinien sich häufen.

Dabei ist die Genauigkeit, mit welcher sich diese Formel an die Erfahrung anschliesst, eine so ausserordentliche, und die Feinheit der Messungen so gross, dass nur wenige physikalische Gesetze in dieser Hinsicht mit jener Formel vergleichbar sind. Beim Versuch sie theoretisch zu begründen wird man somit zunächst von der Voraussetzung ihrer absoluten Genauigkeit ausgehen dürfen.

Die ganz ähnlichen Gesetze anderer Linienspektren sind weiter unten zusammengestellt. Auch sie zeigen stets eine Häufungsstelle der Schwingungszahlen im Endlichen.

Dass eine solche Häufungsstelle auf Grund der bekannten Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right),$$

die für alle Schwingungsprobleme der Elastizitäts- und Elektrizitätstheorie massgebend ist, nie eintreten kann, ist bekannt. Für festgehaltene Begrenzung ist der strenge Beweis von Herrn Poincaré [2] erbracht worden. Zwar können bei geeignet gewählten Bedingungen mehrere Eigenschwingungen sehr nahe zusammenfallen, doch ist ihre Zahl stets endlich, und sie weisen auch

---

(1) Näheres vgl. H. Kayser, *Handbuch der Spektroskopie*, II. Aufl., t. II, 1902, p. 504.

(2) H. Poincaré, *Rendic. del circ. mat. di Palermo*, t. VIII, 1894, p. 57.

nicht annähernd die von der Balmerschen Formel geforderte Gesetzmässigkeit auf.

Danach scheint die Anlehnung an die geläufigsten Hypothesenbildungen der Physik sehr erschwert. Bedenkt man noch, dass der Schluss aus den Schwingungszahlen eines zur Zeit uns noch ganz unbekannten Systems auf die Gesetze seiner Bewegung kein eindeutiger ist, so wird man die Aufgabe der Theorie so stellen dürfen :

Unter möglichster Anlehnung an Mechanik oder Elektrodynamik sollen physikalisch anschauliche, mathematische Operationen angegeben werden, deren Interpretation durch die Schwingungen eines geeigneten « Modells » für diese auf die Gesetze der Serienspektren führen; sie soll gestatten, die empirischen Formeln zu verbessern, unter einheitlichen Gesichtspunkt zu ordnen und neue Gesetze aufzudecken.

In diesem Sinn der Fragestellung hoffe ich die Aufgabe im folgenden gelöst zu haben. Nach einer Uebersicht des vorliegenden empirischen Materials und der bisherigen theoretischen Versuche werden zunächst aus einem geeigneten, möglichst einfachen Ansatz für die potentielle Energie eines zweidimensionalen Kontinuums (es sind Fernwirkungen angenommen) die Bewegungsgleichungen desselben auf Grund des *Prinzips der kleinsten Aktion* abgeleitet. Es ergeben sich eine Hauptgleichung und gewisse Randbedingungen; die Lösung dieser Gleichungen zeigt, dass die Gesamtheit der Eigenschwingungen des Systems das Wasserstoffspektrum darstellt.

Auf die Spektren anderer Elemente wird man geführt, wenn man die Hauptgleichung der Bewegung und die Gestalt des Systems ungeändert lässt und nur die Randbedingungen variiert. *Diese Annahme führt nämlich zu Formeln, die bei geringerer Anzahl der verfügbaren Konstanten eine besonders im roten Teil des Spektrums wesentlich höhere Annäherung an die Erfahrung darstellen als bisher erreicht war.* Auch ergeben sich Beziehungen zwischen verschiedenen Serien, die zum Teil von Rydberg wegen der Unvollkommenheit seiner Formel nur vermutet werden konnten. Der sogenannten zweiten Konstante der Formeln von Kayser und Runge, die von Element zu Element auffallend wenig veränderlich sich zeigte, entspricht in den neuen

Formeln eine *exakt universelle Grösse*, etc. Da somit die gemachten Voraussetzungen mehr als bloss formale Bedeutung zu haben scheinen, wurde schliesslich der Versuch gemacht, durch geeignete Hülfshypothesen die *Ausstrahlungsfähigkeit der Obertöne des Systems* zu erzielen.

Auf Bandenspektren findet die Theorie keine Anwendung.

Die empirischen Gesetze.

Mit λ wird im folgenden stets die *Wellenlänge in Luft* nach Rowlands Skala und in Ångströmeinheiten bezeichnet: mit ν *die Wellenzahl*, d. h. die Anzahl Wellenlängen, die im Vakuum auf 1 cm fallen; abgesehen von der Luftbrechung ist $\nu = 10^8\lambda^{-1}$; ν ist der Anzahl Schwingungen pro Sekunde proportional. Endlich sei N der Koeffizient der Balmerschen Formel, aus Rowlands Messungen für H_α, H_β, H_γ abgeleitet. Es ist also

$$N = 109675{,}0.$$

Dann schreibt sich die Balmersche Formel

$$\nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (m = 3, 4, \ldots).$$

Von Pickering (¹) ist im Spektrum des Sternes ζ Puppis, der die Wasserstofflinien sehr stark zeigt, eine neue Serie von Linien gefunden worden, deren Wellenzahlen sich sehr genau darstellen lassen durch die Formel

$$\nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(m+0{,}5)^2}\right) \qquad (m = 3, 4, 5, \ldots)$$

($m = 2$ fällt ins Ultrarot). Pickering hat diese Serie mit der Balmerschen zu einer Formel vereinigt, wobei der Balmerschen die geraden, der neuen die ungeraden Ordnungszahlen zukommen. Doch haben Kayser (²) und Rydberg (³) nachgewiesen, dass nach der Analogie aller anderen Spektren diese Darstellung nur zufällig

(¹) H.-W. Pickering, *Harvard College Observatory Circular*, Nr. 12, 1896; *Astrophys. Journ.*, t. IV, 1896, p. 369.

(²) H. Kayser, *Astroph. Journ.*, t. V, 1897, p. 243.

(³) J.-R. Rydberg, *Astroph. Journ.*, t. VI, 1897, p. 233.

möglich ist, dass wir vielmehr in der Balmerschen Serie die sogenannte erste Nebenserie, in der Pickeringschen die zweite Nebenserie von Wasserstoff haben.

Für $m = 1$ ergibt sich nun $\nu = -21325,7$, $\lambda = 4687,88$. Nach Analogie der anderen Spektren sollte eine hervorragend starke Linie, die Grundlinie der Hauptserie diese Wellenlänge aufweisen, was sich glänzend bestätigt hat ([1]). Die weiteren Linien der Hauptserie liegen im Ultravioletten und sind wegen der atmosphärischen Absorption unsichtbar. Die Formel der Hauptserie ist nach Rydberg

$$\nu = N\left[\frac{1}{(1,5)^2} - \frac{1}{m^2}\right] \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$

Danach besteht das Wasserstoffspektrum der Nebelsterne aus drei Serien: einer sehr intensiven, weit im Ultraviolett endigenden Serie mit scharfen Linien, der « Hauptserie »; einer weniger intensiven « Nebenserie » mit verbreiterten Linien, der einzigen, die wir künstlich darstellen können; und einer noch schwächeren, aber schärferen « zweiten Nebenserie », die an demselben Punkt endigt wie die erste Nebenserie. In jeder dieser Serien nimmt die Intensität ab mit wachsender Ordnungszahl.

Ganz ähnlich gebaut erweist sich das Spektrum von *Lithium* ([2]) Auch hier ordnen sich die Linien in drei Serien mit genau dem besprochenen Aussehen; wieder zeigt sich ein immer näheres Zusammenrücken der Linien jeder Serie, wenn man von Rot nach Violett geht.

Auch Na, K, Rb, Cs zeigen dieselbe Erscheinung, nur sind die Linien doppelt. Von Hartley ([3]) und Julius ([4]) ist bemerkt worden, dass der Abstand der Komponenten jedes Paares, gemessen in der Skala der Wellenzahlen, also $\nu_1 - \nu_2$, konstant ist. Dies « Gesetz der konstanten Differenzen » hat sich von höchst allgemeiner Gültigkeit erwiesen.

([1]) J.-R. Rydberg, *loc. cit.*, p. 235.

([2]) Die Linien sind wahrscheinlich sehr enge Paare, vgl. A. Hagenbach, *Ann. d. Phys.*, t. IX, 1902, p. 729.

([3]) W.-N. Hartley, *Journ. chem. soc.*, t. XLI, 1882, p. 84; *Phil. Mag.*, 5e série, t. XXXI, 1891, p. 359.

([4]) V.-A. Julius, *Natuurk. Verh. der Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam*, t. XXVI, 1888.

Dies gilt für die Nebenserien. Für die Hauptserie werden die Paare mit zunehmendem ν immer enger; das rote Paar zeigt dieselbe Differenz $\nu_1 - \nu_2$ wie die Nebenserien.

Die Elemente der zweiten Mendelejefschen Gruppe zeigen Triplets an Stelle der Doppellinien: die Hauptserie ist noch nicht gefunden, für die Nebenserien gilt wieder das Gesetz der konstanten Differenzen.

Bei Helium [1] hat man zwei Nebenserien und eine Hauptserie von Doppellinien, dann noch zwei Nebenserien und eine Hauptserie von einfachen Linien. Das sogenannte Compoundspektrum [2] von O zeigt dieselbe Anordnung, nur dass an Stelle der Doppellinien Triplets treten; an Stelle der einfachen Linien Doublets.

Wenn die Linien einer Serie wegen ihres gemeinsamen wohl ausgeprägten physikalischen Charakters schon sehr früh in vielen Fällen als zusammengehörig erkannt waren, so haben die Untersuchungen von Runge und Paschen [3] über das Verhalten der Serienlinien im magnetischen Feld diese Zusammengehörigkeit, *unabhängig* von jeder mathematischen Darstellung, definitiv dargetan. Danach zeigen alle Linien einer und derselben Serie qualitativ und quantitativ dieselbe meist ziemlich komplizierte Zerlegung, wenn man die Skala der Wellenzahlen zu Grunde legt; die verschiedenen Komponenten eines Triplets geben verschiedene Zerlegungen, ebenso die verschiedenen Serien. Die Zerlegung (in der ν-Skala) entsprechender Linien verschiedener Elemente ist qualitativ und quantitativ dieselbe. Man hat hier ein von aller Willkür freies Mittel, die Linien zu Serien zu ordnen.

Es handelte sich nun darum, für diese Serien Formeln aufzustellen, die der Balmerschen entsprechen. Dies ist gleichzeitig von Kayser und Runge [4] und Rydberg [5] versucht worden, und zwar ordnen sie die Spektren im wesentlichen ganz in derselben Weise.

---

(1) C. Runge u. F. Paschen, *Astrophys. Journ.*, t. III, 1896, p. 4.

(2) C. Runge u. F. Paschen, *Wied. Ann.*, t. LXI, 1897, p. 641.

(3) C. Runge u. F. Paschen, *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, 1902, p. 380 u. p. 720; *Abhandlungen d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, 1902.

(4) H. Kayser u. C. Runge, *Abhandlungen d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, 1889, 1890, 1891, 1892.

(5) J.-R. Rydberg, *K. Svenska Akad. Handl.*, t. XXIII, 1889.

Die Balmersche Formel lautet

$$\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right);$$

es lag nahe eine Entwickelung von der Form

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2} + \ldots \\ \text{oder} \\ \frac{1}{\lambda} = a' + \frac{b'}{m^2} + \frac{c'}{m^4} + \ldots \end{array} \right. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

anzusetzen und mit den ersten Gliedern abzubrechen. In ihren ausgedehnten Untersuchungen haben Kayser und Runge auf Grund ihrer sehr feinen Messungen nachgewiesen, dass die zweite Formel die Beobachtung in der Tat sehr genau darstellt. Dabei zeigte sich, dass meist die niedrigsten Ordnungszahlen (2 oder 3) der ersten (roten) beobachteten Linie entsprechen; war dies nicht der Fall, so ergaben die Formeln Linien im Ultrarot, die seither in der Tat von Lehmann ([1]) und Lewis ([2]) grösstenteils nachgewiesen sind, eine schöne Bestätigung der Formeln. Merkwürdigerweise bleibt der zweite Koeffizient b' zwischen ziemlich engen Grenzen eingeschlossen, während der erste und der dritte von Serie zu Serie stark variieren. Während aber bei der ersten Nebenserie die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung meist innerhalb der Fehlergrenzen liegen, haben Kayser und Runge bei der niedrigsten Ordnungszahl in der Hauptserie und der zweiten Nebenserie sehr starke Abweichungen, die bis auf 300 Å.-E. (bei Cs) aufsteigen. Es fehlen somit in ihren Formeln Glieder mit höheren Potenzen von $1/m^2$; $1/\lambda$ ist durch eine rasch konvergente Potenzreihe darstellbar. Die Existenz einer Grenze für λ bei $m = \infty$ folgt aus diesen Formeln wie bei Wasserstoff.

Rydberg (*loc. cit.*) benutzt die Formel

$$(b) \qquad \frac{1}{\lambda} = A + \frac{B}{(n - \mu)^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die er als Anfangsglied der sehr konvergenten Entwickelung einer

---

([1]) H. Lehmann, *Ann. d. Phys.*, t. V, 1901, p. 633; t. VIII, 1902, p. 643.
([2]) E. Lewis, *Astroph. Journ.*, t. II, 1895, p. 1.

universellen Funktion

$$\frac{1}{\lambda} - A = f(n+\mu) = \frac{B}{(n+\mu)^2} + \frac{C}{(n-\mu)^4} + \ldots$$

betrachtet. Er setzt daher B aus der Balmerschen Formel ein, sodass er nur *zwei* willkürliche Konstante A und μ verfügbar hat. Die Uebereinstimmung ist aber wesentlich schlechter als bei Kayser und Runge, und daher die Formel sehr verbesserungsbedürftig. Bestimmt man dagegen B für jede Serie in geeigneter Weise, so wird der Anschluss (bei drei Konstanten) mit dem von Kayser und Runge erzielten ziemlich gleichwertig. Es zeigt sich, dass B innerhalb noch engerer Grenzen variabel ist ([1]) wie b' in (a).

Für die rote Linie der Hauptserie nehmen Kayser und Runge zumeist die Ordnungszahl 3 an, um den bestmöglichen Anschluss an die Beobachtung zu erhalten. Bei Li, He dagegen zeigt sich, dass $n = 2$ gewählt werden muss. Rydberg hat überall $n = 2$ (wenn seine Konstante μ zwischen $-0,5$ und $+0,5$ genommen wird). Da ist der Hauptserie von Wasserstoff

$$\frac{1}{\lambda} = N\left[\frac{1}{(1,5)^2} - \frac{1}{m^2}\right]$$

die Grundlinie der Ordnungszahl $m = 2$ entspricht, so ist letztere Wahl sicher die zweckmässigere.

Bei He, O, S, Se benutzen Runge und Paschen (*loc. cit.*) die Formel

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3},$$

die man als Anfang der Entwickelung von

$$\frac{1}{\lambda} = A + \frac{B}{(m+\mu)^2} = A + \frac{B}{m^2} - \frac{2\mu B}{m^3} \ldots$$

auffassen kann. Bei allen Formeln werden die Grundlinien ($n = 2$, 3) besonders schlecht dargestellt.

Dass Rydbergs Formel der von Kayser und Runge in gewis-

([1]) Vgl. C. Runge u. F. Paschen, *Wied. Ann.*, t. LXI, 1897, p. 664.

sem Sinn überlegen ist, zeigt die Pickeringsche H-Serie, deren Gleichung

$$\frac{1}{\lambda} = N\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(m+0,5)^2}\right]$$

genau die Rydbergsche Formel hat.

Rydberg hat auf Grund seiner Formel eine Anzahl Gesetze gefunden, die von Kayser und Runge zum Teil bestätigt wurden.

I. *Die beiden Nebenserien endigen an derselben Stelle:* bestehen sie aus Doppellinien, so hat man *zwei* den beiden Serien gemeinsame Konvergenzpunkte. Die ersten Konstanten A müssen dann in den Formeln der beiden Serien identisch sein. Die Prüfung dieses Gesetzes erfordert Extrapolation auf $m = \infty$, und das Gesetz zeigt sich bei den Formeln von Kayser und Runge weniger genau erfüllt wie bei den Rydbergschen. Eine Zusammenstellung der Werte von A, die an dem Gesetz kaum einen Zweifel lassen, gibt Rydberg (¹).

II. *Die Doppellinien der Hauptserien haben eine gemeinsame Grenze*, wie auch Kayser und Runge angeben.

III. *Die Linien der ersten Nebenserie haben einen komplizierten Bau:* nicht die intensivsten Linien, sondern die « Satteliten » geben untereinander die konstante Differenz der Wellenzahlen, und zwar dieselbe wie die Paare bzw. Triplets der zweiten Nebenserie.

Dieses Gesetz ist ebenfalls von Kayser und Runge (²) zugegeben. Am vollständigsten ist die Anordnung der Quecksilberlinien (in Geisslerröhren) bekannt, die als Beispiel folgen möge. Es sind nach Rydbergs Bezeichnung ν_1 bzw. ν_2 die Differenzen der Wellenzahlen der ersten und zweiten, bzw. zweiten und dritten Linie eines Triplets. Für die zweite Nebenserie ist $\nu_1 = 4633,0$; $\nu_2 = 1767,4$ (im Mittel).

(¹) J.-R. RYDBERG, *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, t. II, Paris 1900, p. 212.

(²) H. KAYSER, *Handbuch*, t. II, 1902, p. 535.

	ν_1.		ν_2.	
27296,60......	4632,39	31928,99	1767,82	33696,81
3,05......		2,96		3,06
27299,65......	4632,30	31931,95	1767,92	33699,87
60,13......		60,06		
27359,78......	4632,23	31992,01		
35,15......				
27394,93......			—	.

IV. *Die Differenzen ν_1, ν_2 sind innerhalb einer und derselben Gruppe chemisch verwandter Elemente proportional dem Quadrat des Atomgewichtes.* Diese Beziehung ist nur angenähert.

V. *Eine letzte wichtige Beziehung verbindet die Hauptserie mit der zweiten Nebenserie.* Schreibt man für erstere

$$\nu = \mathrm{A} - \frac{\mathrm{N}}{(m-a)^2} \qquad (m = 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

für letztere aber

$$\nu = \mathrm{S} - \frac{\mathrm{N}}{(m-s)^2} \qquad (m = 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

so findet man, dass

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{N}}{(1-s)^2}, \qquad \mathrm{S} = \frac{\mathrm{N}}{(2-a)^2}$$

sodass beide Serien sich zusammenfassen lassen in

$$\pm\nu = \mathrm{N}\left[\frac{1}{(m-s)^2} - \frac{1}{(n+a)^2}\right]. \tag{3}$$

Das Vorzeichen ist so zu wählen, dass ν positiv wird. Für die Hauptserie ist $m = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots$; für die zweite Nebenserie $n = 2$, $m = 1, 2, \ldots$. Für die rote Linie der Hauptserie ist

$$\nu = \mathrm{N}\left[\frac{1}{(1,5)^2} - \frac{1}{(2+\mu)^2}\right];$$

ihr ν *wäre also gleich der Differenz* $\mathrm{A} - \mathrm{S}$ *der Grenzen von Hauptserie und Nebenserien.*

Die erste Beziehung lässt sich recht genau prüfen und erweist

sich als richtig, soweit die Sicherheit der extrapolierten Grenzen reicht [1].

Die zweite Aussage der Gleichung (3) ist :

Die erste Linie der zweiten Nebenserie ($n = 2$, $m = 1$) *ist identisch mit der ersten Linie der Hauptserie* ($m = 1$, $n = 2$).

Diese Beziehung scheint zunächst nur eine rohe Annäherung zu sein und wurde bis jetzt als solche betrachtet [2]. Man muss jedoch berücksichtigen, dass die Prüfung derselben eine sehr weite Extrapolation der Formel (2) verlangt, nach der Seite der kleineren Ordnungszahlen hin. Schon von $n = 3$ auf $n = 2$ wird die Extrapolation recht ungenau, sie kann für $n = 1$ ganz unsicher werden, aber es ist durch diese mangelhafte Uebereinstimmung mit der Beobachtung nichts *gegen* die Zusammengehörigkeit der Serien bewiesen. Sehr *gestützt* wird dieselbe dagegen durch folgende Tatsachen :

Betrachtet man ein Spektrum von Doppellinien, so lauten die Formeln nach Rydberg :

Hauptserien :

$$(\alpha) \qquad \pm\frac{\nu}{N} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+s)^2} - \dfrac{1}{(n+\mu_1)^2} \\[2ex] \dfrac{1}{(1+s)^2} - \dfrac{1}{(n+\mu_2)^2} \end{cases}$$

Erste Nebenserie :

$$(\beta) \qquad \pm\frac{\nu}{N} = \begin{cases} \dfrac{1}{(m+a)^2} - \dfrac{1}{(2+\mu_1)^2} \\[2ex] \dfrac{1}{(m+a)^2} - \dfrac{1}{(2+\mu_2)^2} \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} |a| \\ |s| \\ |\mu_1| \\ |\mu_2| \end{matrix}\right\} < 0,5.$$

Zweite Nebenserie :

$$(\gamma) \qquad \pm\frac{\nu}{N} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n+s)^2} + \dfrac{1}{(2-\mu_1)^2} \\[2ex] -\dfrac{1}{(n-s)^2} + \dfrac{1}{(2-\mu_2)^2} \end{cases}$$

Sei $\mu_1 > \mu_2$, so ergibt μ_1 für die Hauptserie nach (α) grössere ν

---

[1] J.-R. Rydberg, *Rapports*, etc., t. II, p. 214, gibt eine Zusammenstellung.
[2] H. Kayser, *Handbuch*, t. II, 1902, p. 557.

(absolut genommen) als μ_2; kleinere nach (γ) für die zweite Nebenserie. Es müssten sich die kleineren Wellenlängen des Doublets der Hauptserie und die grösseren in der zweiten Nebenserie entsprechen, und vice versa. Nun findet sich:

1. Die Intensitäten der Komponenten der Doublets zeigen in der Hauptserie die umgekehrte Reihenfolge wie in der zweiten Nebenserie.

2. Die Abstände der Komponenten sind durch die Formeln (α), (β), (γ) sehr genau beschrieben ([1]) (näheres vgl. unten).

3. Die ersten (mehr nach Rot gelegenen) Komponenten der Doublets der Hauptserie zerlegen sich im magnetischen Feld genau wie die zweiten Komponenten der Doublets der zweiten Nebenserie, und vice versa ([2]).

Besonders letztere Beobachtung spricht sehr für einen wirklichen Zusammenhang. Auch ist bemerkenswert, dass bei Wasserstoff, wo die Formeln sich der Erfahrung am besten anschliessen, die Rydbergschen Beziehungen sich als vollkommen exakt erwiesen haben.

Vorgreifend bemerke ich, dass die gerade für die niederen Ordnungszahlen viel genaueren Formeln, die ich auf Grund der Theorie gefunden habe, eine weit bessere Uebereinstimmung der Rydbergschen Regeln mit der Erfahrung geben: bei allen Elementen, *wo beide Serien bekannt sind, fällt die extrapolierte Grundlinie der zweiten Nebenserie in die unmittelbare Nähe der Grundlinie der Hauptserie;* in den Tabellen (vgl. unten) *sind direkt beide Serien durch eine einzige Formel dargestellt.*

Weiter zeigte sich, dass die zweite Konstante der neuen Formeln genau universell ist, ein Resultat, dessen Deutung sich als sehr einfach erweist.

Schon Balmer betrachtete seine Formel als Spezialfall von

$$\frac{1}{\lambda} = \mathrm{N}\,\frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

([1]) C. Runge u. F. Paschen, *Wied. Ann.*, t. LXI, 1897, p. 664.

([2]) C. Runge u. F. Paschen, *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, 1902, p. 380, 720; H. Kayser, *Handbuch*, t. II, 1902, p. 670.

Ebenso wird man vermuten, dass Wasserstoff ausser der Serie $\pm\nu/N = 1/(1,5)^2 - 1/m^2$ auch noch die Serien $\pm\nu/N = 1/(2,5)^2 - 1/m^2$, $\pm\nu = 1/(3,5)^2 - 1/m^2$ etc. zeigt. Es lauten dann die Formeln des H-Spektrums:

$$(A) \quad \pm\frac{\nu}{N} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}, \quad \pm\frac{\nu}{N} = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{m^2} \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Berücksichtigt man noch die Darstellbarkeit der Haupt- und Nebenserie durch eine einzige Formel bei allen Elementen, soweit die Erfahrung reicht, so wird man wohl mit Rydberg es als sehr wahrscheinlich betrachten dürfen, *dass die Serienformeln eigentlich mit zwei willkürlichen ganzen Zahlen zu schreiben sind.* Dabei hätten dann positive und negative Schwingungszahlen dieselbe Bedeutung. Man erkennt sofort, da $N = 109675,0$, dass die nicht beobachteten Grundlinien, die den Ordnungszahlen 1, 2 in den Serien entsprechen, ins äusserste Ultrarot bez. Ultraviolett fallen. Denn es entsprechen sich folgende ν und λ:

ν =	10000	17000	32000	50000	
λ Å.-E. =	10000	5900 (D-Linien)	3100	2000	Grenze der bekannten Spektren.

Weitere Serien, die den Formeln $\pm\nu = N[1/m^2 - 1/n^2]$, $m = 1, 3, 4, \ldots$ entsprechen, liegen ganz im Ultrarot bez. Ultraviolett, bis auf die schon von der Balmerschen Serie aufgenommenen Linien; ihre Intensität ist wahrscheinlich geringer als die der letzteren Serie.

Die Formeln (A) verlangen also, dass im äussersten Ultrarot bez. Ultraviolett weitere Serien des Wasserstoffs parallel der bekannten verlaufen, ihre Wellenlängen sind durch obige Formeln (A) sehr genau voraus zu berechnen.

Bei den anderen Elementen gilt ähnliches, es sind in noch unbekannten, oder sehr mangelhaft bekannten Gebieten des Spektrums neue Serien zu erwarten, die sich aus den bekannten durch die unten angegebenen Formeln extrapolieren lassen. Die wenigen Spektren, bei welchen sich im Gelb und Blau Linien ergeben würden, lassen die genaue Berechnung nicht zu, da die Hauptserien noch nicht bekannt sind. (Näheres vgl. unten.)

Eine entscheidende Prüfung der zu (A) führenden Annahme

muss also der Zukunft überlassen bleiben. Doch scheint es wohl im jetzigen Stand unserer Kenntnisse der Linienspektren *notwendig* sie heranzuziehen, um zu einigem Verständnis der Tatsachen zu gelangen [1]. Die Möglichkeit einer künftigen Prüfung dieser Hypothese rechtfertigt dieselbe ebenfalls: es liegen daher die Formeln

$$\pm\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \qquad \pm\nu = N\left(\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

der *hier vorgetragenen Theorie zu Grunde*.

Übersicht der bisherigen theoretischen Versuche.

Die theoretische Erklärung der besprochenen Gesetze ist bis jetzt nicht über die ersten Anfänge hinausgegangen, wohl vor allem weil keine mathematischen Operationen im Gebiete der theoretischen Physik sich finden lassen, die auch nur annähernd zur Darstellung der Verhältnisse geeignet wären.

Die Literatur über den Gegenstand ist in Kaysers Handbuch, zweite Auflage, Band II, p. 597-609 ausführlich zusammengestellt bezüglich der Einzelheiten darf ich darauf verweisen.

Schon im Jahre 1870 hat Stoney [2], indem er die Bewegung eines Punktes durch Fouriersche Reihen darstellte, die Existenz harmonischer Beziehungen zwischen den Wellenlängen plausibel zu machen gesucht. Später [3] hat er in ähnlicher Weise die Doppellinien als Störungen einer elliptischen Hauptbahn zu erklären versucht. Diese Erklärung der Doublets ebenso wie die von Julius [4] (durch Kombinationstöne) sind heute hinfällig geworden (vgl. Kayser, *Handbuch, loc. cit.*).

Unter Annahme einer periodischen Exzitation stellt Jaumann [5]

---

[1] Bei den Bandenspektren ist von Deslandres (näheres bei H. Kayser, *Handbuch*, t. II, 1902, p. 470-495) die Abhängigkeit von *drei* willkürlichen ganzen Zahlen *nachgewiesen* worden.

[2] G.-J. Stoney, *Phil. Mag.*, 4e série, t. XLI, 1871, p. 291.

[3] G.-J. Stoney, *Dublin Trans.*, 2e série, t. IV, 1891, p. 563.

[4] V.-A. Julius, *Natuurk. Verh. k. Ak. Wet. te Amsterdam*, t. XXVI, 1888.

[5] G. Jaumann, *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien*, t. CIII *b*, II, 1894, p. 317.

die Bewegung wieder durch Fouriersche Reihen dar und schliesst aus dieser Darstellung auf die Existenz einer grossen Anzahl äquidistanter Linien, die nie beobachtet sind. Eine derartige Deutung der einzelnen Glieder einer Fourierschen Reihe ist ganz unberechtigt. Man würde ebensogut nach Wurzeln von $\operatorname{tg} k = k$ in der Form

$$\sum_i a_i \sin k_i x$$

entwickeln können; die a_i sind dann bekanntlich wieder bestimmte Integrale wie in Fouriers Entwicklung; man könnte so auf unendlich viele andere Spektrallinien schliessen.

Die Analogie der Doublets und Triplets mit dem Zeemaneffekt hat u. A. Larmor ([1]) hervorgehoben. Sie erweist sich aber als eine rein äusserliche, wenn man nicht nur die Nebenserien mit ihren äquidistanten Linien, sondern auch die Hauptserien mit den rasch enger werdenden Doublets berücksichtigt.

Bezüglich der Arbeiten von Herschel ([2]) und Sutherland ([3]) sei auf das Handbuch von Kayser (*loc. cit.*) verwiesen.

Dem Standpunkt der Elektronentheorie nähert sich Jeans ([4]). Er denkt sich eine Kugel, bestehend aus konzentrischen Schichten positiv und negativ geladener Ionen, deren Anziehung eine Funktion $\varphi(r)$ der Entfernung r ist. Für grosse r ist dann $\varphi(r) = a/r^2$ ($a =$ konst.), für kleine muss φ eine wesentlich andere Form besitzen, da sonst stabiles Gleichgewicht unmöglich wäre. Lässt man die Teilchen unendlich klein werden, so kann man das Schwingungsproblem durch Entwickelungen nach Kugelfunktionen behandeln. Auf Grund der asymptotischen Gleichung $\varphi(r) = a/r^2$ will Jeans beweisen, dass eine Grenze der Schwingungszahlen eintreten muss, also die Serien erklären. Dass dies in solcher Allgemeinheit nicht richtig ist, zeigt schon der Umstand, dass die molekulare Theorie der Elastizität einer Kugel, die von denselben Anschauungen ausgeht, bekanntlich *nicht* zu einer Grenze der

---

([1]) J. Larmor, *Phil. Mag.*, 5e série, t. XLIV, 1897, p. 503.

([2]) A.-S. Herschel, *The observatory*, June 1896; *Referat* Crew, *Astrophys. Journ.*, t. VII, 1898, p. 154.

([3]) W. Sutherland, *Phil. Mag.*, 6e série, t. II, 1901, p. 245.

([4]) J.-H. Jeans, *Phil. Mag.*, 6e série, t. II, 1901, p. 421.

Schwingungszahlen führt. Auch kann ich in den Entwickelungen p. 434-437 keinen stichhaltigen Beweis für die Behauptung von Jeans finden, da ich die ausgeführten Grenzübergänge für bedenklich halte. Es muss überhaupt der Verlauf von $\varphi(r)$ für kleine Entfernungen weit mehr als der für grosse die Schwingungszahlen bestimmen. Auf spezielle Spektren wird in der Arbeit nicht eingegangen.

Fitzgerald (1), Schuster (2) und Rayleigh (3) untersuchen den Fall, wo die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in einem System von Körpern eine Funktion der Wellenlänge ist, wie in Cauchys Dispersionstheorie. Man kann dann eine Grenze der Schwingungszahlen erzielen, besonders wenn man sich jede Spektrallinie von einem anderen System von Körpern ausgesandt denkt. Doch bezweifelt Lord Rayleigh, ob solche Analogien berechtigt seien, da bei ihnen im allgemeinen das Quadrat der Schwingungszahlen ν und nicht, wie die Erfahrung verlangt, ν selbst in den Gleichungen vorkommt. Er schliesst auf kinematische, nicht auf dynamische Verbindungen.

In diesem Sinn hat Hr. Riecke (4) die Schwingungen eines Ringes untersucht, indem er als Integrale der Bewegung ansetzte

$$u_1 = \sum_n \mathrm{A}_n \sin n\varphi \sin 2\pi pt,$$

$$u_2 = \sum_n \mathrm{A}_n \sin n\varphi \cos 2\pi pt$$

(n Anzahl der Knotenpunkte eines Ringes, u_1, u_2 zwei den Zustand beschreibende Grössen). Soll p durch eine Formel der Art

$$2\pi p = a + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^4}$$

(1) G.-F. Fitzgerald, *Rep. Brit. Ass.*, 1894, p. 689.

(2) A. Schuster, *Nat.*, t. LV, 1896, p. 200.

(3) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, 5e série, t. XLIV, 1897, p. 356; 5e série, t. XLVI, 1898, p. 567.

(4) E. Riecke, *Phys. Zeitschr.*, t. I, 1899, p. 10; t. II, p. 107; *Ann. d. Phys.*, t. I, 1900, p. 399.

gegeben sein, so genügt, dass man für u_1, u_2 das System ansetzt

$$\frac{\partial^5 u_1}{\partial t\, \partial \varphi^4} - a\frac{\partial^4 u_2}{\partial \varphi^4} + b\frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} - c u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial^5 u_2}{\partial t\, \partial \varphi^4} + a\frac{\partial^4 u_1}{\partial \varphi^4} - b\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + c u_1 = 0.$$

Eine Deutung dieser Gleichungen ist bis jetzt noch nicht gelungen. Eliminiert man etwa u_1, so folgt für u_2 eine Gleichung zehnter Ordnung.

Nach den Erörterungen in der Einleitung ist das Verhalten der Spektralserien mit der Annahme rein elastischer oder elektrodynamischer Schwingungen unvereinbar. Kolaček [1] und Lindemann [2], die von derartigen Annahmen ausgegangen sind, gelangen daher nur zu einem Zusammenrücken einzelner Linien; die Balmersche Formel auch nur angenähert zu erhalten, ist ihnen unmöglich. Die von Hrn. Lindemann aufgestellte Beziehung zu den Atomgewichten hat deshalb auch kaum Bedeutung.

Die Grundlagen der Theorie.

Für die Theorie der Spektrallinien kommen von vornherein zwei verschiedene Annahmen in Betracht. Man kann, ausgehend vom Zeemanphänomen, die Schwingungen einzelner Körper bez. Elektronen untersuchen, die sich in verschiedenen Gleichgewichtslagen oder Konstellationen befinden. Abgesehen von dem schon erwähnten Einwand von Lord Rayleigh, dass sich dann die einfachsten Gesetze auf das Quadrat der Schwingungszahl, nicht auf diese selbst beziehen (wie es die Balmersche Formel, das Gesetz der konstanten Differenz u. a. erfordern), scheint es sehr schwer auf diesem Weg eine zweifach unendliche Anzahl von Linien, wie sie bei den Linienspektren zu erwarten ist, oder gar eine dreifach unendliche, wie sie Deslandres [3] Gesetze für Bandenspektren erfordern, zu erhalten. Gerade letzterer Umstand zwingt

(1) F. Kolaček, *Wied. Ann.*, t. LVIII, 1896, p. 271.
(2) F. Lindemann, *Münch. Sitz.-Ber.*, t. XXXI, 1901, p. 441.
(3) H. Deslandres, *Compt. rend.*, t. CX, 1890, p. 748.

für die Bandenspektren auf Schwingungen eines [nach Runge (¹) positiv elektrischen] dreidimensionalen Körpers zurück zu greifen, und führt dann von selbst zur Annahme, dass die *Linienspektren ihren Ursprung den Eigenschwingungen zweidimensionaler Gebilde verdanken.*

Dies soll unsere Grundannahme sein.

Bei dieser Auffassung wird sich insofern eine Analogie unserer schwingenden Fläche zu elastischen Membranen ergeben, als beide eine zweifach unendliche Anzahl von Knotenlinien aufweisen können, und ihre Schwingungszahlen Funktionen zweier willkürlicher ganzer Zahlen sind, wie die Formel

$$\pm \nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

verlangt. Mathematisch eingekleidet besagt diese Annahme, dass jede stetige, für den Zustand charakteristische Grösse φ in ihrer Abhängigkeit vom Ort durch eine *oszillierende Funktion* gegeben ist.

Man vergleiche die Formel

$$\pm \nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

mit der für eine transversal schwingende, quadratische Membran gültigen Formel:

$$\text{(A)} \qquad p^2 = b(n^2 + m^2), \qquad \begin{array}{lllll} m = \pm 1, & \pm 2, & \pm 3, & \ldots, \\ n = \pm 1, & \pm 2, & \pm 3, & \ldots, \end{array}$$

wo b eine Konstante, p die Schwingungszahl bedeutet. Sind die Seitenlängen $2a$, sind die Koordinatenachsen durch den Mittelpunkt parallel zu den Seiten gelegt und ist der Rand festgehalten, dann ist das Integral der Elastizitätsgleichungen von der Form :

$$A \sin(pt - c) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}$$

(A, c, Konstanten). Dass die Quadrate der ganzen Zahlen m, n ohne weiteren Faktor verbunden erscheinen, ist Folge der Gleichwertigkeit des Quadrates in der x- und y-Richtung. Dass ganze

(¹) H. KAYSER, *Handbuch*, t. II, 1902, p. 660.

Zahlen und nicht, wie gewöhnlich, Wurzeln transzendenter Funktionen auftreten, folgt aus dem Umstand, dass in dem Integral nur sinus und cosinus vorkommen; die eingeführte Grundannahme führt also in wohl nicht allzu willkürlicher Weise dazu, für das dem Wasserstoffspektrum entsprechende schwingende Gebilde ebenfalls nur mit trigonometrischen Funktionen zu operieren. Damit ist die allgemeine Form der Lösungen der gesuchten Bewegungsgleichungen festgestellt; für die Schwingungszahlen sollen sich ausserdem die Formeln

$$\text{(B)} \qquad \pm\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad \text{oder} \qquad \pm\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}\right)$$

ergeben. Die Aufgabe ist nun, einfache Ansätze für die potentielle Energie des Systems zu finden, die zu solchen Bewegungsgleichungen führen.

Drei Unterschiede zwischen den Formeln (A) und (B) charakterisieren nun die Spektralschwingungen gegenüber den Schwingungen elastischer Körper.

1. Bei unendlich wachsenden Ordnungszahlen m, n wird p unendlich, ν aber nicht.
2. Die Formel (A) enthält die Schwingungszahl p im Quadrat, in (B) dagegen tritt sie in der ersten Potenz auf.
3. Die Formel (A) ist in m und n symmetrisch, (B) aber nicht.

Es sei noch bemerkt, dass bei den Spektralschwingungen ebenso wie in der Elastizitätstheorie, das Superpositionsprinzip gelten muss, die Grundgleichungen also linear sein müssen. Dieselben sollen jetzt aus dem Hamiltonschen Prinzip unter Zugrundelegung einer geeigneten Form für die potentielle Energie abgeleitet werden.

Systeme mit endlicher Grenze der Schwingungszahlen.

Aus später zu erörternden Gründen lassen sich x und y in den folgenden Gleichungen nicht, wie zuerst nahe liegen möchte, auf einer Kugelfläche interpretieren. Als *weitaus einfachste* Interpretation erweist sich die Annahme eines *ebenen*, *schwingenden*

Quadrates, die von nun an der Betrachtung zu Grunde liegen möge. Die Koordinatenachsen seien durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu den Seiten gelegt; $2a$ sei die Seitenlänge, ρ die Massendichte, do das Flächenelement.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, wo *eine* Grösse w, die wir zweckmässig als eine kleine Verschiebung der Punkte der Quadratfläche F senkrecht zu deren Ebene deuten, zur Beschreibung des Zustandes ausreicht. Dann ist die kinetische Energie des Systems:

$$\int\int \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 do.$$

Die potentielle Energie soll auf einer Fernwirkung beruhen, die jedes aus dem Gleichgewichtszustand verschobene Teilchen $x'y'$ auf ein in xy gelegenes ausübt. Diese Wirkung sei proportional der mittleren Krümmung $1/\rho_1 + 1/\rho_2$ der deformierten Fläche in $x'y'$, d. h. bis auf Grössen höherer Ordnung proportional

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} = \Delta w.$$

Ist dann $f[(x-x'), (y-y')]$ eine Funktion der relativen Lage der wirkenden Punkte, d. h. der Abstände gemessen parallel zu den Seiten des Quadrates, so sei die « Wirkung » Φ im Punkte xy:

$$\text{(a)} \qquad \Phi = \int\int \Delta w\, f\, dx'\, dy'.$$

Als Ausdruck der potentiellen Energie nehme man Φ^2 (analog wie in der Maxwellschen Theorie); dann besagt das Hamiltonsche Prinzip, dass

$$\text{(1)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \int\int do \left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \Phi^2\right] = \text{Minimum}.$$

Setzte man f als Funktion der Entfernung

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

allein an, so erhielte man, selbst wenn nach der Grundannahme w als oszillierend vorausgesetzt wird, für Φ, also für die poten-

tielle Energie keine oszillierende Funktion [1], sodass der Vorgang nicht von der gewünschten Art sein würde. Zu einem befriedigenden Ansatz führt dagegen folgende Ueberlegung: Wenn sich auf einer Geraden OX eine Reihe von Punkten nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, so ist ihr Potential

$$\sum \frac{m_i m_k}{|x_i - x_k|}.$$

In diese Formel gehen die *absoluten Beträge* $|x_i - x_k|$ der Entfernungen ein. Dasselbe nehmen wir hier an; man hat dann jedes Integral von der Form

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x')\psi(|x - x'|)\,dx'$$

zu zerlegen in

$$\int_\alpha^x \varphi(x')\psi(x - x')\,dx' + \int_x^\beta \varphi(x')\psi(x' - x)\,dx'.$$

x, y kommen dann auch in den Grenzen des Integrals vor, und Φ kann oszillierend werden.

Besonders naheliegend ist nun die Annahme, dass

$$f(|x - x'|, |y - y'|),$$

und somit die Elementarwirkung *einfach proportional* sei den Entfernungen $|x - x'|$, $|y - y'|$. Es sei also, unter ν eine Konstante verstanden,

$$\Phi = \int\int \nu |x - x'|\,|y - y'|\,\Delta w\,do' \quad (2). \tag{2}$$

---

(1) Denn wäre Φ oszillierend, so würden bei sehr grosser Anzahl der Knotenlinien die Perioden von Φ mit denen von w beliebig klein werden. Nun darf f von der willkürlichen Zahl (m, n) der Knotenlinien natürlich nicht abhängen. Differentiiert man beide Seiten von (a) nach x, so wird für grosse m, n, $\partial\Phi/\partial x$ unendlich gross gegen Φ; rechts aber hat man, *da die Grenzen bestimmt* sind, nur $\partial f/\partial x$ statt f zu setzen; die rechte Seite bleibt von derselben Grössenordnung, sobald f und $\partial f/\partial x$ stetig sind, oder die Funktion der Entfernung $\varphi(r)$ Singularitäten wie die in der Potentialtheorie auftretenden besitzt, sodass das Integral (a) einen Sinn hat. Man erkennt dies leicht durch Anwendung des Mittelwertsatzes.

(2) Die Elementarwirkung ist also proportional dem Inhalt eines Rechtecks $|x - x'|\,|y - y'|$.

Dann ist mit dieser Bedingung das Integral (1)

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int\int d\sigma \left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \Phi^2\right]$$

zum Minimum zu machen.

Vorerst aber eine Bemerkung. Soll diese Form des Hamiltonschen Prinzips anwendbar sein, so muss die *Ausstrahlung vernachlässigt werden dürfen, wenn es sich nur um die Berechnung der Lage der Spektrallinien handelt.* Die geringe Grösse der Dämpfung, die durch die hohen Gangunterschiede, bei denen noch Interferenzen erscheinen, einerseits, und durch die unveränderliche Lage der Spektrallinien bei sehr veränderlichen Intensitäten anderseits erwiesen ist, berechtigt wohl zu dieser Annahme. Umgekehrt scheinen erhöhte Dampfdichte und Temperatur, also Vergrösserung der äusseren Einwirkungen nur im Sinne einer Verbreiterung, nicht einer Verschiebung der Spektrallinien zu wirken [1].

Das aufgestellte Variationsproblem lässt sich nicht ohne weiteres nach Lagranges Methoden behandeln wegen des dabei auftretenden Integrals Φ. Durch ganz ähnliche Rechnungen, wie in den unten ausführlich behandelten Fällen, findet man die Hauptgleichung

$$\rho \frac{\partial^{10} w}{\partial t^2\, \partial x^4\, \partial y^4} + 32 c^2 \Delta\Delta w = 0$$

und die Randbedingungen

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} = 0,$$

unter n die Normale zur Begrenzungslinie des Quadrates verstanden. Als einzige Lösung ergibt sich

$$w = A \sin(\nu t - c) \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{a} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{a}.$$

Hier sind A, c willkürliche Konstanten, m, n ganze Zahlen, $2a$

[1] Hierüber vgl. H. Kayser, *Handbuch*, t. II, p. 297 ff. Jedenfalls ist die Verschiebung sehr klein gegen die Verbreiterung der Linie und kommt hier nicht in Betracht.

die Seitenlänge des Quadrates. Die Schwingungszahl ν ist gegeben durch

$$\pm\nu = N\left(\frac{1}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\right), \qquad \begin{array}{l} m = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \ldots \quad \infty, \\ n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \quad \ldots \quad \infty, \end{array}$$

worin

$$N = \sqrt{\frac{32}{9}\,\frac{a^2 c}{\pi^2}}$$

gesetzt ist.

Durch die oben gemachten einfachen Annahmen wird man also zu einer Formel geführt, die schon verschiedene wesentliche Eigenschaften der Wasserstoffformel

$$(a) \qquad \pm\nu = 109675{,}0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

aufweist: die Schwingungszahlen haben eine Grenze; aus der zunächst auftretenden *Formel für das Quadrat der Schwingungszahl lässt sich die Wurzel ausziehen* etc. Ein bemerkenswerter Unterschied bleibt im *Vorzeichen;* durch passende Aenderungen in den Grundannahmen kann man genau die Formel (a) erhalten; die vorhergehenden Erörterungen sollten die Berechtigung dieser neuen Annahmen, zu denen wir jetzt übergehen, erweisen. Dieselben würden, unvermittelt auftretend, recht willkürlich scheinen.

Die Balmersche Wasserstoffformel.

Durch die Symmetrie des Quadrates sind nicht nur die Richtungen der Seiten, sondern auch die Diagonalen ξ, η ausgezeichnet. Auf letztere als Koordinatenachsen bezogen, sind für die Deformation der Fläche in jedem Punkt charakteristisch die Koeffizienten $\partial^2 w/\partial\xi^2$, $\partial^2 w/\partial\eta^2$, $\partial^2 w/\partial\xi\,\partial\eta$ der Dupinschen Indicatrix in diesem Punkt (w als z-Koordinate aufgefasst). Letztere Grösse ist das Mass für die Abweichung der Ebene der zwei Hauptkrümmungslinien von den Richtungen der Diagonalen ξ, η. Ist $x' = \xi' + \eta'$, $y' = \xi' - \eta'$, so folgt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi'\,\partial\eta'} = \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2} \equiv \nabla' w.$$

Diesen Ausdruck werden wir als Mass der Deformation betrachten.

Ferner seien

$$X = |x - x'| - \frac{|x - x'|^2}{2a},$$

$$Y = |y - y'| - \frac{|y - y'|^2}{2a},$$

im folgenden vielfach auftretende Funktionen der absolut genommenen, parallel den Quadratseiten gemessenen Entfernungen je zweier Punkte x, y und x', y'; $2a$ sei die Seitenlänge des Quadrates. Die « Wirkung » Φ definieren wir durch

$$\Phi = c \int\int XY \nabla' w \, do' \tag{3}$$

(c ist eine Konstante). Die potentielle Energie sei wie oben Φ^2; dann *fordert das Hamiltonsche Prinzip*, dass

$$\int_{t_0}^{t_1}\int\int\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \Phi^2\right] do\, dt = \text{Minimum}.$$

Das Integral wird über die ganze Fläche erstreckt, do ist das Flächenelement. Um diese Variation ausführen zu können, zeigen wir zunächst, dass man die Grösse $\Phi = \Phi(x, y)$ *auch auffassen kann als abhängig vom Zustand im Punkte x, y allein*, d. h. dass man *die Integralgleichung* (3) *durch eine partielle Differentialgleichung ersetzen kann.*

Jedes Integral der Form

$$T = \int_{-a}^{-a} \varphi(x')\,|x - x'|\,dx'$$

muss wegen des auftretenden absoluten Betrages $|x - x'|$ zerlegt werden in

$$T = \int_{-a}^{x} (x - x')\varphi\, dx' - \int_{x}^{+a} (x' - x)\varphi\, dx'$$

$$= \int_{-a}^{x} (x - x')\varphi\, dx' + \int_{+a}^{x} (x - x')\varphi\, dx'$$

und es gilt

$$\frac{dT}{dx} = \int_{-a}^{x} \varphi(x')\,dx' + \int_{+a}^{x} \varphi(x')\,dx,$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 2\varphi(x).$$

Dagegen folgt aus $|x - x'|^2 \equiv (x - x')^2$, dass

$$H = \int_{-a}^{+a} \varphi(x')\,|x - x'|^2\,dx'$$

nicht zerlegt zu werden braucht; man findet

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = 2\int_{-a}^{+a} \varphi(x')\,dx'; \qquad \frac{d^3 H}{dx^3} = 0.$$

Je nach dem Vorzeichen von $x - x'$, $y - y'$, ist also das Integrationsgebiet von Φ in vier Teile zu zerlegen. Sei z. B. abkürzend

$$(x - x')(y - y')\nabla' w = \psi,$$
$$(x - x')^2(y - y')\nabla' w = \chi$$

gesetzt, so gilt

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} |x - x'|\,|y - y'|\,\nabla' w\,dx'\,dy'$$
$$= \int_{-a}^{x} dx' \int_{-a}^{y} \psi\,dy' + \int_{+a}^{x} dx' \int_{-a}^{y} \psi\,dy'$$
$$+ \int_{-a}^{x} dx' \int_{+a}^{y} \psi\,dy' + \int_{+a}^{x} dx' \int_{+a}^{y} \psi\,dy',$$

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} |x - x'|^2\,|y - y'|\,\nabla' w\,dx'\,dy'$$
$$= \int_{-a}^{+a} dx' \int_{-a}^{y} \chi\,dy' + \int_{-a}^{+a} dx' \int_{+a}^{y} \chi\,dy'.$$

Nach diesem Schema findet man, da

$$\nabla w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

gesetzt war,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\nu}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} = 4\nabla w &- \frac{2}{a}\int_{-a}^{+a}\left[\frac{\partial^2 w(x',y)}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 w(x',y)}{\partial y^2}\right]dx' \\ &- \frac{2}{a}\int_{-a}^{+a}\left[\frac{\partial^2 w(x,y')}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w(x,y')}{\partial y'^2}\right]dy' \\ &- \int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\frac{\nabla' w\,dx'\,dy'}{a^2}. \end{aligned}\right.$$

Bei der Variation entstehen im allgemeinen ein Flächen- und ein Randintegral, die einzeln verschwinden müssen. Um unnötige Rechnung zu ersparen setzen wir von vornherein solche *kinematischen Bedingungen* an, dass das Randintegral zu Null wird und zugleich die Lösung eindeutig bestimmt ist. Sie lauten, wenn wieder n die Normale zum Rand der Figur ist:

$$(5)\quad \overline{\frac{\partial w}{\partial n}} = 0, \qquad \int_{-a}^{+a} w(x,y)\,dx = 0, \qquad \int_{-a}^{+a} w(x,y)\,dx = 0.$$

Das Integral

$$\int_{-a}^{+a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y'^2}\right)dy' = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-a}^{+a} w\,dy' - \left(\frac{\partial w}{\partial y'}\right)_{y'=-a}^{y'=+a}$$

verschwindet vermöge (5), ebenso die anderen Integrale in (4); es bleibt also

$$(6)\quad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} = 4\nu\nabla w.$$

Die Definition von Φ durch (6) bestimmt diese Grösse nicht vollständig und ist daher, um mit (3) äquivalent zu sein, durch gewisse Bedingungsgleichungen zu vervollständigen, die wir unten benutzen werden und zuerst ableiten müssen. Durch Einführung des Wertes (6) von ∇w in (3) ergibt sich für jedes x und y identisch:

$$(7)\quad 4\Phi - \int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x'^2\,\partial y'^2}\mathrm{X}\mathrm{Y}\,do' = \int_{-a}^{+a}\mathrm{Y}\,dy'\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial y'^2},$$

wo

$$\zeta = \int_{-a}^{+a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}\mathrm{X}\,dx'.$$

Durch Ausführung der Integration ergibt sich

$$\begin{aligned}\zeta(x, y) = \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=-a} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=+a}\right] \\ - \frac{x}{a}\left[\Phi(+a, y) - \Phi(-a, y)\right] - 2\Phi(x, y) - \int_{-a}^{+a}\frac{\Phi\, dx'}{a},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\Phi(x, y) = \left(\frac{y^2}{2a} - \frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=-a} - \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{y=+a}\right] \\ - \frac{y}{a}\left[\zeta(x, +a) - \zeta(x, -a)\right] + 2\zeta(x, y) - \int_{-a}^{+a}\frac{\zeta\, dy'}{a}.\end{aligned}$$

Führt man ζ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so wird die rechte Seite, abgesehen von den Gliedern

$$\begin{aligned}2\left(\frac{y^2}{2a} - \frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=-a} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=+a}\right] \\ - \frac{2y}{a}\left[\Phi(x, a) - \Phi(x, -a)\right] - 4\Phi(x, y) - 2\int_{-a}^{+a}\frac{\Phi\, dy'}{a}\end{aligned}$$

ein Polynom zweiten Grades in Bezug auf x. Ist Φ, wie wir annehmen werden, kein solches Polynom, so müssen wegen des identischen Bestehens der Gleichung die angegebenen Glieder sich gegen $4\Phi(x, y)$ auf der linken Seite der Gleichung aufheben, und zwar für jedes y. Es folgen somit die Bedingungen :

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=-a} - \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=+a} = 0, \qquad \Phi(x, +a) - \Phi(x, -a) = 0, \\ \displaystyle\int_{-a}^{+a}\Phi\, dy' = 0 \qquad \text{für jedes } x; \\ \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=+a} - \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=-a} = 0, \qquad \Phi(+a, y) - \Phi(-a, y) = 0, \\ \displaystyle\int_{-a}^{+a}\Phi\, dx' = 0 \qquad \text{für jedes } y. \end{cases}$$

(Das zweite System folgt ebenso wie das erste.)

Nun ist die Gleichung (7) identisch erfüllt : *die Gleichungen* (6) *und* (8) *sind zusammen äquivalent mit* (5).

Die leicht in Worte zu fassenden Bedingungen (8) bestimmen also das Verhalten von Φ und seiner Ableitung nach der Normale in einander gegenüberliegenden Punkten der Ränder; ausserdem

verschwindet nach (8) der Mittelwert von Φ auf Parallelen zu den Seiten, wie schon für w der Fall war.

Wir führen nun eine Hülfsgrösse ψ ein durch die Beziehungen

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\, \partial y^2} = 4\Phi, \qquad \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial n} = 0. \tag{9}$$

Diesen Gleichungen genügt unter anderem der Ansatz

$$\frac{\psi}{4} = \int_{-a}^{x}\int_{-a}^{x}\int_{-a}^{y}\int_{-a}^{y} \Phi\, dx^2\, dy^2,$$

denn es ist z. B.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=+a} = \int_{-a}^{y}\int_{-a}^{y} dy^2 \int_{-a}^{+a} \Phi\, dx = 0 \qquad \text{wegen (8).}$$

Damit ist gezeigt, dass (9) keinen Widerspruch involviert.

Auf Grund dieser vorbereitenden Sätze lässt sich nunmehr die Variation des über die ganze Fläche zu erstreckenden Hamiltonschen Integrals

$$\int_{t_0}^{t_1}\int\int\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \Phi^2\right] do\, dt = \text{Minimum}$$

ausführen. Für die Zeitpunkte t_0, t_1 sind dabei bekanntlich die Zustände als gegeben zu betrachten, sodass δw hier verschwindet. Es ist also

$$\int_{t_0}^{t_1}\int\int\left(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w - 2\Phi\,\delta\Phi\right) do\, dt = 0,$$

oder wegen (9)

$$\int_{t_0}^{t_1}\int\int\left(\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,\delta w - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\,\partial y^2}\,\delta\Phi\right) do\, dt = 0.$$

Das letzte Glied lässt sich, abgesehen von hinzutretenden Randintegralen, in

$$\int\int\int\frac{\psi}{2}\,\frac{\partial^4\,\delta\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2}\, do\, dt$$

umformen, und da nach (6)

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} = 4c\,\nabla w$$

ist, in

$$2v\int\!\!\int\!\!\int \nabla\psi\,\delta w\,do\,dt,$$

Man erhält schliesslich als *Hauptgleichung*

$$\text{(I)}\qquad \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\nabla\psi = 0.$$

Wegen (6) und (9) folgt hieraus die Differentialgleichung

$$\text{(II)}\qquad \rho\frac{\partial^{10} w}{\partial t^2\,\partial x^4\,\partial y^4} + 32v^2\nabla\nabla w = 0.$$

Danach *ist* $2v\nabla\psi$ *die auf jeden Punkt wirkende Kraft.*

Die von der partiellen Integration herrührenden Randintegrale sind

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\int_{-a}^{+a} dy\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y^2}\delta\Phi - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{\partial\,\delta\Phi}{\partial x} + 2v\psi\frac{\partial\,\delta w}{\partial x} - 2v\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta w\right)_{x=-a}^{x=+a}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} dt\int_{-a}^{+a} dx\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\,\delta\Phi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\psi\frac{\partial^3\,\delta\Phi}{\partial x^2\,\partial y} - 2v\psi\frac{\partial\,\delta w}{\partial y} + 2v\frac{\partial\psi}{\partial y}\delta w\right)_{y=-a}^{y=+a}.$$

Führt man die äussere Normale n zur Randlinie s ein und formt die Glieder

$$\int_{-a}^{+a} dy\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial y^2}\delta\Phi - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\frac{\partial\,\delta\Phi}{\partial x}\right)$$

durch partielle Integration längs der Randlinie um in

$$\int_{-a}^{+a} dy\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\,\delta\Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\psi\frac{\partial^3\,\delta\Phi}{\partial x\,\partial y^2}\right)$$

(es treten noch gewisse, an den vier Ecken zu bildende Ausdrücke hinzu), so kann man die Integration über den ganzen Rand erstrecken und erhält als zweite Bedingung

$$\pm\int_{t_0}^{t_1} dt\int ds\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}\frac{\partial^2\,\overline{\delta\Phi}}{\partial s^2} - \frac{1}{2}\overline{\psi}\frac{\partial^3\,\overline{\delta\Phi}}{\partial s^2\,\partial n} \mp 2v\left(\overline{\psi}\frac{\overline{\partial\,\delta w}}{\partial n} - \frac{\overline{\partial\psi}}{\partial n}\overline{\delta w}\right)\right] = 0.$$

Das Vorzeichen $\pm$ des ganzen Integrals würde, bei allgemeinerer

Begrenzung des Bereiches, durch gewisse, die Grössen $\cos n, x$, $\cos n, y$ enthaltende Ausdrücke zu ersetzen sein. Die Dissymmetrie des Ausdruckes $\partial^2 w / \partial x^2 - \partial^2 w / \partial y^2$ macht sich in den auf den vier Seiten des Quadrates verschiedenen Vorzeichen ($\pm$) innerhalb der Klammer bemerkbar. Wir beweisen nun, dass vermöge der Bedingungsgleichungen (5), nämlich

$$\frac{\overline{\partial w}}{\partial n} = 0; \qquad \int_{-a}^{+a} w\, dx = 0; \qquad \int_{-a}^{+a} w\, dy = 0$$

das Randintegral verschwindet. Diese Bedingungen erweisen sich dann als *hinreichend; notwendige* Randbedingungen lassen sich in diesem Fall aus dem Verschwinden der Variation überhaupt nicht gewinnen, da z. B. das Glied $\overline{\partial\psi}/\partial n\, \partial^2 \overline{\delta\Phi}/\partial s^2$ sowohl für $\overline{\partial\psi}/\partial n = 0$, als auch für $\partial^2 \overline{\Phi}/\partial s^2 = 0$, also $\partial^2 \overline{\delta\Phi}/\partial s^2 = 0$ verschwindet. Dass diese Bedingungen auf eine und nur eine Lösung führen, soll unten gezeigt werden. Nun haben wir nach (5) und (9)

$$\frac{\overline{\partial w}}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\overline{\partial \psi}}{\partial n} = 0, \qquad \text{also} \qquad \frac{\overline{\partial\, \delta w}}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\overline{\partial\, \delta\psi}}{\partial n} = 0.$$

Dann folgt aus (I)

$$0 = \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x\, \partial y^2} \right)_{x = \pm a}.$$

Da

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x = \pm a} = 0$$

für jedes y, so ist also

$$\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right)_{x = \pm a} = 0,$$

und

$$\left(\frac{\partial^5 \psi}{\partial x^3\, \partial y^2} \right)_{x = \pm a} = 0 = 4 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x = \pm a}$$

und ebenso

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y = \pm a} = 0,$$

also allgemein

$$\frac{\overline{\partial \Phi}}{\partial n} = 0.$$

Die Glieder des *Randintegrals verschwinden sämtlich*, ebenso die an den Ecken des Quadrates zu bildenden Ausdrücke, wie zu beweisen war.

Energiegleichung.

Entsprechend den Voraussetzungen, unter denen oben das Hamiltonsche Prinzip angewendet wurde (keine Energieabgabe nach aussen, d. h. keine Ausstrahlung etc.), muss das ***Prinzip der Erhaltung der Energie*** sich als Folge von (I) und (5) in der Form ergeben

$$\int\int\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \Phi^2\right] do = \text{konst.}(t).$$

Die Integration ist über die ganze Fläche des Quadrates zu erstrecken. Aus (I) folgt nun in der Tat durch Multiplikation mit $\partial w/\partial t \, dx \, dy$ und Integration :

$$\int\int\left(\rho\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c\frac{\partial w}{\partial t}\nabla\psi\right) do = 0.$$

Das erste Glied ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 do.$$

Das zweite Glied geht durch partielle Integration über in :

$$\int\int 2c\psi\nabla\frac{\partial w}{\partial t} do = \int\int\frac{1}{2}\psi\frac{\partial^5\Phi}{\partial t\,\partial x^2\,\partial y^2} do \qquad \text{nach (9);}$$

die bei diesen Transformationen auftretenden Randintegrale verschwinden wegen der Randbedingungen $\overline{\partial w}/\partial n = 0$ etc., aus welchen u. a. folgt $\overline{\partial^2 w}/\partial n\,\partial s = 0$, etc. Da nun aber nach (9)

$$\frac{1}{2}\int\int\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\,\partial y^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} do = \int\int 2\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

so bleibt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \Phi^2\right] do = 0, \tag{10}$$

wie zu beweisen war.

Führt man

$$\sqrt{\frac{\varsigma}{2}}\,\frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{A}, \qquad \Phi = \mathrm{B}$$

als zwei den Zustand beschreibende Grössen ein, so ist die *Analogie des hier aufgestellten Energieausdruckes*

$$\int\int (\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)\, do$$

mit dem für die elektromagnetische Energie des Äthers gültigen auffallend.

Eindeutigkeit der Lösung.

Die weitgehende Analogie der für unser schwingendes System gültigen Gesetze mit den in der Mechanik der Continua bis jetzt aufgetretenen zeigt sich auch im Umstande, dass aus dem Prinzip der Energie auch hier die Eindeutigkeit der Lösung sich sofort ergibt. Denn sei w_1 die Differenz zweier Lösungen, die für $t = 0$ demselben *Anfangszustand entsprechen*, sodass

$$(w_1)_{t=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

auf der ganzen Fläche, also auch $(\nabla w_1)_{t=0} = 0$, so gibt (3)

$$(\Phi_1)_{t=0} = 0.$$

Nun ist w_1 wegen des linearen Charakters aller Relationen ebenfalls eine Lösung; die Energiegleichung (10), von 0 bis t integriert, ergibt für dieselbe

$$\int\int \left[\frac{\varsigma}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)^2 - \Phi_1^2\right] do = 0,$$

für jedes t, somit einzeln

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = 0, \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \text{also} \qquad w_1 = \text{konst.} = 0 \qquad \text{wegen} \qquad (w_1)_{t=0} = 0.$$

Die hier noch einmal zusammengestellten Gleichungen unseres

Problems

$$
(\mathrm{I}a)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2c\,\nabla\psi=0;\qquad \nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial y};\\
&\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\,\partial y^2}=4\Phi;\\
&\Phi=c\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\nabla w\left(|x-x'|-\frac{|x-x'|^2}{2a}\right)\left(|y-y'|-\frac{|y-y'|^2}{2a}\right)do,\\
&\overline{\frac{\partial w}{\partial n}}=0;\qquad \int_{-a}^{+a}w\,dx=0;\qquad \int_{-a}^{+a}w\,dy=0,\qquad \overline{\frac{\partial\psi}{\partial n}}=0
\end{aligned}\right.
$$

bestimmen also die Lösung bei gegebenem Anfangszustand vollständig. Dass dieses System, wie sich zeigt, wirklich eine Lösung besitzt, also keine Widersprüche involviert, ist schon nach der Ableitung aus dem Hamiltonschen Prinzip zu erwarten.

Sucht man die Lösungen dieser Gleichungen, welche Eigenschwingungen (¹) entsprechen, also von der Form

$$w=\sin(\nu t+c)\,\varphi(x,y)$$

sind, so ergibt der Ansatz trigonometrischer Funktionen die Formel

$$(11)\qquad w=A\sin(\nu t+c)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}.$$

Dabei sind A, c willkürliche Konstanten; m, n ganze Zahlen, $2a$, wie stets, die Seitenlänge des Quadrates. Dass diese Funktion das System (Ia) befriedigt, ergibt sich leicht durch Einsetzen, wenn man bei der Ausrechnung von Φ die bekannten Formeln benutzt:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+\text{konst.},$$

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+\text{konst.},$$

aus welchen sich ergibt, wenn man das Integrationsgebiet in

(¹) Dass auch die unten angegebenen Eigenschwingungen die einzigen sind, folgt durch eine ähnliche Anwendung Fourierscher Reihen, wie sie (p. 43) be einem anderen Beispiel gegeben ist.

$-a \ldots x$; $+a \ldots x$, wie früher erörtert, zerlegt :

$$(12)\qquad \int_{-a}^{+a} \cos\frac{m\pi x'}{a}\left(|x-x'| - \frac{|x-x'|^2}{2a}\right)dx' = \frac{-2a^2}{m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}.$$

Da

$$\nabla w = A\frac{\pi^2}{a^2}(n^2-m^2)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}\sin(\nu t - c),$$

so ist

$$\Phi = 4cA\sin(\nu t + c)\frac{(n^2-m^2)}{n^2m^2}\frac{a^2}{\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} = 4c\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\frac{a^2}{\pi^2}w.$$

Die Funktion ψ ergibt sich aus (9) zu

$$\frac{\psi}{4} = \frac{4ca^6}{m^2n^2\pi^4}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)w - y\alpha(x) - x\beta(y) - \gamma(x) + \delta(y),$$

worin α, β, γ, δ willkürliche Funktionen sind. Wegen $\overline{\partial\psi/\partial n} = 0$ ist nun

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{x=\pm a} = 0 = y\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)_{+a} - \beta(y) - \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)_{-a}.$$

Es ist also $\beta(y)$ von der Form

$$\beta(y) = a_0 + a_1 y,$$

und ebenso

$$\gamma(x) = b_0 + b_1 x,$$

wo die a, b Konstanten sind. Die Bedingung $\overline{\partial\psi/\partial n} = 0$ fordert $a_1 = -b_1$, und der Ausdruck für ψ wird, unter $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ willkürliche, nur an die Bedingung

$$(13)\qquad \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)_{x=\pm a} = 0, \qquad \left(\frac{d\varphi_2}{dy}\right)_{y=\pm a} = 0$$

geknüpfte Funktionen verstanden :

$$\frac{\psi}{4} = \frac{4ca^6}{m^2n^2\pi^6}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)w - \varphi_1(x) - \psi_1(y).$$

Setzt man die Ausdrücke für w und ψ in die Grundgleichung ein

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2c\nabla\psi = 0,$$

so findet man schliesslich

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2\varphi_2}{dy^2} = 0,$$

oder nach (13) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, und es ergibt sich für die Schwingungszahl ν

$$\rho\nu^2 - 2c^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)^2 \frac{16a^4}{\pi^4} = 0,$$

oder wenn

$$N = \sqrt{\frac{32}{\rho}}\, c\, \frac{a^2}{\pi^2},$$

eine Konstante bezeichnet:

$$\pm\nu = N\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad \begin{matrix} m = \pm 1, & \pm 2, & \pm 3, & \ldots \infty, \\ n = \pm 1, & \pm 2, & \pm 3, & \ldots \infty. \end{matrix}$$

Die Schwingungszahlen des Systems sind durch die verallgemeinerte Balmersche Formel gegeben. Für $n = 2$, $m = 3$, $4, \ldots, 32$ ergibt sich die bekannte Wasserstoffserie. Positive und negative Werte der Schwingungs- und Ordnungzahlen haben dieselbe physikalische Bedeutung.

Nimmt man die Å.-Einheit (10^{-8} cm) als Längeneinheit, so ist

$$109675{,}0 = \sqrt{\frac{32}{\rho}}\, \frac{ca^2}{5{,}996 \cdot 10^{19}}.$$

Die *Knotenlinien* der durch (11) dargestellten Bewegung zeigen auffallende Eigentümlichkeiten. Für eine Eigenschwingung, für welche $m = n$ ist, d. h. wenn auf den vier Seiten gleich viele Knotenpunkte liegen, ist $\nu = 0$, somit $w =$ konst. (t), solche Eigenschwingungen sind *unmöglich*. Sobald $m \lessgtr n$ ist, haben wir dagegen Doppelschwingungen, da die Vertauschung von m mit n die Formeln nicht ändert; es ist dann, wenn A, B Konstanten sind

$$w = \sin(\nu t + c)\left(A \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a} + B \cos\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{m\pi y}{a}\right)$$

das System dieser Schwingungen; die Knotenlinien zeigen die bekannten Figuren. Um zu entscheiden, ob auch mehrfache Schwingungen höherer Ordnung möglich sind, hat man eine diophantische Gleichung 4ten Grades zu behandeln.

Aus den gefundenen Ausdrücken für ψ und Φ und Formel (12)

ergibt sich

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a}\cos\frac{m\pi x'}{a}\cos\frac{n\pi y'}{a}\left(|x-x'|-\frac{|x-x'|^2}{a}\right)$$
$$\times\left(|y-y'|-\frac{|y-y'|^2}{2a}\right)do'=\frac{4a^4}{m^2n^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}.$$

Ist, wie früher

$$X=|x-x'|-\frac{|x-x'|^2}{2a},$$

und analog Y, und berücksichtigt man die für Φ, ψ p. 36 gefundenen Ausdrücke, so lässt sich die eben gefundene Formel schreiben :

$$\psi=\int\int\Phi XY\,do'.$$

Es folgt weiter (unter Voraussetzung der gefundenen Lösung)

$$c\nabla\psi=c\int\int\nabla\Phi XY\,do'.$$

Die Grundgleichung lässt sich daher infolge der übrigen Bedingungen schreiben :

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2K=0,\qquad K=c\int\int\nabla\Phi XY\,do',\qquad \Phi=c\int\int\nabla w XY\,do'$$

und *es ist* 2K *die auf den Punkt* (x, y) *ausgeübte Kraft*; sie steht mit den Werten von Φ auf der ganzen Fläche in derselben Weise durch Fernwirkung im Zusammenhang, wie Φ mit w.

Es legt dies den Gedanken nahe Φ als zweite, den Zustand beschreibende Grösse einzuführen, wie schon bei der Energiegleichung bemerkt wurde. Man wird zu einem unten zu behandelnden, sehr symmetrischen Gleichungssystem geführt.

Weitere Auffassungen der Grundgleichung.

Bemerkenswerte Transformationen der Grundgleichung ergeben sich, wenn man die, durch direkte Rechnung zu beweisende Formel

$$\int_{-a}^{+a}\cos\frac{m\pi x'}{a}X^2\,dx'=\frac{12a^4}{m^4\pi^4}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

benutzt. Es genügt w nämlich den Gleichungen

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2}{9} c^2 \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} w X^2 \nabla\nabla Y^2 \, do' = 0,$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 c^2 \nabla \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \nabla w X^2 Y^2 \, do' = 0 \quad [1],$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \nabla\nabla \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} w X^2 Y^2 \, do' = 0.$$

Diese Formen sind alle geeignet, die Hauptgleichung vollständig zu ersetzen. Zusammen mit den für w geltenden Bedingungen bestimmen sie eine und nur eine Lösung, wie man wieder durch die unten zu besprechende Anwendung trigonometrischer Reihen beweist. Sie können dazu dienen, eine physikalische Deutung der zu Grunde liegenden mathematischen Sätze zu erleichtern. Die letzte könnte man etwa folgendermassen plausibel machen :

Die Fläche des Quadrates trenne zwei Medien, deren transversale Verschiebungen w und W sein mögen. Die beiden Medien seien durch Fernwirkung miteinander verknüpft, sodass zwischen w und W die kinematische Bedingung besteht

$$W = \int\int w X^2 Y^2 \, do'.$$

Ausserdem soll die auf jeden Punkt des ersten Mediums wirkende Kraft durch die in seiner unmittelbaren Nähe stattfindende Deformation des zweiten bestimmt sein, sodass wie bei den transversal schwingenden Platten der Ausdruck der Kraft sich ergebe proportional zu $\Delta\Delta W$:

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

---

(1) Der Ansatz für die potentielle Energie

$$c^2 \nabla w \int\int \Delta w X^2 Y^2 \, do'$$

führt, bei geeigneten Randbedingungen, zu dieser Formel als Hauptgleichung. Dieser Ausdruck hat die Form eines Selbstpotentials.

Dann ist also

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \Delta\Delta W = 0.$$

Man erhält bis auf ein Vorzeichen die oben besprochene Gleichung; aber entsprechend der nun angenommenen Isotropie werden die Schwingungszahlen des Systems proportional

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \quad \text{statt} \quad \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}.$$

Auch hier muss also die Platte anisotrop angenommen werden.

Auf etwas anderer Grundlage und mit weniger Rechnung erhält man ebenfalls die Balmersche Formel, wenn man die « Wirkung » Φ zunächst durch die, eine Kontaktwirkung ausdrückende

---

Note marginale manuscrite de Ritz :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4\pi w = \nabla' \nabla' \Phi, \qquad \text{wo} \qquad \nabla' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Hierzu noch eine Randbedingung, etwa $\overline{\Phi} = 0$: dann ist Φ bei gegebenem w bestimmt, denn eine etwa hinzutretende Funktion φ genügt den Gleichungen

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \qquad \overline{\varphi} = 0;$$

also

$$\varphi = \alpha(x) y + \beta(y) x + \gamma(x) + \delta(y);$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_{x = \pm a} = 0, \qquad \pm \alpha\beta'' + \delta'' = 0, \qquad \beta'' = 0, \qquad \delta'' = 0,$$

also α, β, γ, δ linear;

$$= axy + bx + cy + d;$$

und für

$$x = \pm a,$$

zeigt sich

$$a = b = c = d = 0.$$

Analogie zu der Art wie H.-A. Lorentz das Hamiltonsche Integral für Elektronen ansetzt und variiert. Für zwei Komponenten eines Vektors U, V, ähnliches; nimmt man hier als Hülfsvectoren φ_1, φ_2, sodass $\nabla' \varphi_1 = \varepsilon U$; $\nabla' \varphi_2 = \varepsilon \nabla$, so entsteht genaue Analogie.

Gleichung

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\, \partial y^2} = 4 e w, \tag{14}$$

definiert, die erst nachträglich durch Fernwirkung zu erklären sein wird. Das Hamiltonsche Integral sei, unter

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi\, \partial \eta}$$

die frühere Operation verstanden

$$\int_{t_0}^{t_1} \int \int do \left[\frac{\varrho}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \Phi)^2 \right] dt = \text{Minimum}.$$

Hierin führe man w aus (14) ein; die Variation ist sofort ausführbar und gibt

$$\varrho \frac{\partial^{10} \Phi}{\partial t^2\, \partial x^4\, \partial y^4} + 32 e^2 \nabla \nabla \Phi = 0,$$

also für Φ die Grundgleichung (II), die früher für w erhalten war. Das Randintegral wird

$$\begin{aligned} 0 = \pm \int_{t_0}^{t_1} dt \int ds \Bigg[\overline{\delta \Phi} \Bigg(\frac{\varrho}{16} e^2 \frac{\overline{\partial^9 \Phi}}{\partial n^3\, \partial s^4\, \partial t^2} + 2 \frac{\overline{\partial^3 \Phi}}{\partial n^3} - 2 \frac{\overline{\partial^3 \Phi}}{\partial s^2\, \partial n} \Bigg) \\ + \frac{\partial \overline{\delta \Phi}}{\partial n} \Bigg(- \frac{\varrho}{16 e^2} \frac{\overline{\partial^8 \Phi}}{\partial n^2\, \partial s^4\, \partial t^2} - 2 \frac{\overline{\partial^2 \Phi}}{\partial n^2} - 2 \frac{\overline{\partial^2 \Phi}}{\partial s^2} \Bigg) \Bigg]. \end{aligned}$$

Wir setzen am Rande

$$\overline{\Phi} = 0, \qquad \frac{\overline{\partial^2 \Phi}}{\partial n^2} = 0, \qquad \text{also} \qquad \overline{w} = 0 \qquad \text{nach (14)},$$

d. h. wir halten den Rand fest.

Die sogleich abzuleitende Energiegleichung ist für den Beweis der Eindeutigkeit hier unbrauchbar, da bei gegebenen $(w)_{t=0}$, $(\partial w/\partial t)_{t=0}$ die Grössen $(\Phi)_{t=0}$, $(\partial \Phi/\partial t)_{t=0}$ aus (14) noch nicht ganz bestimmt sind. In der Tat ist auch die Lösung erst eindeutig bestimmt, und zwar ist sie

$$w = A \sin(\nu t + c) \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{a},$$

$$\pm \nu = \sqrt{\frac{32}{\varrho} \frac{e a^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)},$$

wenn man (14) durch *Fernwirkung* erklärt, d. h. durch

$$(15) \quad \Phi = c \int\int w(x', y')\left(|x - x'| - \frac{|x - x'|^2}{2a}\right)\left(|y - y'| - \frac{|y - y'|^2}{a}\right) do$$

ersetzt. Nun ist Φ für den Anfangszustand bestimmt, die Eindeutigkeit folgt wie früher.

Nach einem p. 29 abgeleiteten Resultat gilt der Satz:

Die Integralgleichung (15) *ist äquivalent der Differentialgleichung* (14) *mit den Randbedingungen*

$$\overline{\Phi} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=+a} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=-a} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=+a} - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=-a} = 0,$$

$$\int_{-a}^{+a} \Phi(x', y)\, dx' = 0, \qquad \int_{-a}^{+a} \Phi(x, y')\, dy' = 0.$$

Für ungerade Funktionen Φ sind die Zusatzbedingungen identisch erfüllt.

Der Satz lässt sich auch umkehren.

Ganz ähnlich kann man auch von

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\, \partial y^2} = 4c\, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi\, \partial \eta}$$

ausgehend, statt von der Integraldarstellung, den ersten Ansatz (p. 26ff.) entwickeln. *In allen Fällen gelangt man für die Wellenzahlen zur Balmerschen Formel.* Durch Multiplikation der Grundgleichung mit $(\partial\Phi/\partial t)\, do$ und Integration über irgend ein Bereich erhält man nach einigen Transformationen den Satz:

Die zeitliche Aenderung der Energie eines Flächenstückes, also

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\left[\frac{c}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \Phi^2\right] do,$$

drückt sich aus durch ein Randintegral über dessen Begrenzung. Die Energie des gesamten Systems bleibt erhalten.

Nicht wesentlich verschieden von den bisher betrachteten Ansätzen verhält sich der Fall, wo man Verschiebungen der Platte in

ihrer Ebene voraussetzt, und dementsprechend zwei Komponenten u, v einer in der Plattenebene liegenden gerichteten Grösse einführt. Ich halte mich dabei nicht auf und gebe im *folgenden eine nicht auf dem Hamiltonschen Prinzip beruhende Auffassung der Vorgänge, die sich aber in ihrer symmetrischen Form den Maxwellschen Gleichungen sehr nähert.*

Seien u, v zwei Grössen, die in jedem Punkt den Zustand des schwingenden Quadrates beschreiben, etwa die Verschiebungen zweier sich in diesem Quadrat berührenden Medien, senkrecht zu dessen Ebene. Die Bezeichnungen ∇, X, Y behalten ihre frühere Bedeutung. Die Gleichungen der Bewegung seien nun

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \varepsilon \int\int \nabla \mathrm{VXY}\, do', \qquad -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = \varepsilon \int\int \nabla \mathrm{UXY}\, do',$$

am Rande sei

$$\text{(IIIa)} \qquad \overline{\mathrm{U}} = 0, \qquad \overline{\mathrm{V}} = 0.$$

Zur Integration dieser, wie sich ergeben wird, den Vorgang bei gegebenem Anfangszustand eindeutig bestimmenden Gleichungen sei

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1(x, y)\sin\nu t, \qquad \mathrm{V} = \mathrm{V}_1(x, y)\cos\nu t$$

gesetzt; es wird (III):

$$\text{(16)} \qquad \nu \mathrm{U}_1 = \varepsilon \int\int \nabla \mathrm{V}_1 \mathrm{XY}\, do', \qquad \nu \mathrm{V}_2 = \varepsilon \int\int \nabla \mathrm{U}_1 \mathrm{XY}\, do'.$$

Addiert und subtrahiert man diese zwei Gleichungen, so findet man, dass $\mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1$, $\mathrm{U}_1 - \mathrm{V}_1$ Lösungen sind von

$$\text{(17)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \nu w = \varepsilon \displaystyle\int\int \nabla w\,.\mathrm{XY}\, do', \\ w = 0 \qquad \text{am Rande.} \end{array} \right.$$

Der Ansatz trigonometrischer Funktionen führt auf

$$w = \mathrm{A}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}, \qquad \nu = 4\varepsilon\frac{a^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\mathrm{U} = \mathrm{B}\sin(\nu t - c)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a},$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{B}\cos(\nu t - c)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a},$$

wo A, B, c willkürliche Konstanten bedeuten.

Es ist dies auch die einzige, Eigenschwingungen entsprechende Lösung, und der Beweis dieses Satzes, der mit wenigen Änderungen auf die übrigen schon behandelten Fälle sich ausdehnt, soll kurz dargelegt werden, da die Entwicklungen sich hier am übersichtlichsten gestalten.

Eindeutigkeit der Lösung.

Wir wählen die Längeneinheit so, dass die Seite des Quadrates 2π werde. Da nur Lösungen in Betracht kommen, die innerhalb der ganzen Quadratfläche stetig und endlich bleiben, so kann man für dies Gebiet w in eine konvergente trigonometrische Reihe

$$
\begin{aligned}
w = \sum_{m,n} A_{mn} \cos mx \cos ny &+ B_{mn} \cos mx \sin ny \\
&+ C_{mn} \sin mx \cos ny \\
&+ D_{mn} \sin mx \sin ny = \sum_{m,n} w_{mn}
\end{aligned}
$$

entwickeln; da am Rande $w = 0$ ist, so bleiben nach einem bekannten Satz [1] die Grössen $A_{mn} m^2 n^2$ etc. bei wachsenden m, n endlich, die Reihe konvergiert wie $\sum_{m,n} 1/m^2 n^2$, also absolut und gleichmässig, und darf daher gliedweise integriert werden.

In der Gleichung (17) kann man aber offenbar durch partielle Integration alle Differentialquotienten zum Verschwinden bringen bis auf Glieder der Form

$$
\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=\pm\pi}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm\pi},
$$

die nur von x bez. y noch abhängen; die Entwickelungen derselben in Fouriersche Reihen konvergieren wieder absolut und gleichmässig; denn auf den Rändern $x = \pm\pi$ ist für jedes y $w = 0$, also $\partial w/\partial y = 0$; dies gilt auch an den Ecken. Die Funktion

$$
\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pi} = \varphi(x)
$$

---

(1) Vgl. RIEMANN-WEBER, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, t. I, Braunschweig 1900, p. 78.

gibt also an den Ecken $\varphi(\pm\pi) = 0$, der Hülfssatz lässt sich auch hier anwenden. Auch diese Entwickelungen dürfen gliedweise integriert werden, und so ergibt sich durch Ausführung der Integrationen in (17):

$$0 = \sum_{m=1,\, n=1}^{\infty} w_{mn}\left(\nu - 4\varepsilon\,\frac{m^2 - n^2}{m^2 n^2}\right)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\left(\nu - \frac{4\pi^2}{3n^2}\right)(A_{no}\cos n x - A_{on}\cos n y$$

$$- B_{on}\sin n y - C_{no}\sin n x) + \nu A_{oo}.$$

denn es ist

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left[(y - y') - \frac{|y - y'|^2}{2\pi}\right] dy' = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Wenn kein « mehrfacher » Ton vorliegt, so ergibt das Nullsetzen der Koeffizienten für das Glied $(m_0 n_0)$ bez. (n_0)

$$-\nu = 4\varepsilon\,\frac{m_0^2 - n_0^2}{m_0^2 n_0^2} \qquad \text{bez.} \qquad \nu = \frac{4\pi^2}{3 n_0^2},$$

und die Reihe reduziert sich auf das eine Glied $w_{m_0 n_0}$, die übrigen Koeffizienten müssen verschwinden.

Da nun $w = 0$ am Rande sein soll, so bleibt von den Gliedern in $w_{m_0 n_0}$ nur $D_{m_0 n_0} \sin m_0 x \sin n_0 y$, die A_{no} etc. verschwinden ebenfalls, wie zu beweisen war.

Die allgemeinste Lösung der Gleichungen bei *beliebigen Anfangsbedingungen* stellt sich vermöge der Natur der partikulären Integrale in diesem wie in allen behandelten Fällen dar als eine *Superposition von Eigenschwingungen* nach der Fourierschen Formel, also

$$U = \sum A_{mn} \sin(\nu_{m,n} t + c_{mn}) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a},$$

$$V = \sum A_{mn} \cos(\nu_{m,n} t + c_{mn}) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}.$$

Damit hängen zusammen, wie man aus obiger Darstellung von U und V entnimmt, dass die Energie des Systems

$$\iint (U^2 + V^2)\, do$$

erhalten bleibt. Die Aehnlichkeit mit dem elektromagnetischen Energieausdruck ist auffallend.

Das Wasserstoffspektrum von ζ Puppis.

Nach Analogie der bisherigen Entwickelungen findet man sofort eine ganze Reihe von Ansätzen, die auf die bisher nur astronomisch beobachtete Hauptserie und die zweite Nebenserie von Wasserstoff, also auf die Formel führen

$$\pm\nu = N\left(\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{18}$$

Es sei wieder

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} = 4cw \tag{19}$$

und

$$\int\int\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2 do$$

die potentielle Energie. Das Hamiltonsche Prinzip schreibt sich wieder

$$\int_{t_0}^{t_1}\int\int do\left[\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2\right] = \text{Minimum}.$$

Die Hauptgleichung (I)

$$\rho\frac{\partial^{10} w}{\partial t^2\,\partial x^4\,\partial y^4} - 32c^2\,\nabla\nabla w = 0$$

und das Randintegral folgen wie auf p. 40. Wir entnehmen aus letzterem die Bedingungen

$$\overline{\frac{\partial\Phi}{\partial n}} = 0, \qquad \overline{\frac{\partial^3\Phi}{\partial n^3}} = 0 \qquad \text{also} \qquad \overline{\frac{\partial w}{\partial n}} = 0.$$

Entsprechend der Dissymmetrie der Gleichung (7) sei jetzt der Ansatz (19) für Φ durch Fernwirkung erklärt nach der Formel

$$\Phi = c\int\int w.|x-x'|\left(|y-y'| - \frac{|y-y'|^2}{2a}\right)dx'\,dy'.$$

Das Gesetz der Fernwirkung ist demnach *nicht dasselbe wie*

früher; es gelang mir nicht, in einwandsfreier Weise diesen etwas unbefriedigenden Umstand zu vermeiden. Die *Hauptgleichung* dagegen ist *unverändert* geblieben.

Setzt man hierin, wie oben, w aus (19) ein, integriert partiell und beachtet die Randbedingungen, so erhält man wie p. 29 die durch die Fernwirkung bedingten neuen Gleichungen

$$\Phi(x, +a) = \Phi(x, -a),$$

$$\int_{-a}^{+a} \Phi(x, y')\,dy' = 0, \qquad \Phi(-a, y) + \Phi(-a, y) = 0.$$

Das einzige Integral ist

$$\Phi = A \sin(\nu t + c) \sin \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a}$$

und (II) liefert die Schwingungszahlen

$$\pm \nu = \sqrt{\frac{32}{9} \frac{ca^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{n^2} \right)} \qquad \left(\begin{matrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{matrix} \right)$$

Nach der Ableitung dieser Formeln *haben negative sowohl wie positive m, n, ν eine physikalische Bedeutung.*

Auch hier sind im Gebiete der Schumannschen Strahlen neue Serien zu erwarten.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen ergibt sich wohl von selbst, dass nur der allgemeine Typus der aufgestellten mathematischen Operationen, nicht die speziellen Deutungen und Ausführungen den Kernpunkt der vorgetragenen Theorie bilden. Schon eingangs habe ich hervorgehoben, dass und warum eine Zurückfühung auf die geläufigeren mechanischen und elektrischen Vorstellungen und Gesetze, eine « physikalische » Erklärung, mit der Balmerschen Formel unverträglich erscheint. Es bedürfte einer viel eingehenderen Kenntnis der Atomwelt, um eine von Willkür freie physikalische Theorie auf den hier gegebenen Grundlagen aufzubauen.

Trotz vielfacher Versuche ist es mir nicht gelungen, eine andere geometrische Figur zu Grunde zu legen als das Quadrat. *Man*

kann sich dasselbe vielleicht als eine der Flächen eines Kubus vorstellen. Die Symmetrie der Formel

$$\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = N\left[\frac{(n+m)(n-m)}{m^2 n^2}\right]$$

entspricht sehr genau der eines Quadrates mit seinen zwei Diagonalen, nicht aber etwa der einer Kugelfläche. Aus diesem Grunde liess sich auch die Einführung des Differentialausdruckes $\partial^2/\partial\xi\,\partial\eta$ nicht vermeiden.

Wollte man von dem Koeffizient 4 in der Balmerschen und in der Pickeringschen Serie und von den Rydbergschen Gesetzen absehen, wozu keinerlei Berechtigung vorliegt, so könnte man auf die Annahme eines eindimensionalen Kontinuums eine einfachere, wenn auch nicht ganz genügende Theorie gründen. Es sei z. B. $w(x)$ die transversale Verschiebung der Teilchen eines Stabes von der Länge $2a$ aus der Gleichgewichtslage; $r = |x - x'|$ die Entfernung zweier Punkte desselben. Der Nullpunkt sei in der Mitte des Stabes; dann sei die Fernkraft, die ein Punkt (x') auf (x) ausübt, proportional $w(x')$ und der Funktion

$$\psi(r) = \alpha\left(r - \frac{r^2}{2a}\right) + \beta\left(r - \frac{r^2}{2a}\right)^2 \qquad (\alpha, \beta \text{ zwei Konstanten});$$

endlich sei noch eine elastische Kraft proportional $w(x)$ vorhanden. Die Bewegungsgleichung lautet :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c^2 w - \int_{-a}^{+a} w(x')\,\psi(r)\,dx'.$$

Der Rand sei fest. Dann ist die Lösung

$$w = A\sin(\nu t + c)\sin\frac{m\pi x}{a},$$

$$\nu^2 = c^2 + \frac{2\alpha}{m^2\pi^2} - \frac{12\beta}{m^4\pi^4},$$

was natürlich auf die Balmersche Formel formal sich reduzieren lässt; doch scheint eine physikalische Deutung dieser Koeffizientenbestimmung nicht möglich zu sein.

Man kann auch mit Hrn. Riecke zwei Zustandsgrössen u, v ein-

führen: sei dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon \int_{-a}^{+a} v\left(r - \frac{r^2}{2a}\right) dx' - c^2 v, \\ -\frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon \int_{-a}^{+a} u\left(r - \frac{r^2}{2a}\right) dx' - c^2 u, \end{aligned}\right\} \quad \text{am Rand } u = v = 0,$$

so folgt

$$\nu = -\frac{2\varepsilon a^2}{m^2 \pi^2} - c^2; \qquad \text{ist} \quad \frac{c^2 \pi^2}{2\varepsilon a^2} = \frac{1}{4}, \qquad \text{so ist} \quad \nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Doch wie diese Bedingung, in die die Zahl π eingeht, erklärt werden soll, ist mir nicht vorstellbar.

Die Spektren anderer Elemente.

Der Versuch, die für Wasserstoff gefundenen Ansätze auf die Spektren anderer Elemente zu verallgemeinern, stösst zunächst auf die Schwierigkeit, dass für dieselben so einfache und exakte Gesetze bis jetzt nicht bekannt sind. Nur das Auftreten der konstanten Differenzen in den Nebenserien ist mit voller Schärfe nachgewiesen. Man wird wieder schliessen, dass sich aus der Formel für das zunächst auftretende Quadrat der Schwingungszahl die Wurzel ausziehen lässt. Dieses bedeutet im allgemeinen eine recht komplizierte Forderung, die nur bei sehr speziellen Differentialgleichungen und Randbedingungen erfüllt sein wird. Bedenkt man noch, dass die Gestalt der Spektralformel bei allen Elementen dieselbe ist und dass einer der auftretenden Koeffizienten sich als annähernd universell erwiesen hat, so wird man zur Annahme geführt, dass bei allen Elementen die Serien durch das früher betrachtete, schwingende System ausgestrahlt werden und dass die Randbedingungen *allein* von Serie zu Serie variieren. Dann *gilt für die Lichterreger aller Elemente die für alle Serien von Wasserstoff erfüllte Grundgleichung* (II)

$$\text{(II)} \qquad \rho \frac{\partial^{10} w}{\partial t^2\, \partial x^4\, \partial y^4} - 32 \nu^2 \nabla\nabla w = 0, \qquad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Wieder hat man Schwingungen eines Quadrates anzunehmen, und die Grössen ν, ρ, *die Länge* $2a$, *als universell anzusetzen.*

Dann behält die Operation ∇ ihren Sinn, den sie bei beliebiger Berandung verliert (da sie von der Wahl des Koordinatensystems abhängig ist); die Herleitung der Grundgleichung wird wieder durch das Hamiltonsche Prinzip unter Zugrundelegung einer der angeführten Ansätze für die potentielle Energie geschehen. Dabei wird man nicht von der Fernwirkung ausgehen, die bei den verschiedenen Serien von Wasserstoff schon verschieden angenommen werden musste, sondern von einer der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4 c \nabla w \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4 c w,$$

und diese durch Fernwirkung erklären. *Verschieden von Element zu Element sind dann nur die Bedingungen, denen die Schwingung unterworfen ist und die das Integral von* (II) *vollends bestimmen.*

Nimmt man etwa

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4 c w,$$

so geben die Entwickelungen p. 40 ff. nur zwei Randbedingungen; sind dieselben erfüllt, so folgt auch die Energiegleichung; eine dritte zur eindeutigen Bestimmung der Lösung notwendige Bedingung wird wie dort durch einen geeigneten Ansatz für die Fernwirkung erhalten.

Leider ist eine Integration von (II) vor der Hand nur unter sehr speziellen Bedingungen möglich; es gelang mir daher nicht, eine direkte Berechnung der Schwingungszahlen auf Grund verschiedener Ansätze für die Randbedingungen auszuführen. Dagegen kann man auf dem gewissermassen umgekehrten Weg doch eine Prüfung der Grundhypothese vornehmen. Man setzt erst geeignete Integrale von (II) an, und kann dann aus ihnen auf die Randbedingungen schliessen.

Die Bedingungen müssen natürlich derart sein, dass sie wieder auf oszillierende Funktionen führen. Nun haben neuere Untersuchungen [1] über die asymptotische Darstellung von oszillieren-

[1] Literatur vgl. A.-R. FORSYTH, *Theory of diff. equations*, t. IV, 1902, p. 341.

den Integralen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen gezeigt, dass solche Integrale in sehr allgemeiner Weise angenähert asymptotisch nach Poincaré (¹) darstellbar sind durch

$$\sin kx\left(\alpha + \frac{\beta}{kx} + \frac{\gamma}{k^2x^2} + \ldots\right) + \cos kx\left(\alpha' + \frac{\beta'}{kx} + \frac{\gamma'}{k^2x^2} + \ldots\right) \tag{20}$$

(α, β, γ, α', β', γ' Konstanten).

Für Bedingungen, die nur wenig von den bei Wasserstoff geltenden abweichen, werden w (bez. Φ) und seine in (II) auftretenden Differentialquotienten wenig von $\sin m\pi x/a$, $\sin n\pi y/a$ oder ähnlichen Ausdrücken abweichen, und von der Form sein:

$$\begin{aligned} w = \sin(\nu t + c)\,[\,&A_1 \sin kx \cos ly + A_2 \cos kx \cos ly \\ &+ A_3 \sin kx \cos ly + A_4 \sin kx \sin ly + B\,], \end{aligned} \tag{21}$$

wobei die A asymptotisch darstellbar sind durch

$$A_i = \sum_{pq} a_{pq}^{(i)} (kx)^p (ly)^q. \tag{22}$$

Die Funktion B ist nichtoszillierend, im übrigen etwa eine Potenzreihe, k und l sind Konstanten. Die Reihen (20) und somit (22) sind nur semikonvergent und gelten meist nur für positive bez. nur für negative x, y. Die $a_{00}^{(i)}$ sind nicht alle gleich Null.

Nach Poincaré (*loc. cit.*) darf man solche Reihen gliederweise integrieren; aus der asymptotischen Darstellung von $\partial^8 w/\partial x^4 \partial y^4$ lässt sich so w gewinnen, also darf w in diesem Falle gliedweise differentiiert werden. Durch Differentiation geht nun ein Glied von der Form $\sin kx \sin ly/(kx)^p(ly)^q$ wieder in ein ähnliches über, dessen Exponenten p', q' grösser oder gleich p, q sind. Nur wenn $p = q = 0$ ist, geht das nun rein trigonometrische Glied in ein ebensolches über. Setzt man die Reihe (21) für w in (II) ein, so müssen die Glieder der letzteren Art für sich verschwinden; die sich ergebende Bedingung ist also dieselbe wie wenn man direkt Ansätze der Form $\sin kx \sin ly$, oder $\cos kx \sin ly$, etc. in (II) einführen würde. Es ergibt sich demnach genau wie bei

(¹) H. POINCARÉ, *Acta math.*, t. VIII, 1886, p. 295 ff.

Wasserstoff:

$$\nu^2 = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2}\right)^2 \frac{3\rho}{2} c^2,$$

$$\pm \nu = \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{l^2}\right) \sqrt{\frac{3\rho}{2}}\, c.$$

Man kann wieder die Wurzel aus der Formel für das Quadrat der Schwingungszahl ausziehen, die erste Forderung ist erfüllt (1).

Weiter ist nun für $x = -a$ und beliebige y irgend eine Bedingung zu erfüllen, die etwa durch Nullsetzen einer linearen Verbindung von w, seinen ersten Integralen oder Differentialquotienten für $x = +a$ erhalten wird. Sie wird daher die Form haben

$$\alpha(k)\sin ka - \beta(k)\cos ka = 0 \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{tang} ka = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Bei Wasserstoff waren die Gleichungen $\sin ka = 0$ oder $\cos ka = 0$. Für gewisse Randbedingungen wird β/α bei wachsendem k unendlich gross, für andere Null, noch für weitere endlich. Letzterer Fall tritt schon beim entsprechenden eindimensionalen Problem auf (vgl. unten); setzen wir geeignete Bedingungen voraus (2), so wird also für grosse positive k oder m

$$\operatorname{tang} ka = \text{konst.}, \qquad k = \frac{m\pi}{a} + \text{konst.},$$

Eine bessere Annäherung wird man erzielen durch Benützung weiterer Glieder der im allgemeinen nur semikonvergenten Entwickelung von $\beta(k)/\alpha(k)$. (Die c sind Konstanten.)

$$\operatorname{tang} ka = c_0 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \ldots$$

also

$$ka = m\pi + c'_0 + \frac{c'_1}{k} + \frac{c'_2}{k^2} + \ldots.$$

---

(1) Die letzte Gleichung und die folgenden Betrachtungen sind *durchaus nicht* an die Existenz der asymptotischen Entwickelungen gebunden.

(2) Man kann die Bedingungen, die ja wegen der eingeführten Fernwirkungen auch Integrale enthalten können, so wählen, dass eine Lösung der Form $\cos kx \cos ly$ resultiert, wo k, l durch Gleichungen der verlangten Art gegeben sind; doch sind diese Ansätze sehr wenig plausibel, ich halte mich dabei nicht auf.

oder angenähert

$$ka = m\pi - c'_0 - \frac{c'_1 a}{m\pi + c'_0} + \frac{c'_2 a^2}{(m\pi + c'_0)^2} - \dots$$

ähnliches gilt für l (¹). Diese allerdings nicht recht befriedigenden Betrachtungen führen also auf die für positive grosse m, n gültige Formel

$$\pm\nu = \sqrt{\frac{3\rho}{\rho}}\, v \frac{a^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{(m+\mu)^2} - \frac{1}{(n+\mu')^2}\right] = N\left[\frac{1}{(m+\mu)^2} - \frac{1}{(n+\mu')^2}\right],$$

in welcher N, μ, μ' Konstanten sind, *also auf die Rydbergsche Formel*, und da nach den gemachten Annahmen ρ, a, v *universell sind, wird der Koeffizient* N *universell*.

Gleichzeitig erkennt man aber, dass die Rydbergsche Formel für niedere m, n zu korrigieren ist, aber nicht durch Variieren des Koeffizienten N, *wie bisher getan wurde, sondern indem man μ, μ' je durch Entwicklungen der Form*

$$\mu + \frac{b}{(m+\mu)} + \frac{c}{(m+\mu)^2} + \dots, \qquad \mu' + \frac{b'}{(m+\mu')} + \frac{c'}{(m+\mu')^2} + \dots$$

oder

$$\mu + \frac{\beta}{(m+\mu)^2} + \frac{\gamma}{(m+\mu)^4} + \dots, \qquad \mu' + \frac{\beta'}{(m+\mu)^2} + \frac{\gamma'}{(m+\mu)^4} + \dots$$

ersetzt.

Jede Serie entspricht einem bestimmten m und variabeln n oder umgekehrt, und wird demnach durch die Formel gegeben

$$\pm\nu = A - \frac{N}{\left[m + \mu + \dfrac{b}{(m+\mu)} + \dots\right]^2},$$

in der A, μ, b Konstanten sind.

(¹) Im allgemeinsten Fall würden c_0, c_1 ... noch von l abhängen, sodass

$$k = \sum_{s,r} \frac{a_{sr}}{n^s m^r}; \qquad l = \sum_{s,r} \frac{b_{sr}}{n^s m^r},$$

doch scheinen in der weiter zu behandelnden Annäherung die einfacheren Formeln zu genügen; die unbekannten Bedingungsgleichungen sind hier also für die erste Annäherung dieser weiteren Beschränkung unterworfen.

Der zweite Koeffizient N *aller Serienformeln muss universell sein.*

Die Linien eines Doublets oder Triplets gehören im Sinne dieser Theorie Quadraten an, die sich unter nur wenig verschiedenen Bedingungen befinden. Dagegen werden die Linien einer Serie, die Hauptserie und ihre entsprechende 2[te] Nebenserie, von Schwingungen eines und desselben Trägers, die genau gleichartig sind, gebildet. Es lassen sich nun die Ergebnisse der Untersuchungen von Runge und Paschen leichter verstehen, nach welchen die *Linien einer und derselben Serie qualitativ und quantitativ denselben Typus besitzen; ebenso die Linien von Haupt-und 2[ter] Nebenserie während dies für die zwei Linien je eines Doublets nicht der Fall ist.*

Die weitere Bestätigung der neuen Formeln wird in den unten gegebenen Tabellen sich finden; sie zeigen folgendes: *Bei allen Elementen gilt für die Hauptserie die Formel*

$$\nu = \mathrm{A} - \frac{109675{,}0}{(m - a - b/m^2)^2} \qquad (m = 2, 3, \ldots),$$

für die erste Nebenserie eine ähnliche Formel, für die 2[te] *Nebenserie*

$$\nu = \mathrm{A} - \frac{109675{,}0}{\left[m - \frac{1}{2} - a' - b'\Big/\left(m - \frac{1}{2}\right)^2\right]^2},$$

oder, was bis auf Glieder höherer Ordnung auf dasselbe hinauskommt,

$$\nu = \mathrm{A} - \frac{109675.0}{p^2}, \qquad \text{wo} \qquad p = m + \alpha - \gamma/p^2 = m - \alpha - \beta(\mathrm{A} - \nu).$$

Die Rydbergschen Gesetze sind bei diesen Formeln so genau erfüllt, dass Hauptserie und 2[te] *Nebenserie direkt durch eine einzige Formel dargestellt werden. Dieselbe enthält bloss vier Konstanten statt sechs, wie Kayser und Runge benutzen;* sie lautet:

$$\pm\nu = 109675.0 \left\{ \frac{1}{(m + a + b/m^2)^2} - \frac{1}{[n - 0.5 - a' - b'/(n - 0.5)^2]^2} \right\}.$$

Trotzdem ist die Annäherung an die Erfahrung besonders

für die niederen Ordnungszahlen eine viel bessere wie bisher erreicht war.

Die Grenzen der beiden Nebenserien fallen zusammen bei Gebrauch dieser Formeln, soweit die unsichere Beobachtung der Struktur der ersten Nebenserie es zu beurteilen erlaubt. Jedenfalls ist der Abstand nur durch Bruchteile einer Å.-E. gegeben. Auch die Konstanten a, b, a', b' zeigen vielfache Beziehungen. Erwähnt sei gleich hier, dass nach dem Gesetz der konstanten Differenzen, a', b', für die Linien eines Doublets oder Triplets denselben Wert haben; dasselbe findet sich für b, nur a nimmt verschiedene Werte an. Infolgedessen ergibt sich ohne weiteres, dass die Doublets der Hauptserien einen gemeinsamen Konvergenzpunkt besitzen, und ihre Abstände durch die Rydbergsche Formel erheblich genauer dargestellt werden als ihre absolute Lage. *Weiter sind b/a, b', bei allen Elementen negativ.*

Für die Spektren der Alkali ergibt sich also folgendes Schema:

Hauptserie:

$$\pm\frac{\nu}{N} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n + a_1 + b/n^2)^2} - \dfrac{1}{[1,5 + a' + b'/(1,5)^2]^2} \\[2ex] \dfrac{1}{(n + a_2 + b/n^2)^2} - \dfrac{1}{[1,5 + a' + b'/(1,5)^2]^2} \end{cases} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

Zweite Nebenserie:

$$\pm\frac{\nu}{N} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2 + a_1 + b/2^2)^2} - \dfrac{1}{[m + a' + b'/(m)^2]^2} \\[2ex] \dfrac{1}{(2 + a_2 + b/2^2)^2} - \dfrac{1}{[m + a' + b'/(m)^2]^2} \end{cases} \qquad (m = 1,5;\ 2,5;\ \ldots).$$

Erste Nebenserie:

$$\pm\frac{\nu}{N} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2 + a_1 + b/2^2)^2} - \dfrac{1}{[m + c + d/m^2]^2} \\[2ex] \dfrac{1}{(2 + a_2 + b/2^2)^2} - \dfrac{1}{[m + c + d/m^2]^2} \end{cases} \qquad (m = 3, 4, 5, \ldots).$$

$$N = 109675,0.$$

Allen positiven Werten von m, n müssen Spektrallinien entsprechen, ob die Schwingungszahl positiv oder negativ sei. *Die Formeln sagen also die Existenz unendlich vieler Linien voraus*; leider fallen diese Linien in allen Fällen, wo ich sie genau

berechnen konnte, ins Rot und Ultrarot oder in das Gebiet der Schumannschen Strahlen. Diese neuen Serien müssen mit den bekannten sehr angenähert konstante Differenzen ergeben, und für die Grundlinien ($m = 1$ oder $n = 1$) aus weiteren, für die ultraroten Serien aus engeren Doublets oder Tripletts bestehen.

Für negative Ordnungszahlen dagegen gelten die Formeln nicht, weil die zu Grunde liegenden Reihenentwicklungen nur *semikonvergent sind*. (Vgl. das sogleich zu entwickelnde Beispiel.)

Bevor ich zu den Tabellen übergehe, möchte ich die zu obigen Formeln führenden Schlüsse durch die Betrachtung eines entsprechenden, ganz durchführbaren Problems im eindimensionalen Gebiet stützen. Dasselbe verhält sich zu dem vorigen wie das Problem der transversal schwingenden Saite zu dem der Platte.

Sei $2a$ die Länge eines Stabes, seine Mitte als Nullpunkt der x-Achse gewählt, w die Verschiebung. Es sei

$$\frac{\partial^6 w}{\partial t^2\, \partial x^4} + v^2 w = 0 \qquad \text{die Hauptgleichung.}$$

Sei $w = \sin(kt + c)\, w_1$, so ist

$$\frac{\nu^2}{v^2} \frac{d^4 w_1}{dx^4} = w.$$

Das allgemeine Integral ist von der Form

$$(23) \quad \begin{cases} w_1 = \mathrm{A} \sin kx + \mathrm{B}\, \mathfrak{Sin}\, kx + \mathrm{C}\, \mathfrak{Cos}\, kx + \mathrm{D} \cos kx, \\ \qquad \text{mit } \pm \nu\,(\mathrm{nu}) = \dfrac{v}{k^2}. \end{cases}$$

Die Randbedingungen $w = 0$, $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ führen auf die Integrale

$$w_1 = \mathrm{A} \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad \text{und} \qquad w_1 = \mathrm{C} \cos \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi x}{a};$$

sie entsprechen dem Problem für Wasserstoff und sind nicht ganz eindeutig bestimmt.

Wir variieren nun die Randbedingungen und nehmen

$$w = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \qquad \text{für} \qquad x = \pm a,$$

unter ε eine kleine Grösse verstanden. Es ergeben sich wieder zwei Lösungen. Die Bedingungsgleichungen, in (23) eingesetzt, fordern :

$$\begin{aligned} &A \sin ka + B\, \mathfrak{Sin}\, ka = 0, && C \cos ka + D\, \mathfrak{Cos}\, ka = 0, \\ &A \sin ka + B\, \mathfrak{Sin}\, ka - \varepsilon k (C \sin ka + D\, \mathfrak{Sin}\, ka) = 0, \\ &-C \cos ka + D\, \mathfrak{Cos}\, ka - \varepsilon k (A \cos ka + B\, \mathfrak{Cos}\, ka) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt für k die Gleichung

$$(\tan ka)^2 + \frac{4}{\varepsilon^2 k^2} \tan ka\, \mathfrak{Tang}\, ka - (\mathfrak{Tang}\, ka)^2 = 0.$$

$$\tan ka = \mathfrak{Tang}\, ka \left(-\frac{2}{\varepsilon^2 k^2} \pm \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^4 k^4} + 1} \right).$$

Die beiden Lösungen haben denselben Charakter; ich diskutiere die eine derselben

$$-\tan ka = \mathfrak{Tang}\, ka \left(\frac{2}{\varepsilon^2 k^2} - \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^4 k^4} + 1} \right).$$

Für grosse positive k wird $\mathfrak{Tang}\, ka = +1$; für negative k, $\mathfrak{Tang}\, ka = -1$. Die Wurzeln werden für grosse m dargestellt durch

$$ka = m\pi - \frac{\pi}{4} \quad (m > 0), \qquad ka = m\pi - \frac{\pi}{4} \quad (m < 0).$$

Die Form der Kurven

$$y = \tan x, \qquad y = \mathfrak{Tang}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ergibt, dass die negativen Wurzeln dem Betrage nach gleich sind den positiven. Für sehr kleine ε ist die erste Wurzel angenähert $ka = \pi/2$; für sehr grosse ε dagegen $ka = 0$; zwischen diesen Grenzen ist die erste Wurzel eingeschlossen. Die zweite gibt also $ka \geq \pi$. Nach den Gudermannschen Tafeln [1] der Hyperbelfunktionen ist für $x = \pi$, $\mathfrak{Tang}\, x = 0{,}9998$. Wir dürfen somit für die in Betracht kommenden ka sehr angenähert $\mathfrak{Tang}(ka) = +1$ setzen. Es gilt also für grosse k:

$$\tan ka = 1 - \frac{6}{\varepsilon^2 k^2} - \frac{2}{\varepsilon^4 k^4} \cdots \tag{24}$$

---

[1] C. GUDERMANN, *Crelles Journ.*, Bd. VI, VII, VIII.

die genau die bei der allgemeinen Theorie vorausgesetzte Gestalt hat, jedoch etwas spezieller ist. Auch die oben berührte Tatsache, dass die neuen Spektralformeln für negative m, n nicht gelten, weil diese Ausdrücke nur semikonvergent sind, findet hier ihr Aequivalent : für negative k wird $\mathfrak{Tang}\,ka = -1$ angenähert, es ist die Entwicklung (24) zu ersetzen durch

$$-\operatorname{tang} ka = 1 - \frac{6}{\pi^2 k^2} - \frac{2}{\pi^4 k^4} \cdots, \tag{25}$$

man erhält wieder dieselben Wurzeln bis auf das Vorzeichen. Der wesentlich singuläre Punkt, den $\mathfrak{Tang}\,ka$ im Unendlichen hat, bewirkt, dass (24) und (25) nur angenähert sind, und keine Potenzreihen in $1/k$ existieren, die für grosse positive *und* negative k die Funktion $\mathfrak{Tang}\,ka$ zu entwickeln erlauben. Eine Gleichung

$$(\operatorname{tang} ka = \text{Rationale Funktion von } k)$$

würde diese Eigenschaft nicht besitzen. Die Besselschen Funktionen dagegen bieten dieselbe Eigentümlichkeit.

Die Spektra der Alkalimetalle.

In den folgenden Tabellen sind die Formeln von S. 52 und S. 53 mit den Beobachtungen verglichen. Die Konstanten a', b', a, b sind stets in dem dort angegebenen Sinne gebraucht. Ich habe nur die Hauptserie und die zweite Nebenserie berücksichtigt, und von letzterer wegen des Gesetzes der konstanten Differenz nur eine Linie jenes Doubletts und Tripletts. Die erste Nebenserie ist einerseits wegen ihrer komplizierten Struktur und ihrer besonders bei höheren Ordnungszahlen sehr diffusen Linien nicht so sicher beobachtet; anderseits wird sie durch die bisherigen Formeln meist schon sehr gut dargestellt: der Grund hierfür ist wohl, dass die den niedrigsten Ordnungszahlen 1, 2 sogar manchmal 3, 4 entsprechenden Linien weit im Ultrarot bzw. Ultraviolett liegen und nicht beobachtet sind. Danach ist die Übereinstimmung mit der Erfahrung hier wenig beweisend. Immerhin zeigen die aus besondern Gründen bei K, Tl mitgeteilten Tafeln der ersten Nebenserie, dass sie ebenfalls sehr gut dargestellt wird [1]. Die Formeln

---

[1] Dass auf Grund der Rydbergschen Formel die Grenzen der Nebenserien

sind meist aus einzelnen Linien und nicht durch Ausgleichung berechnet. Denn wie aus der Theorie zu erwarten ist und sich bei einzelnen Serien bestätigt, sind die Nenner der Formeln in Wirklichkeit doch noch durch höhere Glieder in $1/m^2$, $1/n^2$ zu ergänzen, wodurch die nach der Methode der kleinsten Quadrate erreichbare höhere Genauigkeit bei der Festlegung der Konstanten doch illusorisch wird. Lehrreicher schien es mir zu zeigen, wie genau die Extrapolation geschieht.

Die erste Kolumne gibt die Wellenlänge λ in Luft. Die zweite die nach Kayser und Runge's [1] Bestimmung der Luftdispersion auf Vakuum reduzierten Wellenzahlen ν (gleich $10^8 \lambda^{-1}$ in Vakuum). Diese Reduktion beträgt für $\nu = 40000$ ca. 12, für $\nu = 16000$ ca. 4 Einheiten der letzten Stelle; sie musste also durchaus berücksichtigt werden. Die Fehlergrenze ist unter F angegeben, der *Fehler* $\lambda_{\text{beobachtet}} - \lambda_{\text{berechnet}}$ ist für die Formeln von Kayser und Runge mit K. R., für die meinigen mit R. bezeichnet. Die Ordnungszahl ist unter m und n eingetragen.

Lithium.

HAUPTSERIE.						ZWEITE NEBENSERIE.					
m	λ	ν	F	K. R.	R.	λ	ν	F	K. R.	R.	m
2	6708,2	14903,1	0,2	+108	0,00	6708,2	14903,1	0,2	—615	0,00	1,5
3	3232,77	30924,4	0,03	0,00	0,00	8127,3 [2]	12300,8	—	— 65	+0,75	2,5
4	2741,39	36467,3	0,03	0,00	+0,07	4972,11	10106,7	0,1	0,00	0,00	3,5
5	2562,60	39011,5	0,03	0,00	0,00	4273,44	23393,8	0,2	0,00	—0,08	4,5
6	2475,13	40390,0	0,1	—0,2	+0,20	3985,94	25081,2	0,2	0,00	—0,04	5,5
7	2425,55	41215,5	0,1	—0,01	+0,01	3838,3	26046	3,0	—0,2	+2,1	6,5
8	2394,54	41749,3	0,2	+0,30	—0,03						
9	2373,9 [3]	42112,0	—	+0,75	—0,10						
10	2359,4 [3]	42370,7	—	+1,18	+0,22						

Hauptserie: $a = -0,04751$, $b = -0,0261$. Grenze: 43482,8.
Nebenserie: $a' = -0,09994$, $b' = -0,02646$. Grenze: 28579,7.

zusammenfallen, hat Rydberg gezeigt. *Rapports du Congrès*, etc., t. II, Paris 1900, p. 212.

(1) H. KAYSER u. C. RUNGE, *Abhandl. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, 1894.

(2) Nach H. H. LEHMANN, *Ann. d. Phys.*, t. V, 1901, p. 633; t. VIII, 1902, p. 643.

(3) Nach G. D. LIVEING, u. J. DEWAR.

Es sind hier vier verfügbare Konstanten (bei Kayser und Runge sechs). Zur Berechnung sind die Linien $\left\{\begin{matrix}2\\1,5\end{matrix}\right\}$, 3, 5, 3,5 benutzt. Die Rydbergschen Sätze sind in den Formeln schon berücksichtigt. Die Formeln von Kayser und Runge geben hier bei Extrapolation der Nebenserie (für $n = 2$ ihrer Ordnungszahlen) einen Fehler von 615 Ångström-Einheiten. Er wird bei den übrigen Alkalien noch grösser, es wäre zwecklos, ihn einzutragen.

Natrium.

Hauptserie.						Zweite Nebenserie.						
n	λ	ν	F	K. R.	R.	m	λ	ν	F	K. R.	R.	R
2	5896,16	16955,6	0,00	−78	0,00	1,5	5890,19	16972,8	0,00	+334	0,00	0,00
	5890,19	16972,8	0,00	+86	0,00	2,5	11404 (1)	8766,3	?	+100	+0,9	−1,7
3	3303,07	30266,3	0,03	0,00	+0,03	3,5	6161,15	16226,3	0,1	0,00	0,00	0,00
	3302,47	30271,8	0,03	0,00	0,00	4,5	5153,72	19398,2	0,1	0,00	−0,25	−0,17
4	2852,91	35040,9	0,05	0,00	−0,10	5,5	4752,19	21037,1	0,15	0,00	−0,23	−0,19
	2852,91	35040,9	0,05	0,00	+0,07	6,5	4546,03	21991,1	0,2	+1,16	+0,21	+0,25
5	2680,46	37295,5	0,1	0,00	−0,08	7,5	4423,7	22599,2	?	+1,7	−0,17	−0,14
	2680,46	37295,5	0,1	0,00	0,00							
6	2593,98	38539,2	0,1	+0,03	−0,13							
	2593,98	38539,2	0,1	+0,09	−0,08							
7	2543,85 (2)	39298,7	0,1	+0,10	−0,22							
	2543,85	39298,7	0,1	+0,24	−0,19							
8	2512,23 (2)	39793,4	0,2	+0,50	−0,15							
	2512,23	39793,4	0,2	+0,60	−0,12							

Hauptserie: $\left\{\begin{matrix}a_1 = 0,14595\\ a_2 = 0,14521\end{matrix}\right\}$ $b = -0,1158$. Grenze: 41444,87.

Nebenserie: $a' = +0,15157$, $b' = -0,05586$. Grenze: 24472,1.

Für die Nebenserie (deren Grenze nach Rydberg aus der Hauptserie entnommen wird) habe ich auch aus 1,5, 3,5 die For-

(1) Nach P. Lewis, *loc. cit.*

(2) Nach G. D. Liveing u. J. Dewar.

mel

$$(A) \qquad \nu = A - \frac{N}{[m + \alpha + \beta\, 10^{-5}(A - \nu)]^2}$$

berechnet (¹). Es fand sich $\alpha = 0{,}15205$, $\beta = -0{,}06107$. Die Fehler sind unter R' eingetragen. Kayser und Runge haben neun Konstanten, hier sind fünf gebraucht. Die Doppellinien sind nur bis $n = 3$ beobachtet; von da an beziehen sich die beobachteten λ auf das Intensitätsmaximum, also ungefähr die kleinere Wellenlänge. Dasselbe gilt bei Kalium.

Kalium.

HAUPTSERIE.

n	λ	ν	F	K. R.	R.
2	7701,92 (²)	12980,7	?	+161,3	0,00
	7668,54 (²)	13036,8	?	−159,6	−0,24
3	4047,36	24701,6	0,03	0,00	0,00
	4044,29	24719,4	0,03	0,00	0,00
4	3447,49	28998,4	0,03	0,00	−0,13
	3446,49	29006,7	0,03	0,00	+0,12
5	3217,76	31068,7	0,03	0,00	0,00
	3217,27	31073,5	0,03	0,00	−0,05
6	3102,37	32224,2	0,10	− 0,27	0,10
	3102,15	32226,5	0,10	+ 0,36	−0,40
7	3034,94	32939,4	0,10	0,23	−0,20
	3034,94	32939,4	0,10	− 0,44	−0,05
8	2992,33	33408,7	0,15	− 0,68	−0,19
	2992,33	33408,7	0,15	− 0,80	−0,08
9	2963,36	33736,2	0,20	− 1,05	−0,13
	2963,36	33736,2	0,20	− 1,11	−0,07
10	2942,8	33971,4	1,0	+ 1,45	−0,27
	2942,8	33971,4	1,0	+ 1,60	−0,23

ZWEITE NEBENSERIE.

m	λ	ν	F	K. R.	R.	R'
1,5	7701,92	12980,7	?	—	0,00	0,00
2,5	—	—	—	—	—	—
3,5	6911,2	14465,3	0,5	−4,2	0,00	0,00
4,5	5782,67	17288,3	0,05	0,0	+0,20	+0,09
5,5	5323,55	18779,2	0,15	0,0	+0,22	+0,10
6,5	5084,49	19662,3	0,20	0,0	+0,22	+0,04
7,5	4943,1	20224,7	1,0	+1,0	−1,10	+0,94

ERSTE NEBENSERIE.

m	λ	ν	F	K. R.	R.
5	5812,54	17199,5	0,05	0,00	0,00
6	5343,35	18709,5	0,15	0,00	0,00
7	5097,75	19611,2	0,20	0,00	−0,16
8	4952,2	20188	1,0	−1,2	+0,7

Die zu wenig genauen Messungen von LIVEING u. DEWAR sind nicht berücksichtigt.

(¹) Nach p. 52 ist hierin das Vorzeichen von ν positiv zu nehmen, wenn $A > \nu$; negativ, wenn $A < \nu$.

(²) Nach H. Lehmann. H. KAYSER u. C. RUNGE geben $7699{,}3 \pm 5{,}0$, $7665{,}6 \pm 5{,}0$.

Von $n = 6$ an beziehen sich die Messungen bei der Hauptserie auf die kleinere Wellenlänge. Die Grundlinien 7701, 7668 sind sehr breit und unsicher bestimmt, die Differenzen ν_1 der Schwingungszahlen stimmen schlecht mit den übrigen ν_1. Daher ist auch die Grenze der Nebenserie ungenau. Nimmt man für die Grundlinien einen (sehr wahrscheinlichen) Fehler von 0,5 Å.-E. an, so erhält man die Abweichungen R'. Dies zeigt, welche Genauigkeit die Messungen in ihrer Gesamtheit besitzen müssen, um eine entscheidende Prüfung der Formeln zu erlauben. Es ist

Hauptserie :	$\begin{cases} a_1 = + 0,29034 \\ a_2 = - 0,28750 \end{cases}$	$b = - 0,2239$.	Grenze : 35005,0.
Nebenserie : R.	$a' = - 0,31789$.	$b' = - 0,1076$.	Grenze : 22024,3.
R'	$a' = + 0,31815$.	$b' = - 0,1081$.	» 22023,5.

Die beiden Nebenserien von K sind in ihrem Charakter kaum zu unterscheiden; man betrachtete bisher die mit 6938 und 6911 beginnende als die *erste* Nebenserie, doch würde dies der einzige Fall sein, wo b' positiv wäre und wo die Rydbergschen Regeln sich als unrichtig erweisen. Betrachtet man sie aber, wie hier geschehen ist, als zweite Nebenserie, so ordnet sie sich genau in das Schema der übrigen Serien ein. Diese Entscheidung wäre auf Grund der älteren Formeln nicht möglich gewesen. Für $n = 2, 5$ berechnet man $\lambda = 12430$, $\lambda = 12521$.

Die Gleichung der ersten Nebenserie, deren Grenze aus der zweiten Nebenserie entnommen ist, lautet:

$$\nu = 22024,3 - \frac{109675,0}{(m - 0,2828 + 1,26\, m^2)^2}.$$

Für $m = 4$ berechnet man das Linienpaar $\lambda = 6936,4$, $\lambda = 6964,7$. Schon Kayser und Runge bemerkten, dass hier ein allerdings bis jetzt nicht beobachtetes [1] Linienpaar liegen sollte. Sie extrapolieren $\lambda = 6957,4$, $\lambda = 6985,4$. Ich habe die Formel der ersten Nebenserie hier angegeben, weil sie gestattet, diese roten Kaliumlinien mit grösserer Sicherheit voraus zu berechnen und zu ihrer Auffindung nützlich sein kann.

---

[1] Lecoq hat ein Band 6825-7248.

Für $m = 3$ finden sich $\lambda = 11643$, $\lambda = 11721$; Kayser und Runge berechnen $\lambda = 12444$, $\lambda = 12525$. Becquerel hat die Kaliumlinien $\lambda = 10980$, 11620, 12330 beobachtet, doch sind die Messungen sehr unsicher, und zwei Linien offenbar nicht getrennt worden. —

Rubidium.

HAUPTSERIE.						ZWEITE NEBENSERIE.					
n	λ	ν	F	K. R.	R.	m	λ	ν	F	K. R.	R.
2	7950,46[1]	12574,4	?	+183	0,00	1,5	7805,98[1]	12807,2	?	–	0,00
	7805,98[1]	12807,2	?	+175	– 3,5	2,5		—	–		
3	4215,72	23714,1	0,03	0,0	0,00	3,5	7406,19	13498,5	0,3	—	0,00
	4201,98	23791,7	0,03	0,0	0,00	4,5	6159,8	16230,0	0,2	—	+1,8
4	3591,74	27833,9	0,05	0,0	0,00	5,5	5654,22	17681,2	0,15	–	+1,6
	3587,23	27868,9	0,05	0,0	+0,02						
5	3351,03	29833,2	0,05	0,0	–0,11	Das Paar 2,5 ist noch nicht beobachtet;					
	3348,86	29852,5	0,05	0,0	0,00	man berechnet $\lambda = 13657$, $\lambda = 13228$.					

Der erhebliche Fehler von 3,5 Å.-E. bei der Grundlinie ist zum Teil auf die Unsicherheit der Messungen von Lehmann zurückzuführen. Die Differenz der Schwingungszahlen dieses Paares sollte 235,3 sein nach Kayser und Runge's Bestimmungen; sie ist 232,8, der relative Fehler der zwei Linien also 0,8 Å.-E., der absolute wohl noch grösser. Immerhin sind die Differenzen auch den fehlenden Gliedern der Formel, die sich bei höherem Atomgewicht immer stärker bemerkbar machen, zum Teil zuzuschreiben.

Hauptserie : $\begin{cases} a_1 = 0,35948 \\ a_2 = 0,34652 \end{cases}$, $b = -0,2688$. Grenze : 33684,5.

Nebenserie : $a' = +0,36669$, $b' = -0,1401$. Grenze : 20877,3.

(1) Nach H. Lehmann.

Cäsium.

	Hauptserie.					Zweite Nebenserie.				
n	λ	ν	r	K R	R.	m	λ	ν	r	R.
2	8949,92 [1]	11170,3	?	—365	0,00	1,5	8527,72 [1]	11723,6	?	—3.75
	8527,72 [1]	11723,6	?	—330	—3,75		8949,92	11170,3	?	0.00
3	4593,34	21764,6	0,05	0,00	0,00					
	4555,44	21945,8	0,05	0,00	—0,07					
4	3888,83	25707,5	0,1	0,00	0,00					
	3876,73	25787,7	0,1	0,00	—0,04					
5	3617,08	27638,9	0,3	0,00	—0,72					
	3611,84	27679,0	[illegible]	0,00	—0,14					

Hauptserie :

$a_1 = 0,44293$, $a_2 = 0,41068$; $b = -0,3086$.

Grenzen :

Hauptserie : 31397,8.

Nebenserie : 20227,5, 19674,8.

Wieder liegt im Ultrarot ein Fehler von 3,7 Å.-E. vor; doch hat er *entgegengesetztes Vorzeichen wie bei* Rb, sodass, bis genauere Messungen vorliegen, kein Grund ist zu bezweifeln, dass b für beide Hauptserien denselben Wert hat. Die zweite Nebenserie war bisher unbekannt. Da aber die Grundlinien ($n = 1,5$) nach dem Rydbergschen Gesetz 8949,92, 8527,72 sein müssen, so folgt zwischen a', b' die Gleichung

$$0,36898 = a' + b'/(1,5)^2.$$

Nimmt man nach Analogie von Ka und Rb [2] $b'/a' = -0,38$, so findet man, dass die Linie (2,5) ins äusserste Ultrarot fällt; für $n = 3,5$ erhält man $3,5 + a' - b'/(3,5)^2 = 3,930\ldots$, während Lehmann die Linie 7616,6, $\nu = 13125,5$ beobachtet hat; sie gibt 3,9297, gehört also zur zweiten Nebenserie. Die zweite Linie des Paares müsste $\nu = 12576$ ergeben; sie wird von Lehmann nicht angegeben [3]. Für $n = 4,5$ erhält man $4,936\ldots$ im Nenner; Lecoq hat das Linienpaar 6602, 6361 beobachtet, welches innerhalb

[1] Nach H. Lehmann.

[2] Vgl. Tabelle am Schluss der Abhandlung.

[3] Rb hat die Linie $\nu = 12574,4$; Lehmann konnte daher wohl die zwei Linien nicht trennen, doch gibt er an, dass stets diese Rb-Linie auf seinen Platten erschien.

der geringen Genauigkeit seiner Messungen die zu fordernde Differenz $\nu_1 - \nu_2$ ergibt, wie Kayser und Runge schon bemerkt haben. Man erhält aus ihnen 4,933 und 4,920, statt 4,936; doch liegt der Unterschied innerhalb Lecoqs Beobachtungsfehler, sie bilden somit das Paar $n = 4,5$. Weitere Paare sind nicht beobachtet. Eine derartige Konstruktion der zweiten Nebenserie aus der Hauptserie wäre in diesem Fall mit den Rydbergschen, hier sehr ungenauen Formeln, nicht möglich gewesen.

Das Spektrum von Helium.

Einfache Linien.

Hauptserie I.						Zweite Nebenserie I.				
n	λ	ν	R. P.	R.	Rydberg	m	λ	ν	R. P.	R.
2	—	4857,3	+143	—80	+186	1,5	—	4857,3	1360	—80
3	5015,732	19931,81	0,00	0,000	0,000	2,5	7281,81	13729,13	+8,4	0,000
4	3964,875	25214,48	0,00	0,000	—0,092	3,5	5047,816	19805,12	0,00	0,000
5	3613,785	27664,09	0,00	0,000	0,000	4,5	4437,718	22527,89	0,00	0,046
6	3447,734	28996,41	—0,02	—0,001	+0,033	5,5	4169,131	23979,18	0,00	0,000
7	3354,667	29800,82	—0,08	—0,038	+0,032	6,5	4024,136	24843,16	—0,06	—0,033
8	3296,900	30322,96	—0,08	—0,032	+0,005	7,5	3936,063	25399,04	—0,17	—0,087
9	3258,336	30681,83	—0,17	—0,116	0,000	8,5	3878,330	25777,12	—0,21	—0,022
10	3231,327	30938,28	0,19	—0,13	+0,016	9,5	3838,240	26046,36	—0,29	—0,060
11	3211,626	31128,06	—0,21	—0,12	0,00	10,5	—	—	—	
12	3196,81	31272,32	—0,20	—0,09	0,00	11,5	3887,64	26394,31	—0,33	—0,000
13	—	—	—	—	—	12,5	3770,72	26512,74	—0,63	—0,285
14	3176,6?	31471,3	+0,04	+0,08	+0,23					

I. Hauptserie : $a = 0,01150$, $b = -0,0072$, $A = 32031,50$.
Nebenserie : $\alpha = +0,36013$, $\beta = -0,0295$, $A = 27173,90$ (¹).

Nach Rydbergs Formel erhält man:

$$32032,63 - \frac{109675,0}{(m + 0,01055)^2}$$

für die Hauptserie. Die Grenze dürfte hier richtiger sein.

(¹) Formel (A) p. 58.

Doppellinien.

HAUPTSERIE II.					ZWEITE NEBENSERIE II.					
n	λ	ν	R. P.	R.	m	λ	ν	R. P.	R.	R'
2	—	9230,8	−74	0,000	1,5	—	9230,8	−1320	0,00	−42
3	3888,785	25707,82	0,000	0,000	2,5	7065,48	14149,48	+24	0,00	0,000
4	3187,830	31360,41	0,000	−0,056	3,5	4713,252	21210,94	0,00	0,00	0,000
5	2945,220	33943,59	0,000	0,000	4,5	4120,973	24259,39	0,00	+0,27	+0,036
6	2829,173	35335,82	−0,017	−0,007	5,5	3867,613	25848,55	0,00	+0,11	0,000
7	2763,900	36170,28	+0,005	−0,003	6,5	3733,004	26780,61	−0,19	+0,09	−0,016
8	2723,275	36709,83	+0,007	−0,013	7,5	3652,121	27373,71	−0,46	+0,09	−0,035
9	2696,230	37078,04	+0,050	−0,083	8,5	3599,472	27774,80	−0,70	+0,11	+0,035
10	2677,2	37341,58	+0,023	+0,013	9,5	3563,125	28057,39	−0,95	+0,10	+0,003
11	2663,3	37536,45	−0,016	−0,019	10,5	3536,965	28264,92	−1,16	+0,08	−0,037
					11,5	3517,48	28421,47	−1,33	+0,12	0,000
					12,5	3502,47	28543,27	−1,57	+0,03	−0,073
					13,5	3490,77	38638,9	−1,72	+0,07	−0,060
					14,5	3481,6	28714,4	−1,69	+0,20	+0,040

Das Spektrum von He ist eines der am genauesten bekannten Spektren. Die Wellenzahlen sind aus Runge und Paschens Abhandlung entnommen (1), mit Ausnahme der im Ultrarot gelegenen, nur bolometrisch nachgewiesenen Linien, die nach dem Vorgang von Rydberg (2) aus den sehr genau bestimmbaren Grenzen von Haupt- und Nebenserien berechnet sind. Die Fehlergrenze liegt wohl bei keiner Linie oberhalb 0,02 Å.-E.; nach Perot und Fabry soll 0,01 die Grenze der Zuverlässigkeit Rowlandscher Gitter sein bei solchen Bestimmungen. Die Abweichungen deuten wieder auf das Fehlen höherer Glieder. Die Grundlinie der ersten Hauptserie passt ausnahmsweise schlecht, überhaupt ist der Vorzug der neuen Formeln bei dieser Serie gering. Bei den andern Serien zeigt er sich aber in sehr auffallender Weise. Extrapoliert man die Nebenserie I auf die Ordnungszahl 1,5, so soll man nach dem Rydbergschen Gesetz die Grenze der Hauptserie finden: man

(1) C. Runge u. F. Paschen, *Astrophys. Journ.*, t. III, 1896, p. 4.

(2) J. R. Rydberg, *Wied, Ann.*, t. LVIII, 1896, p. 674; *Astrophys. Journ.*, t. IV, 1896, p. 91.

extrapoliert 32013,0, beobachtet ist 32031,5; aus der Nebenserie II findet sich 38420, beobachtet ist 38453,4, die Differenz entspricht 2,4 Å.-E. Dabei ist die Extrapolation eine sehr weite.

Die Hauptserie I ist auch nach Rydbergs Formel berechnet, die hier, abgesehen von der Grundlinie, ausnahmsweise genau passt. Die unter R' eingetragenen Fehler ergeben sich bei Anwendung von Formel (A) S. 58.

II. Hauptserie :

$a = -0,06965$, $b = +0,0276$. Grenze : 38453,38.

Nebenserie :

$a' = +0,20221$, $b' = -0,03017$ aus 1,5, 2,5, 3,5. 29223,46 (R.)

$\alpha = +0,20288$, $\beta = -0,0358$ aus 2,5, 3,5, 5,5. 29222,18 (R')

Silber.

Zweite Nebenserie.

$\lambda =$	8274,04 [1]	4668,70	3981,87	3710,11
$\nu =$	12082,7	21413,3	25106,8	26945,9
λ beob.-λ ber. =	0,00	0,00	— 0,30	0,00
$m =$	2,5	3,5	4,5	5,5

Konstanten : $a' = -0,02890$, $b' = -0,2423$. Grenze : $A = 30620,7$.

Für 1,5 erhält man $\lambda = 3050$; nach den Beobachtungen im magnetischen Feld sollte 3280,80 herauskommen. Die Formel

$$\nu = A - \frac{N}{(m + a' - b'/m^2)^2}$$

ergibt also für die niederste Ordnungszahl einen bedeutenden Fehler. Es zeigt sich, dass die nur durch Glieder höherer Ordnung verschiedene Formel (A) S. 58:

$$\nu = A - \frac{N}{[m + \alpha + \beta(A - \nu)10^{-5}]^2}$$

hier und in den Spektren der zweiten Mendelejeffschen Kolonne etwas besser sich anschliesst. Für $\alpha = -0,03025$, $\beta = -0,2023$, $A = 30621,7$ erhält man

$\lambda =$	8274,04	4668,70	3981,87	3710,11
λ beob.-λ ber. =	0,00	0,00	— 0,35	0,00

[1] Nach Lewis.

Für 1,5 findet sich durch successive Approximation $\lambda = 3210$, während beobachtet 3280,80 ist.

Sauerstoff.

Triplets; zweite Nebenserie.

$\lambda =$	6456,87	5437,041	5020,31	4803,18	4673,88	4590,07
$\nu =$	15484,57	18387,34	19913,63	20813,84	21389,6	21780,2
$m =$	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
R. P. =	−0,11	−0,31	+0,02	−0,18	+0,05	−0,19
R. =	0,00	0,00	−0,04	−0,40	+0,06	−0,02

Die Linie 1,5 ist $\lambda = 7772,26$: aus ihr und 3,5, 4,5 ist die Formel berechnet, deren Abweichungen unter R. verzeichnet sind. $\lambda = 7772$ ist also die Grundlinie der Hauptserie. Runge und Paschen vermuteten dies auch schon, doch sind ihre Formeln zu ungenau für kleine Ordnungszahlen; eine sichere Prüfung war nicht möglich, denn die Intensität der Linien nimmt in der Hauptserie so rasch ab, dass nur das nächste Glied noch beobachtet werden konnte. Die Abstände desselben entsprechen genau der Hypothese, dass b für alle drei Linien der Tripletts denselben Wert habe, was schon bei den Doubletts der Alkalimetalle der Fall war. Es ist

Zweite Nebenserie : $A = 23204,87$, $a' = +0,27479$, $b' = -0,06976$.

Für die Hauptserie erhält man unter Berücksichtigung des zweiten beobachteten Paares:

$$A = 36067,7 \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0,21230 \\ a_2 = 0,21215 \\ a_3 = 0,21204 \end{array} \right\} \quad b = -0,1530.$$

Man berechnet

$$\lambda_4 = 3348,20, \qquad \lambda_5 = 3122,28,$$

die von Runge und Paschen nicht angegeben werden.

Die Grenze der zweiten Nebenserie berechnen Runge und Paschen zu 23193,85, die der ersten zu 23207,93. Für die neuen Formeln reduziert sich die Differenz sehr; die berechnete Grenze ist 23204,87. Ebenso verhält es sich in den andern Fällen.

Die Doppellinien des Sauerstoffspektrums übergehe ich hier; die Grundlinien ($n = 1,5$, $2,5$) sind nicht beobachtet, weil im

Ultrarot liegend; die übrigen Linien werden von den alten Formeln beinahe ebensogut dargestellt wie von den neuen.

Zweite Nebenserie der Elemente der zweiten Kolonne des periodischen Systems.

Magnesium.

$m =$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
$\lambda =$	5172,87	3332,28	2938,67	2778,36	2695,53	2646,61
$\nu =$	19326,3	30001,1	34019,4	35982,1	37088,0	37773,0
F. =	0,03	0,03	0,03	0,03	0,15	0,50
K. R. =	−53,07	0,00	−0,01	−0,01	+0,20	+0,47
R. =	0,00	0,00	+0,18	0,00	−0,06	+0,08
R′ =	0,00	0,00	−0,08	0,00	+0,02	+0,07

(R.) Formeln $\pm\nu = 39789{,}0 - \dfrac{N}{(m - 0{,}11893 - 0{,}4123/m^2)^2}$,

(R′) $\pm\nu = 39793{,}0 - \dfrac{N}{[m - 0{,}12411 - 0{,}2981(\mathrm{A} - \nu)10^{-5}]^2}$.

$N = 109675{,}0.$

Die Abweichungen sind unter R., R′ gegeben. Die Formel von Kayser und Runge ist nach der Methode der kleinsten Quadrate, ohne Berücksichtigung der Linie 2,5, berechnet; die meine aus 2,5, 3,5, 5,5.

Für die mittlere Linie des Triplets 1,5 extrapoliert man:

Aus Formel (R.)	$\nu = 36640$
Aus Formel (R′)	$\nu = 48960$

Bei Ag war schon eine wenn auch geringere Abweichung der zwei Formeln voneinander für $m = 1{,}5$ gefunden; die zweite Formel (in α, β) war die erheblich genauere, doch lieferte sie einen Wert von λ, welcher um 50 Å.-E. zu klein sich fand. Hier muss, wie schon aus der grossen Differenz zwischen beiden Formeln sich ergibt, der Fehler ein viel grösserer sein; es hängt dies mit dem (bisher nicht annähernd so grossen) Wert von b', der bei den Elementen dieser Kolonne des periodischen Systems vorliegt, zusammen. Die Formeln von Kayser und Runge, sowie Rydbergs versagen überhaupt ganz bei dieser Extrapolation. Man kann hier somit nur das Resultat aussprechen:

Schon die Grundlinie der Hauptserie liegt im äussersten Ultraviolett bei 2000-1800 *Å.-E.*, wo keine Beobachtungen vorliegen; ihre Grenze ist weit im Gebiet der Schumannschen Strahlen ($\nu = 76430$ bei R., $\nu = 88750$ bei R′) zu suchen. Es erklärt sich so das bisher ganz unverständliche Fehlen der Hauptserie bei diesem Elemente.

Um einen Begriff der Schwierigkeit der hier vorgenommenen Extrapolation zu geben, genügt die Bemerkung, dass die in Wellenzahlen gemessene Entfernung zwischen den äussersten beobachteten Linien der Serie ca. 18400 beträgt; von der Linie 2,5 bis zu 1,5 dagegen ist der Abstand mindestens 68300.

Wegen der ungewöhnlich kleinen Wellenlänge der Grundlinie ist es nicht sicher, ob sie, wie bei andern Spektren, besonders intensiv sein wird.

Calcium.

$m =$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
$\lambda =$	6122,46	3957,23	3474,98	3274,88	3170,23	3107,96
$\nu =$	16328,9	25263,2	28769,0	30526,9	31534,5	32172,2
$F =$	0,05	0,05	0,05	0,10	0,50	1,0
K. R. =	− 61	− 0,01	+ 0,02	0,00	+ 0,23	+ 0,56
R. =	0,00	0,00	− 0,10	0,00	− 0,04	− 0,38

Man findet nach der Formel

$$\nu = A - \frac{109675,0}{[m + \alpha + \beta\, 10^{-5}(A - \nu)]^2}$$

für die Konstanten die Werte:

$$A = 34088,75, \qquad \alpha = + 0,06481, \qquad \beta = - 0,4492.$$

Durch successive Approximation ergibt sich mit einem wohl noch grösseren Fehler als bei Mg:

Grenze der Hauptserie $\nu = 70300$, Grundlinie $\lambda = 2760$.

Strontium.

$n =$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
$\lambda =$	7070,7	4438,22	3865,59	3628,62	3504,70
$\nu =$	14139	22525,3	25862,1	27551,0	28525
K. R. =	+ 75	− 0,01	+ 0,20	0,0	+ 0,08
R. =	0,00	0,00	+ 0,28	0,00	− 0,09

$A = 31026,07, \quad \alpha = + 0,1597, \quad \beta = - 0,5183.$ Hauptlinie 1,5 : λ = ca. 2940.

Es ist merkwürdig, dass bei Sr in dieser Gegend des Spektrums

ein Paar umgekehrter Linien 3307,64, 3351,35 von bedeutender Intensität liegt, welches die für die intensiveren Linien des Tripletts 1,5 zu fordernde Differenz ν_1 ergeben; als der dritten Linie entsprechend könnte man das etwas schwächere Paar 3380,89, 3366,43 betrachten, dessen Mitte gegen 3351,35 ungefähr die Differenz ν_2 ergibt. Auch bei Mg, Ca kann man die entsprechenden Paare angeben. Doch scheint mir die Annahme, dass hier das erste Glied der Hauptserie vorliege, aus verschiedenen Gründen unwahrscheinlich. Untersuchungen im Gebiet 2100—1800 müssen darüber entscheiden.

Zink.

$m =$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
$\lambda =$	4810,71	3072,19	2712,60	2567,99	2493,67	2449,76
$\nu =$	20781,2	32540,9	36854,4	38929,6	40090,0	40808,3
$F =$	0,03	0,05	0,05	0,10	0,15	0,25
K. R. =	+ 58	0,00	+ 0,02	— 0,01	— 0,04	— 0,20
R. =	0,00	0,00	0,00	+ 0,01	— 0,09	— 0,40

$A = 42871,44, \quad \alpha = -0,21526, \quad \beta = -0,2559.$

Grenze der Hauptserie $\nu = 115000$, Grundlinie $\nu = 72000$, also $\lambda = 1390$, jedenfalls mit einem Fehler von mehreren Hundert Å.-E.

Kadmium.

$m =$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5?	8,5?
$\lambda =$	5086,06	3252,63	2868,35	2712,65	2632,29	2582,86	2553,61
$\nu =$	19656,2	30735,7	34853,3	36853,7	37978,7	38705,3	39148,6
$F =$	0,05	0,05	0,03	0,05	0,10	0,30	0,20
K. R. =	+ 68	+ 0,01	— 0,02	+ 0,03	+ 0,15	— 1,75	— 0,34
R. =	0,00	0,00	+ 0,09	0,00	— 0,10	— 2,2	— 1,2

$A = 40706,3, \quad \alpha = -0,15287, \quad \beta = -0,3063.$ Grundlinie 1,5 : $\lambda = 1250$.

Die Linie 7,5 gibt auch nach dem Gesetz der konstanten Differenzen einen Fehler von 1 Å.-E.; ihre Zugehörigkeit zur Serie muss daher unentschieden bleiben.

Quecksilber.

$m =$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
$\lambda =$	5460,97	3341,70	2925,51	2759,83	2675,20
$\nu =$	18306,6	29916,5	34172,2	36223,6	37369,6
$F =$	0,05	0,05	0,10	0,05	0,20
K. R. =	+ 57	— 0,01	+ 0,02	+ 0,05	+ 0,24
R. =	0,00	0,00	+ 0,08	0,00	+ 0,16

$A = 40136,80, \quad \alpha = 0,19385, \quad \beta = -0,2966.$

Grenze der Hauptserie $\nu =$ ca. 126000, $\lambda =$ ca. 1160 für die Grundlinie.

Thallium.

Zweite Nebenserie.						Erste Nebenserie.					
m	λ	ν	F	K. R.	R.	n	λ	ν	F	K. R.	R.
2,5	5350,65	18684,2	0,03	−168	0,00	3	3519,39	28406,0	0,03	+0,02	0,00
3,5	3229,88	30952,1	0,03	−21,7	−0,12	4	2918,43	34255,2	0,03	−0,07	−0,06
4,5	2826,27	35372,1	0,05	−3,65	−0,14	5	2709,33	36899,7	0,03	+0,13	+0,07
5,5	2665,67	37503,1	0,05	−1,69	−1,14	6	2609,08	38316,5	0,03	−0,02	−0,14
6,5	2585,68	38663,2	0,05	−0,01	0,02	7	2552,62	39163,9	0,10	−0,12	+0,13
7,5	2538,27	39385,3	0,10	−0,04	−0,03	8	2517,50	39710,3	0,10	−0,34	+0,13
8,5	2508,03	39680,1	0,15	+0,01	0,00	9	2494,00	40084,4	0,10	−0,19	0,05
9,5	2487,57	40188,0	0,20	+0,08	+0,08	10	2477,58	40350,1	0,10	+0,06	+0,04
10,5	2472,65	40430,4	0,20	−0,21	−0,21	11	2465,54	40547,1	0,20	+0,24	−0,01
11,5	2462,01	40605,2	0,30	−0,03	−0,07	12	2456,53	40696,3	0,20	0,47	−0,06
12,5	2453,87	40740,0	0,30	+0,07	0,01	13	2449,57	40811,4	0,30	+0,68	−0,06
13,5	2447,59	40844,4	0,30	+0,22	+0,07	14	2444,00	40904,4	0,30	−0,79	−0,15
14,5	2442,24	40934,0	0,30	−0,01	−0,23	15	2439,58	40978,6	0,30	−0,95	−0,18

Von den Elementen Aluminium, Indium, Thallium, bei denen Serien von Doubletts existieren, habe ich nur das letztere berechnet. Die zweite Nebenserie von Tl wird nämlich am schlechtesten von allen bekannten Serien durch die Formeln von Kayser und Runge dargestellt; die Serien der andern Elemente zeigen normalen Verlauf. Ein Vergleich der Formeln schien daher nur bei Tl interessant. Kayser und Runge berechnen ihre Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate aus $n = 6,5$ bis $14,5$; meine Formel ist aus allen Linien berechnet; sie ergibt

$$A = 41\,469{,}6, \qquad \alpha = -0{,}24088, \qquad \beta = -0{,}2860.$$

Grundlinie der Hauptserie $\lambda = 1110$.

Der Unterschied zu Gunsten der neuen Formel ist ein sehr bedeutender; doch macht sich das Fehlen der höheren Glieder bemerkbar. Merkwürdig ist die grosse Abweichung bei 5,5; schon Kayser und Runge haben hervorgehoben, dass die Kurve $\nu = f(m)$, graphisch aufgetragen, hier einen Knick zeigt. Die Linie fällt ganz aus der Serie bei den neuen Formeln. Das zeigt, dass die fehlenden Glieder der Formel eine recht komplizierte Form und wohl auch Singularitäten aufweisen werden.

Die sehr vollständig beobachtete erste Nebenserie von Thallium habe ich als Beispiel beigefügt. Ihre Grenze ist gleichgesetzt der der zweiten Nebenserie. Da von $n = 8$ an die Satelliten von den Hauptlinien nicht mehr getrennt werden konnten und sich die Messungen dann auf die intensiveren Hauptlinien beziehen, sind nur letztere der Rechnung unterzogen worden. Die Formel von Kayser und Runge bezieht sich eigentlich auf die Satelliten, sie kann nur von $n = 8$ an mit meiner Berechnung verglichen werden. Für erste und zweite Nebenserie haben Kayser und Runge sechs Konstanten, hier sind nur fünf gebraucht.

$$\pm \nu = 41469,6 - \frac{109675,0}{(n + 0,09947 - 0,02764/n^2)^2}.$$

Der ersten Nebenserie sollte nun auch eine Hauptserie entsprechen, die, nach den Formeln, mit der zur zweiten Nebenserie gehörigen konstante Differenzen aufweist. Sie kann leider nur ganz roh nach Rydbergs Formel berechnet werden. Für die Grenze der intensivsten Linien findet man $\nu = 30585$ (genau); Grundlinie ($n = 2$): $\nu = 10885$; diese weit im Ultrarot liegende Linie muss grosse Intensität besitzen; die folgenden Linien sind (nur roh angenähert) $\nu = 14600$; $\nu = 22200$. Erst die letzte Linie könnte von Kayser und Runge beobachtet sein. Wegen des grösseren Intensitätsabfalles in den Hauptserien wird sie ziemlich schwach sein. Ob ihr die schwache Linie $\nu = 18083,7$, $\lambda = 5528,3$ entspricht (die einzige des Tl-Spektrums, die nicht zu den Doubletts gehört), ist zweifelhaft. Die Linien des Paares müssten hier schon ziemlich nahe bei einander liegen.

Auch bei andern Elementen sind meist im Ultrarot, Rot und Gelb enge Paare bzw. Tripletts zu erwarten, die zu dieser zweiten Hauptserie gehören. Man kann auch (wie z. B. bei K im Funkenspektrum von Eder und Valenta [1]) das schwache Paar 4309,3; 4305,1) Linien angeben, deren Lage, Intensität und Abstand die zu erwartenden sind; doch bleibt diese Zuordnung vor der Hand hypothetisch.

---

(1) J.-M. EDER u. E. VALENTA, *Denkschr. Wien. Akad.*, t. LXI, 1894, p. 347.

Zusammenstellung der Konstanten.

Hauptserie : $\frac{+\nu}{109675,0} = \frac{1}{(n + a_i + b/n^2)} - \frac{1}{[1,5 + a' + b'/(1,5)^2]^2}$, $n = 2, 3, 4 \ldots$, $i = 1, 2, 3$.

Zweite Nebenserie : $\frac{+\nu}{109675,0} = \frac{1}{(2 + a_i + b/4)^2} - \frac{1}{[m + a' + b'/m^2]^2}$, $m = 1,5,\ 2,5,\ 3,5 \ldots$, $i = 1, 2, 3$,

oder, wo die Hauptserie noch nicht beobachtet ist

Zweite Nebenserie : $+\nu = A_i - \frac{109675,0}{[m + \alpha + \beta 10^{-5}(A - \nu)]^2}$, $m = 1,5,\ 2,5,\ 3,5 \ldots$, $i = 1, 2, 3$.

ELEMENT	a	$(a_2 - a_1)10^5$	b	b/a	a'	b'	b'/a'	$0,5 + \alpha$	β
H	0	0	0	—	0	0	—		
He_I	+0,01150	—	−0,0072	−0,630	—	—	—	+0,86013	−0,0295
He_{II}	−0,06965	—	+0,0276	−0,400	+0,20221	−0,03017	−0,150	+0,70288	−0,0358
Li	−0,04751	—	+0,0261	−0,550	+0,09994	−0,02646	−0,265	—	—
Na	0,14595 0,14521	74	−0,1158	−0,794 −0,798	+0,15157	−0,05586	−0,368	+0,65205	−0,06107
Ka	0,29034 0,28750	284	−0,2239	−0,771 −0,779	+0,31789	−0,1076	−0,338	—	—
Rb	0,35948 0,34652	1296	−0,2688	−0,748 −0,776	+0,36669	−0,1401	−0,382	—	—
Cs	0,44293 0,41068	3225	−0,3286	−0,742 −0,801	+0,444..	−0,169..	−0,38..	—	—
Ag	—	—	—	—	—	—	—	0,46975	−0,2023 (1)
O_I	0,21230 0,21215 0,21204	15 11	−0,1530	−0,772	+0,27479	−0,06976	−0,254	—	—

(1) $\beta/\alpha = -0,4316$.

	$\alpha+0{,}5$	β	$\beta/\alpha+0{,}5$		$\alpha+0{,}5$	β	$\beta/\alpha+0{,}5$
Mg.	+0,37589	−0,2981	−0,793	Zn.	+0,28474	−0,2559	−0,900
Ca.	+0,56481	−0,4492	−0,796	Cd.	+0,34713	−0,3063	−0,880
Sr.	+0,63597	−0,5183	−0,813	Hg.	+0,30615	−0,2966	−0,970
Tl.	+0,25912	−0,2860	−1,102				

Innerhalb der Alkalimetalle steigen die Differenzen a_1-a_2 etwa wie die Quadrate der Atomgewichte; die Quotienten a_1-a_2/μ^2 sind ungefähr:

Na 0,142, K 0,189, Rb 0,180, Cs 0,186.

Bei Li müsste somit $a_2-a_1=5$ ungefähr sein, der Abstand der Komponenten der roten Li-Linie wäre zu 0,76 Å.-E. zu erwarten, wie schon Kayser und Runge hervorhoben [1].

Die Konstanten wachsen im allgemeinen mit dem Atomgewicht innerhalb einer Gruppe chemisch verwandter Elemente; sie sind deutlich periodische Funktionen des Atomgewichtes. Aber auch innerhalb der Alkalimetalle z. B. ergeben sie keine einfachen Kurven, ebensowenig wie die Konstanten von Kayser und Runge. Da die in den Grenzbedingungen auftretenden Grössen mit der Konstitution des Atomes vermutlich eng zusammenhängen werden, und die a, b nur durch einen komplizierten Rechnungsprozess aus ihnen entstehen, ist eine nicht ganz einfache Gestalt dieser Kurven wohl zu erwarten. Doch sind möglicherweise die Atomgewichte hier überhaupt nicht die richtigen Variabeln. Die Quotienten b/a_1, b/a_2, b'/a' variieren in den Alkalimetallen nur wenig; deshalb konnte die zweite Nebenserie von Cs so sicher bestimmt werden. Ebenso sind die $\beta\,(\alpha+0{,}05)$ annähernd konstant bei Mg, Ca, Sr und wieder bei Zn, Cd, Hg; sie sind aber auch periodischen

[1] Der von A. Hagenbach (*Ann. d. Phys.*, t. IX, 1902, p. 719) gefundene Wert für den Abstand der Li-Doppellinie ergibt a_1-a_2/μ^2 etwa doppelt so gross wie bei den andern Alkalimetallen; das Gesetz von Kayser und Runge, nach welchem a_1-a_2/μ^2 annähernd konstant ist in dieser Gruppe, wäre daher unrichtig, doch sind die Beobachtungen an nur einer Linie wohl noch nicht ganz entscheidend.

Schwankungen von einer Gruppe zur andern unterworfen. Die Serien von Ba sind noch nicht gefunden: nach obiger Beziehung wird die Gleichung der zweiten Nebenserie lauten:

$$\nu = A - \frac{109675{,}0}{\{m + \alpha[1 - 0{,}825.10^{-5}(A - \nu)]\}^2},$$

wobei der im Nenner vorkommende Wert von A nur roh angenähert bekannt zu sein braucht, sodass gleich die zweite Approximation die exakten Werte von α, A liefert.

Der Versuch, die im ersten Teil dieser Arbeit gegebene Theorie des Wasserstoffspektrums auf andere Elemente auszudehnen, führt also zu einer bemerkenswerten Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die aus der Theorie sich ergebende Formel übertrifft wesentlich an Genauigkeit, besonders bei den niedrigen Ordnungszahlen, das bisher Erreichte. Ferner veranschaulicht die Theorie in sehr einfacher Weise die exakte Universalität des sogenannten zweiten Koeffizienten; sie fordert gewisse quantitative Beziehungen zwischen verschiedenen Serien, endlich macht sie die qualitative Identität des Zeemaneffektes der Linien einer Serie und der Linien der Hauptserie und zweiten Nebenserie verständlich. Alle diese Forderungen sind in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Darüber hinaus zeigen die Koeffizienten der Formeln noch verschiedene einfache Beziehungen, sodass z. B. die bisher unbekannte zweite Nebenserie von Cs gefunden werden konnte. Wenn diese Resultate nun auch für die Fruchtbarkeit der Grundannahme der Theorie sprechen, so zeigen doch die gegebenen Entwickelungen selbst, dass die über die allgemeine mathematische Grundlage hinausgehenden speziellen Ansätze und Deutungen noch sehr willkürlich sind, wie ja die Natur des Problems es beim jetzigen Stand unserer Kenntnisse bedingt. Mein Bestreben war, die zunächst allein zugängliche mathematische Seite des Vorganges dem Verständnis näher zu bringen.

Ein Vorzug der Theorie der Lichtemission in ihrer gegenwärtigen Gestalt, nämlich ihre Einfachheit, wird durch die Identifikation mit dem hier behandelten schwingenden Systeme erheblich beeinträchtigt. Solange jedoch jenes einfachere Bild den Spektralgesetzen gegenüber versagt, muss es unentschieden bleiben, welche

der beiden Auffassungen der *Gesamtheit* der Erscheinungen gegenüber sich als einfacher erweisen wird.

Die Frage nach der Ausstrahlungsfähigkeit der Obertöne des Systems ist im Anhang erörtert.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Hrn. Geheimrat Voigt meinen Dank auszusprechen für das liebenswürdige Interesse, mit dem er dem Fortgang dieser Arbeit folgte.

Göttingen, Februar 1903.

ANHANG.

Die Ausstrahlung.

Nach den neueren Untersuchungen über die Strahlung im magnetischen Feld können wir uns unser lichterregendes, schwingendes System als negativ elektrisiert vorstellen. Erst durch diese negative Ladung, die wir uns zunächst gleichförmig über die Quadratfläche verteilt denken wollen, wird die Verkettung des Systems mit dem Aether und die Ausstrahlung bewirkt. Auf Grund der Erfahrung durften wir bei der Berechnung der Eigenschwingungen die hieraus entspringenden elektrodynamischen Kräfte und die Dämpfung vernachlässigen; wir betrachteten also die inneren Kräfte des Systems als gross gegen das von ihm ausgehende elektrische Feld. Wir führen dieses jetzt als kleine perturbierende Wirkung ein.

Es ist vielfach bemerkt worden, dass *die Obertöne von Systemen, wie das oben behandelte, nicht ausstrahlungsfähig sind*, weil zu jedem schwingenden Flächenelement in der Entfernung ε ein entgegengesetzt schwingendes vorhanden sei mit *genau derselben Ladung und Amplitude*, und ε im Verhältnis zur Wellenlänge λ klein ist. Es heben sich dann die elektrischen Kräfte bis auf Grössen von der Ordnung ε/λ für *eine* Knotenlinie, $(\varepsilon/\lambda)^2$ für *vier* etc. weg; die Intensitäten werden proportional $(\varepsilon/\lambda)^2$, $(\varepsilon/\lambda)^4$ etc. Da ε höchstens von der Grösse des Molekulardurchmessers ist, so wird $(\varepsilon/\lambda)^2 < 10^{-6}$, die vom ersten Oberton ausgestrahlte Energie ist verschwindend gegen die vom Grundton herrührende.

Dieser Einwand scheint jede auf Eigenschwingungen eines Kontinuum begründete Theorie der Spektren unmöglich zu machen, während doch, wie S. 20 hervorgehoben, die Formeln für Linien- und Bandenspektren entschieden auf solche Eigenschwingungen hindeuten. *Es scheint mir daher nicht unwesentlich zu zeigen, dass man gerade bei Systemen, wie das hier behandelte, in welchen elektrodynamische Kräfte neben elastischen auftreten, durch allerdings durchaus willkürliche, aber nicht allzu unwahrscheinliche Zusatzhypothesen diesem Einwand begegnen kann.* Bei rein elastischen oder rein elektrodynamischen dürfte dagegen ein analoger Ausweg kaum zu finden sein.

Wir machen folgende Annahme : die Stösse oder Kräfte, welche die Deformation hervorgebracht haben, sollen auch eine Änderung in der Verteilung der Elektrizität bewirken können, und zwar so, dass sich die gleichmässige Verteilung erst *nach einer gegen die Schwingungsperioden des Systems langer Zeit* wiederherstellt. Es könnten z. B. die in unmittelbarer Nähe der Fläche befindlichen Ionen aus ihrer Gleichgewichtslage sich entfernen und nur verhältnismässig langsam zu derselben zurückkehren. Rührt die Erregung etwa von einem nicht zentralen Stoss her, so wird nun die Dichte der Elektrizität auf der Fläche ebenfalls dissymetrisch. Zu jedem Punkt gibt es zwar einen entgegengesetzt schwingenden zweiten Punkt auf der Fläche, doch dessen Ladung ist nicht notwendig dieselbe wie die des ersten Punktes, sodass ein von Null verschiedenes, resultierendes elektrisches Feld sich ergibt. Danach müsste die relative Intensität der Serienlinien von der Art der Erregung abhängen, wie ja die Erfahrung auch zeigt.

Diese relative Intensität hängt aber noch von einem andern Umstand ab. Das Auge und die photographische Platte integrieren nämlich über eine sehr grosse Anzahl von Schwingungen. Sei z. B. die in zwei verschiedene Eigenschwingungen ursprünglich gesteckte Energie dieselbe; die erste Schwingungsform habe in der Zeit a ihre Energie bis auf einen kleinen Bruchteil ausgestrahlt, die zweite in der Zeit b, wo $b > a$. Tritt nun die nächste, dem Superpositionsprinzip *nicht* genügende Erregung erst nach einer Zeit $c \geqq b$ ein, so ist die in das Auge gedrungene Gesamtenergie dieselbe, die entsprechenden zwei Spektrallinien erscheinen gleich intensiv, nur ist nach der Dispersionstheorie die erste breiter als die zweite.

Da, wie oben betont wurde, die elektrischen Kräfte klein sein müssen gegen die inneren Kräfte des Systems, so widerspricht eine erhebliche Inhomogenität der Ladung keineswegs den Voraussetzungen. Eine einfache Abschätzung zeigt, dass man auf dieser Grundlage eine Reihe von Obertönen von vergleichbarer Intensität erhalten kann.

Nach den Serienformeln sind die Grundtöne der Spektren im äussersten Ultrarot oder Ultraviolett gelegen, und daher noch in keinem Spektrum beobachtet. Es handelt sich also zunächst nur um Vergleiche zwischen Obertönen.

II.

ZUR

THEORIE DER SERIENSPEKTREN.

Physikalische Zeitschrift, 4. Jahrgang, N° 14, Seite 406-408.

Bekanntlich zeigt Wasserstoff ausser der durch die Balmersche Formel so ausserordentlich genau dargestellten Serie, die von Kayser und Rydberg als « erste Nebenserie » erkannt ist, eine weitere, bisher nur in gewissen Sternspektren nachgewiesene Reihe von Linien, die der zweiten Nebenserie und der Hauptserie der Alkalispektren entsprechen.

Setzt man die Anzahl Wellen, die im Vakuum auf 1^{cm} entfallen (die sog. Wellenzahl), gleich ν, und zur Abkürzung $N = 109675,0$, so schreibt sich die Balmersche Formel

$$\pm \nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (m = 3, 4, \ldots . 32).$$

Die zweite Nebenserie ist dann durch

$$\pm \nu = N\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(m - 0,5)^2}\right]$$

gegeben, die Hauptserie durch

$$\pm \nu = N\left[\frac{1}{(1,5)^2} - \frac{1}{m^2}\right].$$

Der sehr auffallende Umstand, dass das erste Glied rechts stets das Quadrat einer rationalen Zahl ist, hat Balmer und Rydberg zur Vermutung geführt, dass die Formeln eigentlich mit *zwei* will-

kürlichen ganzen Zahlen m, n zu schreiben seien, so dass das H-Spektrum durch

$$(1)\qquad \pm \nu = N\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right], \qquad \pm \nu = N\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

dargestellt wird. Dabei sind zweite Nebenserie und Hauptserie in eine einzige Formel zusammengefasst. Die Untersuchungen von Rydberg und Runge und Paschen (1) haben gezeigt, dass dieser Zusammenhang beider Serien sehr wahrscheinlich auch bei den andern Elementen besteht.

Beim Versuche, schwingende Systeme zu finden, deren Perioden das Wasserstoffspektrum ergeben, bin ich daher in meiner demnächst erscheinenden Inauguraldissertation von den Formeln (1) ausgegangen. Es gelang mir, zwischen den Teilchen eines zweidimensionalen Kontinuums solche Fernwirkungen anzusetzen, dass die Schwingungszahlen des Systems von zwei willkürlichen ganzen Zahlen m, n abhängen und bei wachsenden Werten dieser Ordnungszahlen sich *einer endlichen Grenze nähern*, eine bei allen Spektren auftretende Eigenschaft der Serien, zu der in der theoretischen Physik kein Analogon bekannt ist.

Setzt man speziell voraus, dass das Kontinuum eine der Flächen eines Kubus sei, so erhält man genau die Formeln (1).

Bei den Spektren anderer Elemente sind so einfache und exakte Gesetze bisher nicht bekannt; man stellt die Serien nach Kayser, Runge und Paschens Untersuchungen durch Formeln von der Gestalt

$$\nu = A - \frac{B}{m^2} - \frac{C}{m^4} \qquad \text{oder} \qquad \nu = a + \frac{b}{m^2} + \frac{c}{m^3}$$

dar; Rydberg benutzt die Gleichung

$$\nu = A - \frac{N}{(m - \mu)^2}.$$

Hierin sind A, B, C, a, b, c, μ geeignete Konstanten. Auffallenderweise hat B resp. b bei allen Serien fast denselben Wert; Rydberg entnimmt die entsprechende Konstante N seiner For-

(1) Ueber die Zerlegung einander entsprechender Serienlinien im magnetischen Felde (*Berl. Ber.*, 1902, S. 380, 720).

mel direkt aus der Balmerschen Serie. Aus dem bei allen Elementen genau erfüllten « Gesetz der konstanten Differenzen » ergibt sich, dass die einfachsten Formeln sich wieder auf die Schwingungszahlen selbst, nicht, wie bei Eigenschwingungen meist der Fall ist, auf ihre Quadrate beziehen.

Von diesen Bemerkungen ausgehend, machte ich die Annahme, dass wir es bei allen Elementen mit den Schwingungen desselben Kubus wie bei Wasserstoff zu tun haben, so dass nur die Randbedingungen von Element zu Element variieren. Dann ergibt sich folgendes:

Aus der zunächst auftretenden Formel für das Quadrat der Schwingungszahl lässt sich die Wurzel ausziehen; es wird

$$\pm \nu = N\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right).$$

Hierin sind p, q Wurzeln gewisser transzendenter Gleichungen, sie lassen sich in semikonvergente Reihen von der Form

$$(2)\quad \begin{cases} p = m + \alpha + \dfrac{\beta}{m^2} + \dfrac{\gamma}{m^4} + \ldots, \\ q = n - \alpha' - \dfrac{\beta'}{n^2} + \dfrac{\gamma'}{n^4} - \ldots \end{cases}$$

entwickeln. Diese Reihen gelten nur für *positive Werte der ganzen Zahlen* m, n. Die Quadrate der negativen, m, n entsprechenden Wurzeln fallen mit den eben gegebenen zusammen. Positive und negative Schwingungszahlen haben dieselbe physikalische Bedeutung.

Der Koeffizient N *ist exakt universell.*

Bricht man die Formeln mit den ersten Gliedern ab, so erhält man

$$\pm \nu = N\left[\frac{1}{(m-\alpha)^2} - \frac{1}{(n+\alpha')^2}\right]$$

also die *Rydbergsche Formel als erste Annäherung*. Gleichzeitig erkennt man aber, dass dieselbe für niedrige Ordnungszahlen zu korrigieren ist und zwar nicht durch Variieren des Koeffizienten N, wie bisher versucht wurde, sondern durch Hinzufügen weiterer Glieder von (2). Als zweite Annäherung ergibt sich daher für eine

einzelne Serie ($n =$ const.)

$$\pm r = A - \frac{109675,0}{(m + \alpha - \beta m^2)^2} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

oder durch andere Entwickelungen

$$\pm r = A - \frac{109675,0}{\left[m - a - \frac{b}{(m - a)^2}\right]^2};$$

$$\pm r = A - \frac{109675,0}{[m - a' - b'(A - r)]^2}.$$

Dabei sind a, b, α, β, a', b' Konstanten; die Formeln unterscheiden sich nur durch Glieder höherer Ordnung.

Die Annäherung dieser Formeln an die Erfahrung bei gleicher oder kleinerer Anzahl der Konstanten wie bei Kayser und Runge und Rydberg, ist besonders für die Linien kleinster Ordnungszahl eine sehr viel bessere: auch die bisher so schlecht dargestellten roten Linien ergeben sich meist innerhalb der Fehlergrenzen. (S. Tabelle.)

Hauptserie.

n	λ	F	KR	R
2	5896,16	0,00	+78	0,00
	5890,19	0,00	+86	0,00
3	3303,07	0,03	0,00	+0,03
	3302,47	0,03	0,00	*
4	2852,91	0,05	0,00	—0,10
	2852,91 (1)	0,05	0,00	+0,07
5	2680,46	0,1	0,00	0,08
	2680,46	0,1	0,00	0,00
6	2593,98	0,1	+ 0,03	—0,13
	2593,98	0,1	+ 0,09	—0,08
7	2543,85	0,1	+ 0,10	—0,22
	2543,85	0,1	— 0,24	—0,19
8	2512,23	0,2	+ 0,5	—0,15
	2512,23	0,2	+ 06,	—0,12

(1) Diese Linien sind nicht mehr getrennt beobachtet.

Nebenserie.

$m+\frac{1}{2}$	λ	F	K.R.	R
1,5.....	5890,19	0,00	+334	0,00
2,5.....	11404	?	— 1,14	—0,9
3,5.....	6161.15	0,1	100	0,00
4,5.....	5153,72	0,1	0.00	—0.25
5,5.....	4752,19	0.15	0,00	—0,23
6,5.....	4546.03	0,2	—1,16	—0,21
7,5.....	4423.7	?	+1.7	—0.17

Hauptserie von Kalium.

n	λ	F	KR	R
2.......	7701,92	?	—161,3	0,00
3.......	4047,36	0.03	0,00	0.00
4.......	3447,49	0.03	0,00	+0,13
5.......	3217,76	0.03	0,00	0.00
6.......	3102,37	0.10	— 0,27	+0.10
7.......	3034,94	0,10	— 0,23	—0,20
8.......	2992,33	0,15	— 0,68	—0,19
9.......	2963,36	0,2	— 1,05	—0,13
10.......	2942.8	1,0	— 1,45	—0,27
2.......	7668.54	?	+159,6	—0,24
3.......	4044.29	0,03	0,00	+0,00
4.......	3446.49	0,03	0,00	+0,12
5.......	3217,27	0,03	0,00	—0,05
6.......	3102.15	0,10	+ 0,36	+0,40
7.......	3034,94	0,10	— 0,44	—0,05
8.......	2992.33	0,15	+ 0,80	—0,08
9.......	2963,36	0,2	+ 1,11	—0,07
10.......	2942.8	1,0	— 1,60	—0.23

Die von Rydberg vermuteten Beziehungen zwischen Hauptserie und zweiter Nebenserie sind so genau erfüllt, dass beide wirklich in eine einzige Formel zu vereinigen sind. Die Grenzen der beiden Nebenserien fallen zusammen, soweit die unsichere Beobachtung der Struktur der ersten Nebenserie es zu beurteilen erlaubt.

Der zweite Koeffizient kann direkt aus der Balmerschen For-

mel entnommen werden, dadurch wird die Grundannahme (universelle Natur des schwingenden Systems) sehr gestützt.

Die Konstanten ändern sich gesetzmässig von Element zu Element und zeigen noch gewisse angenäherte Beziehungen untereinander.

Ich habe die Serien der meisten Elemente unter Berücksichtigung der Dispersion der Luft berechnet und entnehme als Beispiel meiner ausführlicheren Arbeit, die für die Hauptserie und zweite Nebenserie von K und Na geltenden Formeln und Tabellen.

Die Doublets der Hauptserie und zweiten Nebenserie aller Alkalimetalle sind gegeben durch die Formeln

$$\pm \nu = N\left(\frac{1}{(n + a_1 + b/n^2)^2} - \frac{1}{\left[m + 0{,}5 + a' + \dfrac{b'}{(m + 0{,}5)^2}\right]^2}\right),$$

$$\pm \nu = N\left(\frac{1}{(n + a_2 + b/n^2)^2} - \frac{1}{\left[m + 0{,}5 + a' + \dfrac{b'}{(m + 0{,}5)^2}\right]^2}\right),$$

aus welchen sich für die Abstände der Komponenten bei der Nebenserie das Gesetz der konstanten Differenzen ergibt; aus diesem Grunde enthält die Tabelle nur die eine der Komponenten dieser Doublets.

Die Formeln sind aus den einzelnen Linien berechnet. Die Wellenlängen λ und die Fehlergrenzen F sind aus Kayser und Runges, Lewis und Lehmanns Bestimmungen entnommen. Die Fehler ($\lambda_{beob.} - \lambda_{ber.}$) sind unter R eingetragen. Kayser und Runge stellen die vier Serien durch vier Formeln mit im ganzen 9 unabhängigen Konstanten dar; sie haben also vier Konstanten mehr zur Verfügung. Die Abweichungen ihrer Formeln findet man unter K.R.

Natrium.

$a_1 = 0{,}14595$, $a_2 = 0{,}14521$; $b = -0{,}1158$;

$a' = -0{,}15157$; $b' = -0{,}05586$.

Kalium.

$a_1 = +0{,}29034$, $a_2 = -0{,}28750$; $b = -0{,}2239$;

$a' = +0{,}31789$; $b' = -0{,}1076$.

Die zweite Nebenserie stimmt mit der Beobachtung etwa wie bei Na.

Erwähnt sei noch, dass die Hauptserien von Mg, Ca, etc. durch Extrapolation sich im Gebiete der Schumannschen Strahlen ergeben.

Bezüglich der Litteratur verweise ich auf Kayser, *Handbuch der Spektroskopie*, Bd II, und auf meine Dissertation [1].

Göttingen, den 4. März 1903.

(Eingegangen 5. März 1903.)

---

[1] *Œuvres*, I, p. 1.

III.

ÜBER DAS

SPEKTRUM VON KALIUM.

Annalen der Physik, vierte Folge, Band 12, 1903, S. 444-446.

Das Spektrum von Kalium zeigt eine Anomalie, auf die schon Kayser und Runge [1] aufmerksam gemacht haben. Während bei allen andern Elementen die nach ihren Formeln vorausberechneten Linien wirklich aufgefunden werden konnten, schien die mit $\lambda = 5812,54$, $\lambda = 5832,23$ (Å.-E.) beginnende Nebenserie von K eine Ausnahme zu bilden. Der Ordnungszahl $m = 4$ sollte ein im Rot gelegenes Paar $\lambda = 6957,4$, $\lambda = 6985,4$ nach ihren Berechnungen entsprechen; in dieser Gegend konnten aber bisher keine K-Linien wahrgenommen werden.

In meiner Inaugural-Dissertation [2] habe ich auf Grund exakterer Formeln diese Serie aufs neue berechnet und für die fehlenden Linien die Wellenlängen 6936,4, 6964,7 angegeben. Die betreffende Serie erwies sich als erste Nebenserie; in ihrer unmittelbaren Nähe verläuft die zweite Nebenserie der das Paar 6911,2, 6938,8 angehört.

Die Vermutung lag nahe, dass bei der Unempfindlichkeit des Auges in dieser Spektralgegend die gewöhnlich benutzten Konkavgitter zu lichtschwach sein möchten. Versuche mit verschiedenen

---

(1) H. Kayser und C. Runge, *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, 1890.

(2) *Œuvres*, I, p. 60.

Lichtquellen und Apparaten führten in der Tat zur Auffindung einer schwachen Kaliumlinie in der betreffenden Spektralgegend. Als Lichtquelle erwies sich besonders günstig der von einer Akkumulatorenbatterie von 35 Volt gespeiste Bogen. Eine Linse entwarf auf dem Spalt des Spektralapparates ein *kleines* Bild des Bogens: das durch sechs Prismen zerlegte Licht wurde durch ein Fernrohr unter mässiger Vergrösserung beobachtet. War metallisches Kalium [1] in den Bogen eingeführt und die Dampfdichte sehr gross, so erschien neben dem bekannten Paar 6911, 6938 nach Seite der längeren Wellen eine bisher nicht beobachtete schwache, verbreiterte Linie, deren Zugehörigkeit zu K nach der Art ihres Erscheinens sehr wahrscheinlich war. Von hier bis zur Wellenlänge 7700 war keine weitere Linie sichtbar.

Wegen der Nähe der beiden von Kayser und Runge gemessenen Linien 6911, 6938 konnte die neue Linie auf diese als Normalen bezogen werden. Die Messung geschah durch Okularbeobachtungen mittels eines ebenen, auf ein Spektrometer von Krüss montierten Gitters. Die Trommeln der Mikroskope gestatteten die direkte Ablesung der Sekunden, und die Teilungsfehler des betreffenden kleinen Stücks des Kreises konnten direkt ermittelt und berücksichtigt werden. Das Gitter war ein auf Glas aufgetragener Celluloidabguss eines grossen Rowlandschen Gitters, seine Lichtstärke bei 6900 sehr befriedigend.

Aus einer Reihe von Beobachtungen ergab sich der Winkel der roten Linien 6911,2, 6938,8 zu 5′56″; von letzterer Linie zur neuen fand sich 5′30″; hieraus folgt für die neue Linie

$$\lambda = 6964{,}4 \pm 0{,}5.$$

Die Rechnung nach meinen Formeln fordert, wie oben bemerkt, $\lambda = 6964{,}7$; die Übereinstimmung ist also eine ausgezeichnete und die Zugehörigkeit der neuen Linie zu K ist damit festgestellt.

Die zweite, voraussichtlich noch schwächere Linie des Paares müsste bei 6936,4 liegen, also ganz nahe bei der starken und ziemlich breiten Linie 6938. Es ist nur wenig Hoffnung, die beiden Linien durch Okularbeobachtungen zu trennen. Bei geringer Dispersion konnte schon 6964 wegen der blendenden Nähe

---

[1] Auch ameisensaures Kalium erwies sich als günstig.

von 6938 und 6911 nicht wahrgenommen werden, trotzdem die Verhältnisse immer noch günstiger sind wie bei 6936.

Zunächst befremdet die geringe Intensität der neuen Linie im Vergleich zu den benachbarten Linien der zweiten Nebenserie. Aber einerseits nimmt die Intensität mit abnehmender Ordnungszahl in der zweiten Nebenserie meist rascher zu als in der ersten; anderseits zeigt die Beobachtung, dass die Absorption in den äuseren Schichten des Bogens und die dadurch bewirkte Selbstumkehr der Linie so gross sind, dass dieselbe manchmal ohne jeden hellen Rand als dunkler Streif auf schwachem kontinuierlichen Hintergrund erscheint und dann natürlich kaum zu sehen ist. Aehnliches war von Kayser und Runge schon bei andern K-Linien beobachtet worden.

Hr. Lenard [1] hat kürzlich gefunden, dass die beiden Nebenserien von Li, Na von verschiedenen Schichten des Bogens ausgehen; sie müssen daher, nach Lockyers Methode untersucht, aus Linien von verschiedener Länge bestehen. Dies Resultat konnte bei Na bestätigt werden, bei K dagegen erschienen die Linien beider Nebenserien von derselben Länge. Die oben hervor gehobene starke Absorption in den äussern Bogenschichten würde dieses Resultat vielleicht erklären: immerhin wird man schliessen, dass eine Einteilung der Linien nach dem Ort ihrer Emission im Bogen, wie sie Hr. Lenard vorschlägt, nicht dieselbe Sicherheit besitzt, wie sie durch Beobachtungen im magnetischen Feld, verbunden mit der Rechnung, erreicht wird.

Bei Anwendung sehr geringer Dispersion konnte unter Umständen bei grosser Dampfdichte das Aufleuchten von zwei wahrscheinlich zu K gehörigen Paaren zwischen 7120 und 7240 beobachtet werden, doch war eine Messung nicht möglich. Sie dürften dem nach Violett verbreiterten Na-Paar bei 5670 entsprechen.

Bonn, den 4. Juli 1903.

(Eingegangen 5. Juli 1903.)

---

[1] P. Lenard, *Ann. d. Phys.*, t. XI, 1903, p. 636.

IV.

SUR LA

PHOTOGRAPHIE DES RAYONS INFRAROUGES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. CXLIII, p. 167-169. Séance du 16 juillet 1906.

En 1880, M. Abney a fait connaître [1] qu'en préparant dans des conditions spéciales une émulsion de bromure d'argent dans du collodion, distillant l'éther, puis lavant et redissolvant le précipité, on obtient une nouvelle émulsion qui se distingue par une remarquable sensibilité aux radiations peu réfrangibles.

M. Abney avait cru atteindre dans le spectre prismatique solaire la longueur d'onde 2^{μ}, mais, en réalité, il était allé seulement jusqu'à $1^{\mu},4$ [2]. Malgré sa portée ainsi réduite, ce procédé dépasse encore dans l'infrarouge tout ce qu'a donné l'emploi des colorants sensibilisateurs. Il a été repris depuis, mais, semble-t-il, jamais avec succès.

J'ai établi les conditions de formation et la nature du composé sensible, ce qui m'a permis de connaître et d'éliminer les causes d'insuccès qui m'avaient d'abord arrêté comme mes prédécesseurs. J'en ai déduit des procédés nouveaux qui ont donné dès l'abord des résultats supérieurs à ceux d'Abney et que j'espère encore perfectionner notablement.

---

(1) *Philos. Trans.*, t. CLXXI, 1880; t. CLXXVI, 1881.

(2) Rubens (*Rapports présentés au Congrès de Physique,* t. II, p. 144; Paris, 1900) a même donné pour cette limite $1^{\mu},24$.

1° J'ai d'abord fait varier dans des proportions étendues toutes les données d'Abney. Dans tous les cas, sous l'influence de la chaleur, la sensibilité de l'émulsion aux rayons peu réfrangibles s'est trouvée considérablement augmentée, soit que l'azotate d'argent, soit que le bromure fussent en excès ; cependant, la transformation est plus prompte avec le premier, et se fait en partie, même à froid, si l'excès est considérable (par exemple 1g sur 5g de Br. Ag.).

Une émulsion obtenue au moyen de solutions *concentrées* d'azotate d'argent et de bromure de zinc ou d'ammonium devient plus sensible que les émulsions préparées suivant les données ordinaires.

La diminution de la pyroxiline, poussée aussi loin que possible, est très favorable.

Il faut remarquer, et c'est une des principales causes d'insuccès, qu'il n'est pas toujours possible d'atteindre, même approximativement, le nombre donné par Abney sans voir le bromure d'argent se précipiter en gros flocons ; en effet, selon son mode de préparation, la pyroxiline confère au mélange d'alcool et d'éther une viscosité variant, d'après certains auteurs, du simple au décuple ; or c'est elle qui détermine la quantité de bromure d'argent pouvant rester en suspension. J'ai dû, avec des pyroxilines faiblement nitrées, employer jusqu'à 1g,5 de pyroxiline sur 10g d'azotate d'argent, c'est-à-dire le décuple de ce qu'indique Abney.

L'émulsion décrite par Abney peut dès lors être caractérisée comme suit : plus grande concentration possible des solutions réagissantes, minimum de pyroxiline permettant, avec des précautions convenables, la formation d'une émulsion homogène.

Les bromures de zinc et d'ammonium sont à peu près équivalents ; on peut aussi remplacer le mélange d'alcool et d'éther par de l'alcool méthylique ou de l'acétone. La transformation du bromure d'argent est donc d'ordre purement physique ; elle est d'ailleurs toujours accompagnée d'une augmentation du diamètre des grains.

Enfin l'émulsion a été soumise sous pression à des températures allant jusqu'à 100° pendant 1 heure et 40° pendant 24 heures. Il n'a cependant pas été possible de dépasser la limite donnée par Abney, le bromure devenant granuleux et se décomposant.

Il est avantageux, après avoir distillé l'éther, de laisser refroidir,

de rajouter l'éther, d'agiter et de recommencer l'opération. On peut ainsi employer des solutions deux ou trois fois plus étendues que ne l'indique Abney, ce qui facilite la formation d'une émulsion bien homogène.

La sensibilité de l'émulsion à la lumière blanche s'est trouvée également augmentée, mais dans des proportions plus faibles.

2° On sait que, soumise à l'action de la chaleur, une émulsion au gélatinobromure augmente énormément de sensibilité pour les rayons très réfrangibles, moins pour les rayons jaunes et rouges, les variations de concentration des sels et de la gélatine ayant la même influence, *mutatis mutandis*, que dans l'émulsion d'Abney. Ce rapprochement m'a porté à croire qu'il s'agit, dans les deux cas, de la manifestation, différente seulement au point de vue quantitatif, d'une même propriété du bromure d'argent.

C'est ce que l'expérience a confirmé. Un précipité de bromure obtenu dans des conditions convenables soit dans l'alcool, soit dans l'eau, lavé et chauffé quelques minutes sous l'eau soit pure, soit, ce qui est plus avantageux, additionnée d'un peu d'azotate d'argent, donne, après émulsification dans la gélatine et nouvelle action de la chaleur, des plaques plus sensibles aux rayons infra-rouges que celles d'Abney. Après 5 minutes d'exposition au spectre des lampes Nernst, incomparablement moins riche en rayons calorifiques que celui du Soleil dont s'est servi Abney, on obtient une impression qui décroît régulièrement depuis le bleu jusqu'à $1^{\mu},4$ sans présenter les brusques variations des plaques traitées aux colorants. La couleur caractéristique bleue de l'émulsion d'Abney (observée par transparence) apparaît ici immédiatement et à froid. Je donnerai ailleurs les détails techniques.

V.

SUR
L'ORIGINE DES SPECTRES EN SÉRIES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. CXLIV, p. 634-636. Séance du 18 mars 1907.

On sait que les fréquences ν du spectre ordinaire de l'hydrogène et du spectre nouveau découvert par Pickering dans certaines étoiles sont données très exactement par les formules

$$(1)\quad \nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right), \qquad \nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}\right), \qquad (m = 3, 4, 5, \ldots);$$

où N est une constante. De tels systèmes de vibrations diffèrent essentiellement de tous ceux qui nous connaissons par l'existence d'une limite des fréquences pour $m = \infty$, et par l'absence du terme en ν^2 provenant de l'accélération. Les mêmes anomalies se retrouvent dans les autres spectres étudiés par Rydberg, Kayser et Runge.

Voici comment on peut concevoir physiquement un système donnant un tel ensemble de vibrations.

Soient A, B deux points fixes reliés par des fils inextensibles AC, BC au point C, milieu de la droite AB. Imprimons à ces fils un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de l'axe AB, la rotation du fil AC pouvant d'ailleurs être de même sens que celle du fil BC, ou de sens contraire. On suppose la longueur des fils très peu différente de $AC = BC = l$. L'axe des x

coïncidant avec AB, considérons le fil AC, et soit μ sa masse par unité de longueur, T_A sa tension, φ la distance nécessairement petite d'un élément du fil à l'axe; la force centrifuge de cet élément sera $\omega^2\mu\varphi\,dx$, et le fil aura la forme d'une sinusoïde plane donnée par l'équation

$$T_A\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\omega^2\mu\varphi=0.$$

$$T_A=\frac{\omega^2\mu}{e^2\pi^2}\,\frac{1}{m^2}\quad\text{ou}\quad T_A=\frac{\omega^2\mu}{e^2\pi^2}\,\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2},\qquad T_B=\frac{\omega^2\mu}{e^2\pi^2}\,\frac{1}{n^2},\qquad\ldots$$

$$(m,\,n=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

Par conséquent, le point C sera soumis à une force parallèle à l'axe et égale au signe près à T_A-T_B, c'est-à-dire à

$$\frac{\omega^2\mu}{e^2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)\quad\text{ou}\quad\frac{\omega^2\mu}{e^2\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}\right]\qquad(n,\,m=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

qui tendra à l'éloigner de sa position.

D'autre part, considérons un corpuscule mobile de masse M et de charge e dans un champ magnétique H parallèle à l'axe des x, et soient u, v, w les composantes de son déplacement supposé très petit. La résultante X des autres forces sera supposée nulle ou parallèle à H. On aura alors

$$M\frac{d^2u}{dt^2}=X,\qquad M\frac{d^2v}{dt^2}=\frac{eH}{c}\,\frac{dw}{dt},\qquad M\frac{d^2w}{dt^2}=-\frac{eH}{c}\,\frac{dv}{dt}$$

(c = vitesse de la lumière).

La projection du mouvement sur un plan perpendiculaire à l'axe est donc un cercle, et le temps de révolution T, ou plutôt la fréquence $v=\frac{2\pi}{T}$, sera donnée par

$$\pm v=\frac{eH}{Mc}.$$

On se trouve donc ici dans le cas très exceptionnel, comme l'a remarqué Lord Rayleigh [1], où ce n'est pas le carré de v, mais cette quantité elle-même qui s'exprime le plus simplement.

---

[1] *Phil. Mag.*, 5e série, t. XLIV, 1897, p. 356.

Supposons maintenant que les fils AC, AB fassent partie d'un système électrique animé du même mouvement de rotation, les points A, B étant fixes. Sous l'influence de la force $T_A - T_B$, le point C tendra à se déplacer suivant AB, et l'on peut admettre qu'il en résulte un changement dans la distribution des charges électriques, une sorte de polarisation proportionnelle à ce déplacement et qui s'y oppose; le déplacement restera très petit et la polarisation sera proportionnelle à $T_A - T_B$. La rotation du système produira d'ailleurs un champ magnétique qui sera également parallèle à AB et proportionnel à $T_A - T_B$.

D'après ce qui vient d'être dit, un corpuscule placé dans ce champ émettra une vibration circulaire dont la fréquence sera proportionnelle à $T_A - {}_B$, et l'on aura

$$(2) \qquad \pm\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad \text{ou} \qquad -\nu = N\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

$$(n, m = 1, 2, 3, \ldots),$$

N étant une constante. Pour $n = 2$, $m = 2, 3, 4$ ou $m = 2$, $n = 2, 3, 4$, on obtient les formules (1); à $m = 1$ et aux autres valeurs de n correspondent des lignes situées en dehors de la partie connue du spectre, mais dont l'existence est rendue probable par l'analogie des autres spectres [1].

A chacun des états d'équilibre dynamique, en nombre infini, de ce système tourbillonnant correspond une vibration émise par le corpuscule et l'ensemble de ces vibrations reproduit exactement le spectre de l'hydrogène.

Il est d'ailleurs évident qu'on peut établir de beaucoup de manières la proportionnalité entre la force $T_A - T_B$ et la force magnétique parallèle H.

En particulier, remplaçons C par une sphère chargée, de petites dimensions, et supposons qu'en A et B les fils s'attachent à deux sphères d'un rayon comparable à l, d'ailleurs identiques, et portant des charges de même signe que C; enfin la rotation de la sphère A et du fil AC sera de signe opposé à celle de B et BC. Si, au contact

[1] RYDBERG, *Rapports présentés au Congrès de Physique*, t. II, Paris, 1900, p. 312. — W. RITZ, *Annalen der Physik*, t. XII, 1903, p. 264; *Inaug. Diss.* Auszug.

du fil et de la sphère, il n'existe pas de forces tangentes à la surface de cette dernière (comme c'est le cas pour les fluides), on aura pour le fil la condition $\frac{d\varphi}{dx} = 0$; si, au contraire, le fil est fixé, on a $\varphi = 0$. Il existera dès lors en tout point de AB une force électrique et une force magnétique parallèles à cette droite, et nulles en son milieu; dans le voisinage de ce point, elles seront proportionnelles l'une à l'autre, ainsi qu'à la distance à ce point. En écrivant l'équation d'équilibre, on voit que C sera amené dans un champ magnétique proportionnel à $T_A - T_B$; si enfin $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ en C, cette sphère ne sera soumise perpendiculairement à l'axe AB qu'à l'action de la force magnétique et exécutera l'ensemble des vibrations de l'hydrogène, les constantes étant convenablement choisies.

En admettant que ce *même système* fasse partie d'un ensemble de structure plus complexe qui exerce des forces sur lui, on obtient d'autres spectres en séries; en particulier, on est conduit aux formules que j'avais obtenues [1] par une voie différente et qui représentent avec une grande exactitude les données de l'expérience et l'ensemble des lois de Rydberg.

---

(1) W. Ritz, *loc. cit.*

VI.

SUR

L'ORIGINE DES SPECTRES EN SÉRIES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. CXLV, p. 178-180. Séance du 16 juillet 1907.

Dans une précédente Communication ([1]) j'ai cherché à former un système émettant l'ensemble des vibrations de l'hydrogène en partant de l'hypothèse d'un électron P soumis uniquement à l'action d'un champ magnétique H. La fréquence v de la vibration circulaire qui en résulte est égale au produit de H par un facteur universel K. Conservant cette hypothèse, on obtient un résultat plus simple et plus conforme aux idées actuellement admises en attribuant ce champ H à un aimant rectiligne dans le prolongement duquel serait situé le point P. Soient r_1 et r_2 les distances de ses pôles à P et $\pm\mu$ leurs charges magnétiques, on aura

$$v = K\mu\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \qquad (r_1 < r_2).$$

Cette formule est identique avec celle de Balmer

$$v = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (m = 3, 4, 5, \ldots)$$

si l'on admet que l'aimant rectiligne est composé de $m - 2$ aimants égaux entre eux, de longueur a, posés bout à bout, et qu'il est sé-

---

([1]) *Œuvres*, V, p. 91.

([2]) Au nombre 1 correspondrait une série dans l'extrême ultraviolet; à 3, 4, ... des lignes infrarouges.

paré de P par deux ([2]) segments linéaires de même longueur, mais non aimantés. On a alors

$$r_1 = 2a, \qquad r_2 = 2a + (m-2)a = ma, \qquad N = \frac{K\mu}{a^2}.$$

Dans les diverses molécules d'une masse d'hydrogène rendue lumineuse on devra trouver toutes les modifications correspondant à 1, 2, 3, ... aimants élémentaires, celle qui correspond à n aimants étant d'autant moins fréquente que n est plus grand. Cette conception ne se heurte à aucune difficulté si l'on considère l'atome d'hydrogène comme fort complexe et si l'on remarque que tout corps de révolution, en rotation autour de son axe, peut, par une distribution convenable de sa charge électrique, devenir équivalent à un aimant linéaire.

Si le premier aimant a la longueur $\frac{a}{2}$, on obtiendra la formule de Pickering, pour les raies de l'hydrogène dans l'étoile ζ Poupe,

$$\nu = N\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(m+0.5)^2}\right] \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots).$$

S'il a la longueur α et si r_1 est quelconque, on aura la formule générale de Rydberg pour les séries spectrales

$$\nu = A - \frac{N}{(m-\beta)^2} \qquad \left(A = \frac{K\mu}{r_1^2},\ \beta = \frac{\alpha + r_1}{a}\right),$$

où N est une constante universelle si a est universel (comme on l'admet pour les électrons). Les trois quantités A, β, N sont indépendantes de m.

Enfin, si la longueur du deuxième, troisième, ... aimant diffère également de a, mais en s'en rapprochant à mesure que m augmente, on aura une représentation exacte des résultats de l'expérience. En particulier, si l'on suppose que, c, c' et β étant des constantes, on a

$$r_2 = m + \beta + \frac{c'}{r_2^2},$$

on obtient la formule

$$\nu = A - \frac{N}{[m - \beta - c(A-\nu)]^2} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

et j'ai montré ([1]) que cette formule représente les séries spectrales

([1]) W. RITZ, *Annalen der Physik*, t. XII, 1903, p. 264; *Inaug. Diss.* Auszug.

avec une très grande précision, tout en contenant moins de constantes arbitraires que celle de Kayser et Runge.

Lorsque, maintenant invariable la longueur et la position des autres aimants, on change la longueur du premier, on obtient une nouvelle série de lignes présentant avec la précédente des différences constantes de longueur d'onde. C'est un phénomène généralement observé dans les spectres de lignes.

Si, au contraire, conservant la position du premier pôle, c'est-à-dire la quantité r_1, on modifie encore la longueur du premier aimant, on obtient une série de doubles lignes convergeant vers la même limite. Ce cas est réalisé dans les séries principales et les satellites des séries secondaires.

Comme $r_2 > r_1$, et que le nombre m des aimants est au moins égal à un, les lignes (en général infrarouges) correspondant à $m = 0$ ou à des valeurs négatives de ν ne seront pas observées. Le premier cas se présente effectivement pour les premières séries secondaires de He, Cd, Zn, Hg, Tl, où les observations ont pu être faites.

VII.

MAGNETISCHE ATOMFELDER UND SERIENSPEKTREN.

Annalen der Physik. Vierte Folge. Band 25, 1908, p. 660-696.

Bekanntlich beziehen sich alle bis jetzt in den Linienspektren gefundenen, einfachen Gesetze, wie die Balmersche Formel, das Gesetz der konstanten Differenzen usw., auf die Schwingungszahlen, und nicht auf deren Quadrate. Es liegt hierin für die Erklärung dieser Spektren eine besondere Schwierigkeit, auf die Lord Rayleigh [1] aufmerksam gemacht hat: wenn ein mechanisches oder akustisches System kleine Schwingungen ausführt, so dass die Zeit nur in der Form eines Faktors sin $\nu(t - t_0)$ in die Lösung eingeht, so wird durch Bildung der Akzeleration, d. h. durch zweimalige Differentiation nach t, der Faktor ν^2 eingeführt; die Gleichung, welche die Schwingungszahl ν bestimmt, wird also das Quadrat von ν enthalten, und es gelingt nur in Ausnahmefällen, die Schwingungszahlen selbst einfach auszudrücken [2]. Lord Rayleigh schliesst hieraus, dass es sich bei den Spektren vielleicht um rein kinematische Beziehungen handle, in welche die Akzeleration nicht eingehe. Wie man sich diese zu denken hätte, und in welcher Weise man diese Annahme mit der Theorie der Dispersion, des Zeemaneffektes usw., bei welchen die Trägheitsreaktion eine wesentliche Rolle spielt, in Einklang bringen könnte, ist allerdings

(1) Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, 5e série, t. XLIV, 1897, p. 356.

(2) Verfasser hat einige solche, den Spektralgesetzen entsprechende Fälle untersucht (*Œuvres*, I, p. 1; *Ann. d. Phys.*, t. XII, 1903, p. 264; *Inaug. Diss.* Auszug). Die Komplikation der hierbei nötigen Annahmen, für die sich eine befriedigende physikalische Deutung nicht hat finden lassen, nötigt wohl, die dort gegebene Theorie fallen zu lassen, und ist eher geeignet, Lord Rayleighs Schlussweise zu stützen; vgl. Lord RAYLEIGH, *Phil Mag.*, 6e série, t. XI, 1906, p. 123.

kaum einzusehen. Der Schluss, dass zwischen den für den Zustand massgebenden Grössen nur Differentialgleichungen erster Ordnung in bezug auf die Zeit bestehen, lässt sich aber in anderer Weise aufrecht erhalten : man hat nur anzunehmen, dass jene Grössen *Geschwindigkeiten* sind, oder anders ausgedrückt, dass die wirkenden Kräfte nicht, wie gewöhnlich, von der *Lage* der Teile des Systems, sondern von deren Geschwindigkeiten abhängen. Dies ist bei *magnetischen Kräften* allgemein der Fall, und die Annahme intensiver magnetischer Atomfelder dürfte, auf Grund der im Gebiet des Magnetismus vorliegenden Tatsachen, kaum zu umgehen sein [1]. Durch diese Ueberlegung wird also die Hypothese nahegelegt, dass *die Schwingungen der Serienspektren durch rein magnetische Kräfte erzeugt werden*, und es soll im folgenden gezeigt werden, dass diese Annahme in einfacher Weise zum Verständnis der Gesetze der Serienspektren *und der anormalen Zeemaneffekte* führt.

Es sei e die Ladung, m die Masse eines elektrischen Teilchens; befindet sich dasselbe in einem magnetischen Feld H parallel zur Z-Achse, so ist

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e\mathrm{H}}{c}\frac{dy}{dt}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{e\mathrm{H}}{c}\frac{dx}{dt}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x = \mathrm{A}\sin\frac{e\mathrm{H}}{mc}(t-t_0), \qquad y = \mathrm{A}\cos\frac{e\mathrm{H}}{mc}(t-t_0), \qquad z = z_0 + \mathrm{B}t,$$

wo A, B, z_0, t_0 willkürliche Konstanten bedeuten. Die Bewegung ist also, wie bekannt, helikoidal ; sie zerfällt in eine gleichförmige Translation parallel H, und eine zirkulare Schwingung in einer Ebene senkrecht zu H, deren Schwingungszahl proportional ist H. Ist das Feld nicht homogen, so muss dafür gesorgt werden, dass x, y, $z - z_0$ sehr klein bleiben. Dies wird der Fall sein, wenn A klein ist, und die elektrische Ladung an eine Ebene (oder ein Flächenelement) senkrecht zu H gebunden ist; oder auch wenn quasielastische Kräfte der Form $-k^2x$, $-k^2y$, $-k^2z$, die sehr klein gegen $\frac{e\mathrm{H}}{c}\frac{dx}{dt}$, $\frac{e\mathrm{H}}{c}\frac{dy}{dt}$ sind, eingeführt werden, und schwache Er-

---

(1) Vgl. insbesondere P. WEISS, *L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique* (*Bull. Soc. franc. de Physique*, 1907; *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 1136; t. 145, 9 et 30 décembre 1907).

regung vorausgesetzt wird. Ist für die in Betracht kommende Bewegung das Feld nur unvollkommen homogen, so resultiert eine Verbreiterung der der Schwingungszahl $\nu = e\mathrm{H}/mc$ entsprechenden Spektrallinie.

Die nächstliegendste Annahme, die man über den Ursprung des Feldes H machen kann, ist wohl, es einem Molekularmagneten zuzuschreiben: diese Gebilde spielen ja in der Theorie des Magnetismus eine wesentliche Rolle. Sei $\pm\mu$ die Polstärke, l die Länge des Magneten; der Symmetrie halber liege die Ladung e auf der Verlängerung desselben, im Abstand r vom nächsten Pol. Dann ist

$$\pm \mathrm{H} = \mu\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right],$$

mithin die Schwingungszahl

$$\pm \nu = \frac{\mu e}{mc}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2}\right]. \tag{1}$$

Vergleicht man diese Formel mit der Balmerschen (N = univers. Konstante)

$$\nu = \mathrm{N}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad n = 3, 4, 5, \ldots, \tag{2}$$

mit der Rydbergschen Serienformel

$$\nu = \mathrm{N}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(n+b)^2}\right], \tag{3}$$

und den von mir (*loc. cit.*) gegebenen

$$\nu = \mathrm{N}\left\{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{[n+\alpha+\beta(\mathrm{A}-\nu)]^2}\right\}, \tag{4}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{N}/a^2 = \text{Grenze der Schwingungszahlen}$$

und

$$\nu = \mathrm{N}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\left(n+a+\dfrac{b}{n^2}\right)^2}\right], \tag{5}$$

so springt die Analogie sofort ins Auge, und ist um so bemerkenswerter, als die Gesetze der Spektralschwingungen ja so gänzlich von allem sonst Bekannten abweichen. Verfolgt man also genauer den hiermit möglich gemachten Schluss von den Serienspektren

auf die Elementarmagnete, so wird man mit einigem Grund hoffen können, dadurch einen Einblick in Molekularkräfte und -struktur zu gewinnen. Allerdings kann die Zukunft erst entscheiden, ob das Bild ein allseitig zweckmässiges ist.

Die Balmersche Formel sagt nun aus, dass die Länge l des Magneten ein Vielfaches einer bestimmten Länge sei, d. h. dass man jedes, den Linien des Wasserstoffs entsprechende Magnetfeld dadurch erhält, dass man eine Anzahl n untereinander identischer Magnete von der Länge s Pol an Pol fügt, so dass $l = ns$ ist. Eine einfachere Anordnung der Elementarmagnete als die hiermit geforderte ist wohl kaum denkbar. Der Abstand r bleibt hierbei konstant; setzt man ihn gleich as, so folgt

$$(6) \qquad \nu = \frac{\mu e}{s^2 mc}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a - n)^2}\right], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die Schwingungszahlen nähern sich also einer Grenze für $n = \infty$, und bei der Entwickelung nach Potenzen von $1/n$ ist der Koeffizient von $1/n^2$ universell, falls die Elementarmagnete und e/mc bei allen Elementen dieselben sind.

Dass der Koeffizient von $1/n^2$ universell sei, ist von Rydberg ausgesprochen worden; der Beweis dafür war erst auf Grund der sich der Erfahrung sehr genau anschliessenden Formeln (4) und (5) möglich [vgl. Inaug.-Diss. des Verf. (*loc. cit.*).

Die Hypothese der magnetischen Atomfelder führt also ohne Schwierigkeit zur Erklärung der Grenze der Schwingungszahlen, welche bekanntlich die Serienschwingungen so scharf gegen alle aus andern Gebieten der Physik bekannte Schwingungen abscheidet. In der Nähe der Grenze rührt das Feld nur noch vom ersten Pol her.

Soll endlich (6) mit der Balmerschen Formel (2) identisch werden, so hat man den noch willkürlichen Abstand as der Ladung e zum nächsten Pol gleich der doppelten Länge eines Elementarmagneten zu nehmen, also $a = 2$ zu setzen [1]. Diese einfache Beziehung besteht jedoch nur bei Wasserstoff und deutet auf einen besonders einfachen Aufbau des Wasserstoffatoms aus denselben Korpuskeln, die die Elementarmagnete bilden.

---

[1] Über diese Zahl 2 vgl. unten p. 105.

Die grosse Genauigkeit der Balmerschen Formel erfordert, dass das Coulombsche Gesetz des reziproken Quadrates der Entfernung auch in Molekularentfernungen noch strengste Gültigkeit habe.

Superponiert sich zu diesem von n abhängigen Magnetfeld H_n ein anderes H, so ergibt sich eine neue Reihe von Linien. Ist c an ein Flächenelement senkrecht zu H_n gebunden, wie oben angenommen wurde, so sind die ν_n derselben gegen die vorigen um die konstante Grösse $(e/mc)\,H\cos(\sphericalangle\, H H_n)$ verschoben. Liegen dagegen schwache elastische Reaktionen vor, so gilt dies nur, falls H parallel H_n ist. Es ist daher nach diesen Vorstellungen zu erwarten, dass *Systeme konstanter Schwingungsdifferenzen besonders häufig angetroffen werden* : dies entspricht dem Gesetz der konstanten Differenzen, welches bekanntlich auch bei Spektren gilt, in welchen Serien bis jetzt nicht gefunden worden sind.

Gibt man dem ersten Elementarmagneten eine von s abweichende Länge $s + \varepsilon s$ und variiert in geeigneter Weise die Entfernung $r = as$, so resultiert die allgemeine Rydbergsche Serienformel (3), wobei $n = 1, 2, 3\ldots$ und $b = a + \varepsilon$.

Lässt man die Entfernung von der elektrischen Ladung zum ersten Pol unverändert, und variiert die Länge des ersten Magneten, so erhält man eine neue Serie von Linien, die mit der ersten eine gemeinsame Grenze haben. Dies ist bekanntlich der Fall bei den beiden Nebenserien und bei den Doubletts oder Tripletts der Hauptserien.

Die Anzahl der Magnete muss natürlich $\geqq 1$ sein. Legt man der willkürlichen Zahl n der Rydbergschen Formel eine absteigende Reihe von Werten n, $n - 1$, ... bei, und erhält man bei n_1 einen *negativen* Wert der Schwingungszahl, *so wird diesem Wert keine Linie der Serie entsprechen*. Aber selbst bei einem positiven Werte kann, falls $\varepsilon > 0$ ist, die Zahl der Magnete Null sein, so dass an der berechneten Stelle keine Linie liegt. Damit ist ein sehr merkwürdiges Resultat der neueren Beobachtungen erklärt : die Linien der ersten Nebenserie, welche der Linie $n = 2$ der Balmerschen Formel entsprechen (für welche sich $\nu = 0$ ergibt), fallen bei den Elementen He, Cd, Zn, Hg, Tl in das bis jetzt durchforschte Gebiet und können auf Grund der Formel (4) genau berechnet werden. Statt in dieser Gegend der Spektren Linien

von besonderer Intensität zu finden, wie zu erwarten war, haben Runge und Paschen bei He [1], Hermann [2] bei Cd, Zn, Hg, Kayser und Runge bei Tl überhaupt keine Linien wahrgenommen. Besonders auffallend ist das Beispiel von Tl, für welches die Linie sehr genau berechnet werden kann [(4) reduziert sich hier auf (3) sehr annähernd] zu $\lambda = 5417,0$. Sie sollte also in der Nähe der grünen Thalliumlinie 5351 liegen, welche der zweiten Nebenserie angehört, und sie bei Anwendung des elektrischen Bogens an Intensität übertreffen. Aber selbst wenn diese blendend auftrat, konnte Verfasser keine Spur der gesuchten Linie wahrnehmen. Die Hypothese einer ungewöhnlich vollständigen Selbstumkehr der Linie (wofür Beispiele vorliegen) wurde dadurch geprüft, dass hinter den Bogen oder die Flamme eine Nernstlampe gestellt wurde; auf diesem kontinuierlichen Hintergrund hätte sich nun die Linie dunkel abheben müssen, was nicht der Fall war.

Gehen wir zur Interpretation der die Beobachtungen in den meisten Fällen sehr genau darstellenden Formel (4) über, so besagt dieselbe, dass bei andern Elementen als Wasserstoff nicht nur der Abstand der schwingenden Ladung e zum nächsten Pol von Serie zu Serie variieren kann, sondern dass auch der Abstand des zweiten Poles von e (und vom ersten) kein einfach additives Gesetz befolgt. Die Abweichung nimmt jedoch ab, wenn der Abstand von e (die Zahl n) zunimmt; sie ist proportional $A - \nu$, d. h. dem reziproken Quadrat der Entfernung von e. Diese Wechselwirkung zwischen Atom und Pol, die besonders bei höheren Atomgewichten sich fühlbar macht, muss aber ihrer Form nach als unsicher gelten, ja selbst der Schluss, dass das Feld *stets* von *einem Linearmagneten* und nur einem herrühre, kann aus der Erfahrung nicht mit Sicherheit gezogen werden, da (4) mancherlei Transformationen und Entwickelungen zulässt, so z. B. die Reihenentwickelungen

$$(7) \qquad \nu = A - \frac{N}{n^2} + \frac{B}{n^3} + \frac{C}{n^4} + \ldots,$$

$$(8) \qquad \nu = A - \frac{N}{(n+\alpha)^2} + \frac{C}{(n-\alpha)^4} + \ldots.$$

---

[1] C. Runge und F. Paschen, *Astrophys. Journ.*, Janv. 1896, p. 16.

[2] H. Hermann, *Inaug.-Diss.*, Tübingen 1904.

aus welchen man schliessen würde, dass unter der Einwirkung des Atoms die Verteilung des Magnetismus eine andere geworden ist. Die Serie (7) unterscheidet sich von den Formeln von Kayser und Runge, Runge und Paschen dadurch, dass der zweite Koeffizient nicht veränderlich, sondern universell ist. Bei gleicher Zahl willkürlicher Konstanten ist diese Formel den eben genannten entschieden überlegen; zu einer ersten Berechnung einer Serie ist sie anderseits viel geeigneter als (4): für die Grenze A ergibt sich überdies fast derselbe Wert wie aus (4). Für die definitive Darstellung und die Extrapolation ist letztere Formel allerdings vorzuziehen. Dieselbe besitzt auch [wie (8)] den Vorzug, dass der niederste Wert der Ordnungszahl, für den noch eine Linie zu erwarten ist, und der durch die Analogie der Spektren zwar häufig, aber nicht immer *a priori* festgestellt werden kann, nicht bestimmt zu werden braucht: Erhöhung von n um eine Einheit kann durch Verkleinerung von α aufgehoben werden.

Es wird unten gezeigt werden, dass Längenänderungen der Elementarmagnete durchaus nicht mit Längenänderungen der Korpuskeln verbunden zu sein brauchen, für die sie das abgekürzte Symbol bilden. Auch lässt sich, durch Einführung zweier Magnete an Stelle des einen, das einfache additive Gesetz der Verbindung der Magnete aufrecht erhalten. Solange aber neue numerische Beziehungen sich aus solchen Spekulationen nicht ergeben, scheint es mir richtiger, mich auf die Betrachtung des allgemeinen Charakters der Seriengesetze zu beschränken.

Bei Wasserstoff war der Abstand auch des ersten Poles von e durch dieselben Korpuskeln bestimmt, wie der des zweiten, und es ist daher plausibel, dass die Lage des ersten Poles durch eine ähnlich gebaute Formel sich darstellen lässt als Funktion der Anzahl dieser Korpuskeln, wie die Lage des zweiten Poles, d. h. dass die Atomkräfte auf beide einen ähnlichen Einfluss haben. Damit erhalten wir die Interpretation des Satzes von Rydberg, dass Hauptserie und zweite Nebenserie durch die zwei Formeln gegeben seien:

$$\nu = N\left[\frac{1}{(1+\alpha)^2} - \frac{1}{(n-\beta)^2}\right] \quad \text{(Hauptserie)},$$

$$\nu = N\left[\frac{1}{(1+\beta)^2} - \frac{1}{(n+\alpha)^2}\right] \quad \text{(2. Nebenserie)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und die Richtigkeit der damit ausgesprochenen Beziehungen zwischen den zwei Serien hat sich auf Grund der genaueren Formeln bestätigt [1]. Ob aber in diesen Formeln statt 1 auch eine willkürliche ganze Zahl m gesetzt werden darf, wie Rydberg annimmt, so dass noch eine unbegrenzte Reihe neuer Serien im Infrarot zu erwarten wäre, ist bisher unentschieden; die Zahl 2 der Balmerschen Formel kann ebensogut durch den Bau des Atoms aus den besprochenen Korpuskeln bedingt sein, wie sie auch als Spezialfall einer willkürlichen ganzen Zahl aufgefasst werden kann: denn für 3, 4, 5 ... an Stelle von 2 erhält man voraussichtlich wesentlich schwächere Linien, die im Infrarot liegen, während für 1 sich Schumannsche Strahlen ergeben. Allerdings entspricht der Formel

$$\nu = N\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)$$

eine der intensivsten Linien des von Lyman [2] neuerdings ausgemessenen, extrem-ultravioletten Wasserstoffspektrums: $\lambda_{\text{ber.}} = 1215,3$; $\lambda_{\text{beob.}} = 1216,0$ (in der vorläufigen Mitteilung $\lambda = 1215,6$). Die nächste Linie der Serie $\lambda = 1025,7$ liegt an der Grenze des beobachteten Bereichs; die letzte von Lyman wahrgenommene Linie ist 1033, so dass 1025, wenn überhaupt vorhanden, nicht intensiv sein kann. Die Zuordnung bleibt daher unsicher. Ebensowenig verlangt die vorgetragene Theorie, dass jeder Nebenserie eine Hauptserie entspreche.

Es entsteht nun die Frage, ob sich dieses Schema der Linearmagnete nicht etwa in Widerspruch befindet zur Elektronentheorie, welche den Magnetismus aus der Bewegung der Elektronen abzuleiten sucht, und von der Hypothese magnetischer Massen absieht. Hierbei kommen vor allem in Betracht zirkulierende Bewegungen der elektrischen Ladungen, insbesondere innerhalb des Atoms und gleichförmige Drehung elektrischer Rotationskörper und ihrer Achse [3].

Was zunächst die ersteren betrifft, so ist nicht anzunehmen, dass sie merkliche Kräfte auf das schwingende Elektron ausüben.

---

[1] Vgl. *Inaug.-Diss.* des Verf., *loc. cit; Œuvres*, I, p. 1.

[2] Th. Lyman, *Astrophys. Journ.*, t. XIX, 1904, p. 263; t. XXIII, 1906, p. 181.

[3] W. Voigt, *Ann. d. Phys.*, t. IX, 1902, p. 115.

Denn — und hierauf hat Lord Rayleigh [1] aufmerksam gemacht — die Feinheit mancher Spektrallinien ist eine so grosse, dass sie eine ausserordentliche Stabilität des Systems und eine Unveränderlichkeit der wirkenden Kräfte unter allen möglichen Bedingungen verlangt, die mit zirkulierenden Bewegungen der Elektronen schwer vereinbar erscheinen. Nimmt man etwa kreisförmige Bewegungen an, so müssten Radius, relative Lage der Bahn und Geschwindigkeit bei allen Atomen eines Elementes auf mindestens $\frac{1}{1\,000\,000}$ ihres Betrages (bei sehr feinen Linien) dieselben sein und dauernd bleiben, und dabei die Zahl der Teilchen genügend gross sein, um den Linienreichtum mancher Spektren zu erklären. Man wird solchen Bewegungen wohl eher nur einen schwachen perturbierenden, die Linie mehr oder weniger verbreiternden Einfluss zuschreiben.

Leichter verständlich ist eine sehr angenäherte relative Unveränderlichkeit der Drehgeschwindigkeit von Rotationskörpern, wenn diese als sehr gross vorausgesetzt wird: diese Drehung bedingt überdies, im Gegensatz zu der zirkulierenden Bewegung, *keine Ausstrahlung.*

Setzt man Oberflächenladung voraus, so gilt zunächst der Satz, *dass man für jeden um seine Achse sich gleichförmig drehenden Rotationskörper die Elektrizität in der Weise auf der Oberfläche verteilen kann, dass derselbe im ganzen Aussenraum einem Linearmagneten äquivalent wird, dessen Pole* P_1, P_2 *im Innern des Körpers auf dessen Achse eine vorgeschriebene Lage haben*, und dass die magnetische Kraft im Innern des Körpers endlich und stetig bleibt. Denn in diesem Falle existiert im ganzen Raum ein magnetisches Potential Ψ, welches überall der Gleichung $\Delta\Psi = 0$ genügt, und im Aussenraum die Form hat

$$\Psi_a(x, y, z) = k\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

wo r_1, r_2 die Abstände von (x, y, z) zu den im *Innern* des Körpers gegebenen Polen P_1, P_2 sind. Beim Durchgang durch die

---

[1] Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, 6e série, t. XI, 1906, p. 123; vgl. auch JEANS, *Phil. Mag.*, 6e série, t. II, p. 421; t. XI, p. 604.

Fläche ist H unstetig. Durch Integration der Gleichungen

$$\operatorname{curl} H = \frac{4\pi\rho v}{c}, \qquad \operatorname{div} H = 0$$

über ein an der Oberfläche gelegenes, geeignet geformtes Volumelement und Grenzübergang findet man, dass der Sprung von H durch einen in der Fläche senkrecht zur Geschwindigkeit v liegenden Vektor von der Grösse $4\pi\sigma v/c$ dargestellt wird ($\sigma =$ Oberflächendichte). Derselbe liegt somit in der Meridianebene, und man hat, unter n_a, n_i die äussere und innere Normale verstanden, unter ds ein Linienelement des Meridians:

$$\frac{\overline{\partial\Psi_i}}{\partial n_i} + \frac{\overline{\partial\Psi_a}}{\partial n_a} = 0; \qquad \frac{\overline{\partial\Psi_i}}{\partial s} - \frac{\overline{\partial\Psi_a}}{\partial s} = \frac{4\pi\sigma v}{c} = \frac{4\pi\sigma\omega R}{c},$$

wo R der Abstand von der Achse, ω die Drehgeschwindigkeit ist. Aus diesen Bedingungen bestimmt sich Ψ_i bis auf eine additive Konstante. Sei nämlich $\Gamma(x, y, z, a, b, c)$ die zweite Greensche Funktion, welche also in bezug auf x, y, z den Bedingungen

$$\Delta\Gamma = 0, \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial n} = -\frac{4\pi}{F}$$

($F =$ Oberfläche) genügt, und im Punkte (a, b, c) unendlich wird wie

$$-[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Seien $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ die Koordinaten von P_1 und P_2. Wird

$$\Psi_i = \frac{K}{r_1} - \frac{K}{r_2} + K\Gamma(x, y, z, a_1, b_1, c_1) - K\Gamma(x, y, z, a_2, b_2, c_2) + \text{konst.}$$

gesetzt, so erfüllt diese Funktion die gegebenen Bedingungen und bleibt im Innern stetig und endlich; es gibt also, vom Vorzeichen abgesehen, die Formel

$$(9) \qquad \frac{4\pi\sigma\omega R}{cK} = \frac{\overline{\partial\Gamma}}{\partial s}(x, y, z, a_1, b_1, c_1) - \frac{\overline{\partial\Gamma}}{\partial s}(x, y, z, a_2, b_2, c_2)$$

die verlangte Oberflächendichte.

Für die Kugel sei P_1, P_2 als x-Achse gewählt, und der Ursprung

der Koordinaten im Mittelpunkt. Dann ist (¹), bis auf eine additive Konstante :

$$\Gamma(x, a_1) = \frac{1}{a}\log\left(a^2 - a_1 x + a\sqrt{a^2 - 2a_1 x + a_1^2}\right)$$

$$- \frac{2}{\sqrt{a^2 - 2a_1 x + a_1^2}} = \frac{1}{a}\log(a^2 - 2a_1 x + ar_1) - \frac{2}{r_1}$$

und da $dx/ds = R/a$, so ergibt sich

$$(10) \qquad \frac{4\pi\sigma(x)\omega a}{eK} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}\log\frac{a^2 - a_1 x - ar_1}{a^2 - a_2 x + ar_2} - \frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2}\right\}.$$

Die in (7) und (8) gegebenen Formeln würde man durch eine Verteilung der Elektrizität interpretieren können, die von der oben angegebenen mehr oder weniger abweicht. So ist z. B. das Feld eines Zylinders, der durch Juxtaposition von n identischen Zylindern entsteht, durch eine Reihe von der Form (8) gegeben, falls die Dichte σ konstant ist. Entspricht σ aber der Formel (9), so fallen die höheren Glieder der Entwickelung weg, der Zylinder ist einem Linearmagneten streng äquivalent, was vorher nur angenähert der Fall war.

Dabei können die Pole beliebig nahe den Endflächen des Zylinders bz. den Endpunkten der Achse liegen; es wird dann die Dichte σ an diesen Punkten sehr gross ; in bezug auf seine elektrostatische Anziehung verhält sich der Körper nahezu als ob seine Ladung in P_1 und P_2 konzentriert wäre. (Im Grenzfall wird σ unendlich wie die dritte Potenz der reziproken Entfernung von der Achse: dieser Fall ist daher auszuschliessen.)

Reiht man eine Anzahl derartiger, untereinander identischer Rotationskörper mit abwechselnd entgegengesetzter Ladung und Rotation und gemeinsamer Achse aneinander, so ergibt sich ein sehr stabiles System, welches einem Magneten von der n-fachen Länge der einzelnen Körper beliebig nahe äquivalent ist.

Im Falle der Balmerschen Formel hat man sich an den Endpunkt des so konstruierten Magneten zwei ebensolche Rotationskörper angereiht zu denken, die aber entweder ungeladen sind,

---

(¹) F. Neumann, *Potential- und Kugelfunktionen*, Leipzig, 1887, p. 272. — H. Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik*, t. I, Braunschweig, 1900, p. 457.

oder keine Drehgeschwindigkeit besitzen. Nimmt man das letztere an und berücksichtigt, dass die elektrische Ladung, wie vorausgesetzt, nahezu auf zwei Punktladungen sich reduziert, so kann man beim letzten Körper der Reihe die eine dieser Ladungen mit der früher angenommenen oszillierenden Punktladung e identifizieren, während die andere durch die ihr sehr naheliegende entgegengesetzte Ladung des nächsten Körpers sehr kräftig angezogen wird, und einen festen Drehpunkt für die Oszillationen darstellt [1]. Voraussetzung ist allerdings, dass die übrigen Ladungen des Atoms keine der Verschiebung des Endpunktes aus der Ruhelage proportionale, merkliche Kraft ausüben.

An diese besonders einfache Interpretation der Balmerschen Formel kann man versuchen, eine Hypothese über den, in den meisten Fällen nicht unbedeutenden Unterschied im Charakter der beiden Nebenserien und ihre gegenseitige Beziehung zu knüpfen. Bei Wasserstoff hat bekanntlich Pickering die zweite Nebenserie in den Spektren gewisser Sterne entdeckt, und ihre Gleichung lautet

$$\nu = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}\right), \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

so dass man die Balmersche Serie als den geraden, die Pickeringsche als den ungeraden Ordnungszahlen einer einzigen Serie entsprechend betrachten kann. Man wird es nun als plausibel betrachten dürfen, dass in unserem Modell, wo negative und positive Ladungen abwechseln, die geraden und die ungeraden Ordnungszahlen in der Tat einen verschiedenen physikalischen Charakter der Linien bedingen können, und dass die Abtrennung zweier Körper, die dann ein neutrales System bilden, andere Energieformen erfordert als die eines einzigen Körpers. Besitzt das Atom eine negative Ladung, und hat z. B. unser System bei der Ordnungszahl n ebenfalls eine resultierende negative Ladung, so wird bei den Ordnungszahlen $n + 1$, $n - 1$, die Gesamtladung des Atoms kleiner sein oder sogar ihr Vorzeichen ändern. Bei höheren Atom-

---

[1] Es hätte dann an Stelle von e/m eine andere Grösse zu treten, in der m ein elektromagnetisches Trägheitsmoment, e eine ähnlich gebaute Grösse bedeutet. Dies ändert nichts Wesentliches in den Darlegungen.

gewichten können, wie oben gezeigt wurde, die übrigen im Atom anwesenden Ladungen die Verteilung der Elektrizität auf unserer Reihe von Rotationskörpern modifizieren. Veränderung des Vorzeichens der Gesamtladung derselben wird daher von Einfluss sein, so dass für gerade und ungerade n, d. h. für erste und zweite Nebenserie, die Abweichung von der Wasserstoffformel verschieden sein können. Bei den Alkalien ist, ganz im Sinne dieser Darlegung, das Vorzeichen dieser Abweichung bei den beiden Nebenserien ein entgegengesetztes.

Ich habe nicht geglaubt, diese Betrachtungen unterdrücken zu müssen, so sehr sie auch unsicher sind. In einem Gebiet, in welchem alle Ansätze fehlen, können auch solche Analogien von Wert sein.

Es sei noch bemerkt, dass man aus bekannten Sätzen leicht ableitet, dass, wenn die Ladung einer Kugel aus homogenen, konzentrischen Schichten besteht, und sie unter dem Einfluss irgend eines stationären, inhomogenen Magnetfeldes Translationsschwingungen ausführt (bei welchen die Geschwindigkeit in allen Punkten der Kugel dieselbe ist), die *Bewegung so vor sich geht, als ob die gesamte Ladung der Kugel in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre.*

Prinzipiell wenigstens dürfte also vom Standpunkt der Elektronentheorie gegen die gemachten Annahmen nicht viel einzuwenden sein. Allerdings ist die geforderte Verteilung der Elektrizität keine einfache. Ob sich aber bei den Molekularwirkungen die einfachen Gesetze auf die elektrische Dichte beziehen, oder auf die wirkenden Kräfte, ist uns *a priori* gänzlich unbekannt. Letztere erscheinen hier, der Riemannschen Auffassung der Funktionentheorie entsprechend, in einfachster Weise durch ihre Singularitäten (die Pole der Magnete) definiert : auf die Form der Funktion in deren Nähe, und auf die räumliche Anordnung derselben beziehen sich die einfachen Gesetze, die übrigens, soweit ihre Abhängigkeit von Raum und Zeit in Betracht kommt, ja vollständig mit bekannten Gesetzen übereinstimmen. Und, da eine vollständige Theorie der Linienspektra ohne ganz spezielle Annahmen über den Bau der Atome nicht möglich scheint, dürfte es wohl vom erkenntnistheoretischen Standpunkt ein Vorzug eher als ein Nachteil dieser Hypothese sein, dass sie über die *Gestalt* der Elemente, aus denen die

Atome aufgebaut gedacht werden, keine Annahme zu machen braucht, sondern nur mit als starr gedachten Strecken oder Entfernungen operiert. Im übrigen wird man bei einer Frage dieser Art, bei welcher ein zwingender Schluss von der Wirkung auf die Ursache kaum möglich scheint, und einerseits die beobachteten Tatsachen prinzipiell so sehr von allen bekannten Erscheinungen abweichen, und so kompliziert sind, anderseits über die vorauszusetzenden Grundlagen so grosse Unsicherheit herrscht, wohl kaum erwarten dürfen, dass ein *in jeder Beziehung* befriedigender Anschluss an unsere gewohnten Vorstellungskreise möglich sei; ja, es dürfte schwer fallen, über das, was in diesem Falle als « befriedigende Erklärung » zu betrachten sei, sich zu einigen.

Über den allgemeinen Charakter einer etwa noch zu findenden exakten Serienformel ist noch folgende Bemerkung zu machen. Die Berechnung vieler Spektren lässt kleine Unstetigkeiten im Verlauf der Serienkurve erkennen, die die Beobachtungsfehler überschreiten und zeigen, dass die *allgemeine* exakte Serienformel nicht einfach sein kann. Besonders auffallend und schon von Kayser und Runge hervorgehoben sind die Tl-Linien $\lambda = 2665,67$ und 2267,13, die ein Paar der zweiten Nebenserie bilden und dieselbe Differenz der Schwingungszahlen ergeben wie die andern Paare, und überdies von Exner und Haschek ebenfalls gemessen sind, so dass der Fehler nur einige Hundertstel Ångström betragen kann. Die Formel (4) gibt für die Linien dieser Serie die Fehler [1] (in Å.-E.)

0,00; —0,12; +0,14; —1,14; —0,02; —0,03;
0,00; +0,08; —0,21; —0,07; —0,01; —0,07; —0,23.

Die Linie 2665 fällt ganz aus der Serie heraus, was besonders auffallend ist, wenn man die Grösse

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A-\nu}} = m + \alpha + \beta(A-\nu)$$

bildet. Die Grösse dieses Fehlers ist auch bei Anwendung anderer Formeln ungefähr dieselbe. So berechnen Kayser und Runge

[1] Vgl. *Inaug.-Diss.* des Verf., *Œuvres*, I, p. 70; *Inaug. Diss.* Auszug, *Ann. d. Phys.* t. XII, 1903, p. 305.

die Konstanten ihrer Formel aus den weiteren Linien (ohne Berücksichtigung der vier ersten) und finden die Fehler:

$$-1{,}69;\quad +0{,}01;\quad -0{,}04;\quad -0{,}01;\quad +0{,}08;\quad -0{,}21;$$
$$-0{,}03;\quad +0{,}07;\quad +0{,}22;\quad -0{,}01.$$

Endlich, wenn man die Konstanten von

$$\lambda = a + b\, m^2 + c/m^4$$

(statt $1/\lambda = \ldots$) aus den nächsten Linien berechnet, ergibt sich

$$0{,}00;\quad 0{,}00;\quad -1{,}60;\quad 0{,}00;\quad \ldots.$$

Bei 2665 hat also die Serienkurve einen Knick.

Auf Bandenspektren sind diese Theorien nicht anwendbar. Ich möchte mich in dieser Hinsicht auf die Bemerkung beschränken, dass man sie vielleicht geschlossenen Ringen oder Polygonen, aus den betrachteten Elementarmagneten bestehend, zuschreiben könnte, in der Annahme, dass solche Gebilde eine wichtige Rolle im Bau des Atoms spielen, und dass sie durch die lichterregenden elektrischen oder chemischen Vorgänge erst gesprengt werden müssen, bevor ein Serienspektrum zustande kommen kann.

Der hier vorgetragenen Vorstellungsweise kann man den Vorwurf machen, dass sie die willkürliche, in den Serienformeln auftretende ganze Zahl n durch eine Art magnetischer Polymerisation einführt, während die mechanischen oder elektrischen Eigenschwingungen eines stetig ausgebreiteten Körpers durch ihre Knotenlinien und -flächen diese Zahl in einfacherer Weise einzuführen gestatten. Dieser grösseren Einfachheit steht jedoch die Schwierigkeit gegenüber, dass im allgemeinen, wenn die Wellenlänge gross ist gegen die Dimensionen des Erregers, eine merkliche Ausstrahlung der Oberschwingungen nicht zustande kommt eben wegen der Knotenflächen [1], so dass auch hier neue Hypothesen nötig werden. In diesem Zusammenhang sei noch auf ein wichtiges Experiment von Wood [2] hingewiesen. Wird Natriumdampf mit weissem

---

(1) Vgl. *Dissertation*, Anhang; *Œuvres*, I, p. 75.

(2) R.-W. Wood, *Physik. Zeitschr.*, t. VII, 1906, p. 873.

Licht bestrahlt, so erscheint ein ziemlich linienreiches Bandenspektrum als Fluoreszenzlicht. Benutzt man dagegen monochromatisches Licht, dessen λ einer der Linien dieses Bandenspektrums sehr nahe entspricht, so wird durch Resonanz nicht nur diese Linie, sondern auch eine Reihe anderer, mit ihr durch einfache numerische Gesetze verknüpfter, erregt; dieselben gehören offenbar dem gleichen schwingenden System an. Man kann hierin eine Wirkung der ungeordneten Molekularbewegung erblicken, die, wenn auch unfähig, die nötige kinetische Energie hervorzubringen, doch eine gleichmässige Verteilung derselben über die verschiedenen Freiheitsgrade (hier Schwingungszustände) hervorzubringen bestrebt ist. Bringt man etwa den Grundton einer Saite durch Resonanz hervor, und berührt dann dieselbe (ohne Anschlag) in der Mitte, so werden Obertöne entstehen. Als nun Hr. Wood den Na-Dampf mit gelbem Na-Licht bestrahlte, erhielt er ein intensives, aus den D-Linien bestehendes Fluoreszenzlicht; doch erschien keine Spur des nächsten Paares der Hauptserie, zu welcher die D-Linien gehören, trotzdem dasselbe sonst eine grosse Intensität besitzt. Man wäre, im Sinne der eben angestellten Überlegung, geneigt, daraus zu schliessen, dass die beiden Paare nicht von demselben schwingenden System ausgesandt werden, so dass ein Ausgleich der Energie nicht stattfinden kann. Bei Annahme der Elementarmagnete ist dem tatsächlich so. Wenn auch die Überlegung unsicher, und ein einzelnes Experiment ungenügend sein dürfte, so scheint mir der Hinweis doch nützlich, dass hier möglicherweise ein Ansatz zur experimentellen Prüfung der Frage vorliegt.

Der Zeemaneffekt.

Eine wichtige Anforderung an jede Theorie der Linienspektren ist die Erklärung der mehr oder weniger komplizierten Zerlegungen der Linien im magnetischen Feld. Ein einigermassen befriedigendes Bild dieser Erscheinung und ihrer Gesetze auf Grund der Lorentzschen Annahme der komplexen Elektronen zu gewinnen ist bisher nicht gelungen. Ich werde nun zeigen, dass die bisher entwickelten Anschauungen in der Tat zu einer grossen Mannig-

faltigkeit mehr oder weniger komplizierter Zerlegungen führen, deren allgemeiner Charakter durchaus der Beobachtung entspricht. Doch auch hier muss ich mich damit begnügen, einen Zusammenhang mit wohlbekannten Tatsachen und Problemen nachzuweisen. Es ist in diesem Gebiet des Unbekannten zu viel, als dass von der Theorie zunächst mehr als eine solche Reduktion des Problems verlangt werden dürfte.

Dass die Ersetzung quasielastischer Kräfte durch molekularmagnetische eine wesentliche Änderung im Zeemaneffekt bedingt, ist ohne weiteres klar : gelänge es, das Molekularfeld H_0 dauernd parallel dem äusseren Feld H zu stellen, so würde einfach statt

$$\nu = \frac{e H_0}{mc} \quad \text{resultieren :} \quad \nu = \frac{e(H_0 \pm H)}{mc}.$$

Die Spektrallinie, in Richtung der Kraftlinien gesehen, erschiene zirkularpolarisiert und um die Grösse eH/mc aus ihrer früheren Lage verschoben, und zwar nach links oder rechts, je nachdem H und H_0 gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind. Sind beide Fälle in der Lichtquelle gleich häufig, so ergibt sich ein Doublett; der Polarisationszustand, in beliebiger Richtung beobachtet, ist derselbe wie bei Lorentz aber die Longitudinalkomponente fehlt, und die Zerlegung ist, für einen und denselben Wert von e/m, *doppelt so gross* wie bei Lorentz [1].

Infolge der molekularen Agitation wird jedoch im allgemeinen der Träger der Serienspektren im Magnetfeld Bewegungen ausführen, welche die Erscheinung wesentlich ändern; Hr. Voigt [2] hat gezeigt, dass, falls nicht Kräfte herangezogen werden, die einer Reibung äquivalent sind, keinerlei Tendenz zur Orientierung rotierender Ladungen im Magnetfeld besteht. Wir setzen dabei voraus, dass diese Rotationsbewegungen analog den in der Mechanik starrer Körper behandelten Fällen der freien Bewegung um einen festen Punkt oder um den Schwerpunkt, der Kreiselbewegung, des Pendels usw. durch gewisse Periodizitätseigenschaften ausgezeichnet seien.

---

[1] Vielleicht gehören hierher die Beobachtungen von Wood bei Quecksilberdampf und Na-Dampf (*Physik. Zeitschr.*, t. IX, 1908, p. 125).

[2] W. Voigt, *Ann. d. Phys.*, t. IX, 1902, p. 115.

Nach unseren Voraussetzungen führt die Ladung e unter dem Einfluss von H_0 Oszillationen von sehr kleiner Amplitude aus, und ist an ein Flächenelement $\perp H_0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, an eine Ebene $\perp H_0$ gebunden ([1]). Die z-Achse eines festen Systems (O, x, y, z) sei parallel H; von der $+z$-Achse aus betrachtet möge die $+y$-Achse durch eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers mit der $+x$-Achse zur Drehung gebracht werden können. Seien $\mathfrak{I}$ der Winkel von H_0 und H; $\psi - \pi/2$ der Winkel der Ebenen Ozx und OH_0z, also die Polarkoordinaten der veränderlichen Richtung H_0; so sind deren Richtungskosinus

$$\sin\mathfrak{I}\sin\psi, \quad -\sin\mathfrak{I}\cos\psi, \quad \cos\mathfrak{I}.$$

Bei gegebener Lage und Bewegung von H_0 sind $\mathfrak{I}$, ψ gegebene Funktionen der Zeit. Man setze

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = u\cos\psi - v\cos\mathfrak{I}\sin\psi, & y = u\sin\psi + v\cos\mathfrak{I}\cos\psi, \\ & z = v\sin\mathfrak{I}, \end{array} \right. \tag{11}$$

so kann man u, v als Lagrangesche Koordinaten des Teilchens e auf der Ebene $\perp H_0$ betrachten. Die kinetische Energie von e ist

$$\begin{aligned} T = \frac{m}{2}\Bigg\{ & \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\psi}{dt}\cos\mathfrak{I}\left[u\frac{dv}{dt} - v\frac{du}{dt}\right] \\ & + (u^2+v^2)\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\cos^2\mathfrak{I} + \left[v\frac{d\mathfrak{I}}{dt} - u\sin\mathfrak{I}\frac{d\psi}{dt}\right]^2\Bigg\}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der virtuellen Arbeit der magnetischen Kräfte wird vereinfacht durch den Umstand, dass in einem ruhenden Koordinatensystem dieselbe identisch verschwinden muss, wenn δu, δv durch du/dt, dv/dt ersetzt werden. Man findet

$$\begin{aligned} \delta A = {} & \frac{e}{c}(H_0 + H\cos\mathfrak{I})\left(\frac{du}{dt}\delta v - \frac{dv}{dt}\delta u\right) \\ & - \frac{d\psi}{dt}(H_0\cos\mathfrak{I} + H)(u\,\delta v + v\,\delta u) + v\frac{d\psi}{dt}H\sin^2\mathfrak{I}\,\delta v + v\frac{d\mathfrak{I}}{dt}H\sin\mathfrak{I}\,\delta u. \end{aligned}$$

([1]) Diese Bedingung kann durch andere ersetzt werden; wesentlich ist nur, dass die Ladung e ihre relative Lage zu den Elementarmagneten nicht merklich ändere.

Daraus folgen die Lagrangeschen Gleichungen

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} - 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{dv}{dt}\cos\vartheta - v\cos\vartheta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} \\ \qquad + 2v\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta - u\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ = \dfrac{e}{mc}\left\{ -(\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}\cos\vartheta)\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{d\psi}{dt}u(\mathrm{H}_0\cos\vartheta + \mathrm{H}) \right. \\ \qquad \left. + v\mathrm{H}\sin\vartheta\dfrac{d\vartheta}{dt}\right\}, \\ \dfrac{d^2 v}{dt^2} + 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{du}{dt}\cos\vartheta + u\cos\vartheta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} \\ \qquad - 2u\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta - v\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right)^2\cos^2\vartheta + v\left(\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)^2 \\ = \dfrac{e}{mc}\left\{ (\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}\cos\vartheta)\dfrac{du}{dt} - \dfrac{d\psi}{dt}v(\mathrm{H}_0\cos\vartheta + \mathrm{H}) \right. \\ \qquad \left. + v\mathrm{H}\dfrac{d\psi}{dt}\sin^2\vartheta\right\}. \end{cases}$$

Sind H, $d\psi/dt$, $d\vartheta/dt$ gleich Null, so ergibt sich die ungestörte Linie:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{e\mathrm{H}_0}{mc}\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = +\frac{e\mathrm{H}_0}{mc}\frac{du}{dt},$$

$$(13)\quad u = u_0 + \mathrm{A}\cos\nu_0(t - t_0), \qquad v = v_0 + \mathrm{A}\sin\nu_0(t - t_0), \qquad \nu_0 = \frac{e\mathrm{H}_0}{mc}.$$

Im Zeemaneffekt ist die relative Perturbation der Schwingungszahl sehr klein; bei Feldern von 10000 bis 40000 Gauss ist H/H_0 von der Grössenordnung 10^{-4}. Wir vernachlässigen Grössen von der Ordnung $(\mathrm{H}/\mathrm{H}_0)^2$ sowohl in den Amplituden wie in den Schwingungszahlen. Wir setzen ferner voraus, dass die gegebenen Funktionen der Zeit $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ sich durch rasche konvergente Entwickelungen der Form

$$\mathrm{A}_0 + \sum_{i=1}^{\infty}[\mathrm{A}_i\cos\omega_i t + \mathrm{B}_i\sin\omega_i t]$$

darstellen lassen (die im Spezialfall einer periodischen Bewegung in Fourier-Reihen übergehen). Die ω_i seien proportional H, und (für die in Betracht kommenden ersten Glieder) mögen sich zur ungestörten Schwingungszahl ν_0 verhalten ungefähr wie H zu H_0. Während jede Differentiation von u und v einen Faktor von

der Grössenordnung ν_0 einführt, wie aus der angenäherten Lösung (13) hervorgeht, führt die Differentiation von $\cos\psi$, ... nur solche von der Ordnung ω_i ein, so dass z. B. $u(d^2\psi/dt^2)\sin\psi$ zweiter Ordnung gegen $(d^2u/dt^2)\cos\psi$ ist. Beschränken wir uns auf die erste Ordnung, so reduzieren sich also die Gleichungen (12) auf

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = 2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{dv}{dt}\cos\mathfrak{I} - \dfrac{e}{mc}(\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}\cos\mathfrak{I})\dfrac{dv}{dt} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\mathrm{H}_0 e}{mc}\dfrac{d\psi}{dt}\cos\mathfrak{I}\, u, \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} = -2\dfrac{d\psi}{dt}\dfrac{du}{dt}\cos\mathfrak{I} + \dfrac{e}{mc}(\mathrm{H}_0 + \mathrm{H}\cos\mathfrak{I})\dfrac{du}{dt} \\ \qquad\qquad - \dfrac{\mathrm{H}_0 e}{mc}\dfrac{d\psi}{dt}\cos\mathfrak{I}\, v. \end{cases}$$

Sind zunächst $d\psi/dt$, $\mathfrak{I}$ konstant (reguläre Präzession), so ergibt sich die Lösung

$$u = \mathrm{A}_1\cos\nu_1(t - t_1) + \mathrm{A}_2\cos\nu_2(t - t_2),$$
$$v = \mathrm{A}_1\sin\nu_1(t - t_1) + \mathrm{A}_2\sin\nu_2(t - t_2).$$

wo A_1, A_2, t_1, t_2 willkürlich, und ν_1, ν_2 die Wurzeln der Gleichung sind :

$$\nu^2 - \nu\left[\nu_0 + \left(\frac{e\mathrm{H}}{mc} - 2\frac{d\psi}{dt}\right)\cos\mathfrak{I}\right] + \frac{d\psi}{dt}\cos\mathfrak{I} = 0,$$

also, bis auf Glieder zweiter Ordnung,

$$\nu_1 = \nu_0 + \left(\frac{e\mathrm{H}}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\cos\mathfrak{I}; \qquad \nu_2 = \frac{d\psi}{dt}\cos\mathfrak{I}.$$

Der Wurzel ν_2 entsprechen also Strahlen, deren Wellenlänge 10^4 mal grösser ist als die in Betracht kommenden. Wi haben also nur die erste Wurzel zu berücksichtigen.

Sei nun allgemein, bei veränderlichen $\mathfrak{I}$, $d\psi/dt$:

$$\mathrm{Q} = \int_{t_0}^{t}\left[\nu_0 + \left(\frac{e\mathrm{H}}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\cos\mathfrak{I}\right]dt,$$

so ist

$$u = \frac{\mathrm{A}\cos\mathrm{Q}}{\nu_0 + \left(\dfrac{e\mathrm{H}}{mc} - \dfrac{d\psi}{dt}\right)\cos\mathfrak{I}}; \qquad v = \frac{\mathrm{A}\sin\mathrm{Q}}{\nu_0 + \left(\dfrac{e\mathrm{H}}{mc} - \dfrac{d\psi}{dt}\right)\cos\mathfrak{I}}.$$

Denn durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (14) oder (12) erkennt man, dass die Glieder bis zur zweiten Ordnung sich aufheben, so dass die Gleichungen innerhalb des vorgeschriebenen Annäherungsgrades erfüllt sind.

Diese Werte von u, v sind in (11) einzutragen, und die sich ergebenden Ausdrücke für x, y, z in Summen rein periodischer Funktionen aufzulösen. Dabei kann man $\Lambda = \nu_0$ setzen, und den Faktor

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{e\mathrm{H}}{mc} - \frac{d\psi}{dt}\right)\frac{\cos\mathfrak{Z}}{\nu_0}}$$

weglassen, da er von der Einheit nur um Grössen von der Ordnung 10^{-4} abweicht. Denn durch Hinzufügen dieses Faktors werden die *Amplituden* der einzelnen Glieder der Entwickelungen von $\sin \mathrm{Q}$, $\cos \mathrm{Q}$ nicht in merklicher Weise beeinflusst; anderseits erhalten etwaige durch den Faktor neu hinzukommende trigonometrische Glieder die Amplitude 10^{-4}, mithin sind die entsprechenden Intensitäten 10^{-8} mal kleiner als die der schon vorhandenen Glieder.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass H_0 senkrecht zu H steht und sich mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um diese Achse dreht. Es ist dann

$$\psi = \omega(t - t'), \qquad \cos\mathfrak{Z} = 0,$$

$$\begin{aligned} x &= \cos\nu_0(t - t_0)\cos\psi = \frac{1}{2}\cos[(\nu_0 + \omega)t + c] \\ &\quad + \frac{1}{2}\cos[(\nu_0 - \omega)t + c'], \\ y &= \cos\nu_0(t - t_0)\sin\psi = \frac{1}{2}\sin[(\nu_0 + \omega)t + c] \\ &\quad - \frac{1}{2}\sin[(\nu_0 - \omega)t + c'], \\ z &= \sin\nu_0(t - t_0), \end{aligned}$$

wobei c, c' Phasenkonstanten sind, auf die es nicht weiter ankommt.

Die Linie ν_0 spaltet sich also auf in ein Triplett, dessen Gesamtbreite in der Skala der Schwingungszahlen 2ω ist, und dessen Intensitäten und Polarisationen im übrigen genau

denen entsprechen, die sich in der elementaren Lorentzschen Theorie ergeben.

Soll der Drehungssinn des Lichtes mit demjenigen übereinstimmen, welchen die Erfahrung ergibt, *so ist es hier nicht, wie bei Lorentz, nötig, dass das Teilchen e negativ geladen sei; vielmehr ist es notwendig und hinreichend, dass die Drehung der Achse* H_0 *um* H *in dem Sinne erfolgt, in welchem freie Elektronen im betreffenden Feld* H *rotieren würden.* Ist endlich die Drehgeschwindigkeit ω *gleich* der der Elektronen, so ergibt sich ein Triplett mit doppelt so grossem Komponentenabstand, wie nach der Lorentzschen Theorie zu erwarten wäre. Das Triplett Zn 4680, Cd 4678 der zweiten Nebenserie und ihre Homologen zeigen in der Tat ungefähr diesen Abstand.

Man erkennt an diesem Beispiel, dass durch die Hypothese der Molekularmagnete die Interpretation des Zeemaneffektes wesentlich verändert wird.

Ich gehe zur allgemeinen Annahme über, *es sei die Bewegung von* H_0 *eine periodische*, so dass

$$\cos\vartheta = a_0 + \alpha_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \omega' t + \alpha_1 \cos\omega t + \beta_1 \sin\omega t + \alpha_2 \cos 2\omega t \\ &\qquad + \beta_2 \sin 2\omega t + \ldots \\ &= \psi_0 + \omega' t + \Sigma.\end{aligned}$$

Es müssen ω, ω' *in rationalem Verhältnis* stehen, damit die Bewegung eine periodische sei. Soll ω die Periode sein, so muss ω' ein Vielfaches von ω sein.

Die Fourierschen Reihen für $\sin\vartheta$, $\cos\psi$, $\sin\psi$ erhält man dann durch Entwickelung nach Potenzen und Umrechnung von $\cos^n$, $\sin^n$ auf cos, sin der Vielfachen des Winkels. Verstehen wir unter Σ_1, Σ_2, Σ_3, S Summen trigonometrischer Funktionen (die letzte ohne konstantes Glied), so ist

$$\sin\vartheta = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = 1 - \frac{\cos^2\vartheta}{2} - \frac{\cos^4\vartheta}{8} + \ldots = \Sigma_3,$$

$$\begin{aligned}\sin(\psi - \psi_0) &= \sin\omega' t \cos\Sigma + \cos\omega' t \sin\Sigma \\ &= \sin\omega' t\left[1 - \frac{\Sigma^2}{1.2} + \frac{\Sigma^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] \\ &\quad + \cos\omega' t\left[\frac{\Sigma}{1} - \frac{\Sigma^3}{1.2.3} + \ldots\right] \\ &= \sin\omega' t.\Sigma_1 + \cos\omega' t.\Sigma_2.\end{aligned}$$

Da Σ zwischen zwei Werten hin und her schwankt, konvergieren die Reihen.

Q ist dann von der Form

$$Q = \left[\nu_0 + \sum_1^\infty \omega n(\alpha_n b_n - \beta_n a_n) + a_0\left(\frac{eH_0}{mc} - \omega'\right)\right](t - t_0) + S$$
$$= (\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) + S,$$

wo

$$(15) \qquad \varepsilon = a_0\left(\frac{eH_0}{mc} - \omega'\right) + \sum_1^\infty \omega n(\alpha_n b_n - \beta_n a_n),$$

so dass

$$u = \cos(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0)\cos S - \sin(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0)\sin S,$$
$$v = \sin(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0)\cos S - \cos(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0)\sin S$$

sich als Summen von Gliedern der Form

$$\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left\{(\nu_0 + \varepsilon \pm m\omega)(t - t_0)\right\}. \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

darstellen lassen. Gleiches gilt von der parallel H schwingenden Komponente

$$z = v \sin \mathfrak{J}.$$

Dieselbe wird also in ein Spektrum mit den Schwingungszahlen

$$\nu_0 + \varepsilon \pm m\omega, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

zerlegt. Von diesen Linien gelangt aber selbst bei mässig rascher Konvergenz der Reihen, wie unten an Beispielen erörtert werden soll, nur eine sehr beschränkte Anzahl zur Wahrnehmung, weil die Intensitäten, die ja den *Quadraten* der Amplituden proportional sind, viel rascher abfallen als diese.

Man hat ferner

$$x = \cos\omega' t(u\cos\Sigma - v\sin\Sigma\cos\mathfrak{J}) - \sin\omega' t(u\sin\Sigma + v\cos\mathfrak{J}\cos\Sigma),$$
$$y = \sin\omega' t(u\cos\Sigma - v\sin\Sigma\cos\mathfrak{J}) + \cos\omega' t(u\sin\Sigma + v\cos\mathfrak{J}\cos\Sigma),$$
$$\Sigma = \alpha_1\cos\omega t + \beta_1\sin\omega t + \alpha_2\cos 2\omega t + \beta_2\sin 2\omega t + \ldots.$$

Die Klammern sind wieder in trigonometrische Summen der oben

genannten Form entwickelbar; jedem Gliede

$$A \cos \nu_m t + B \sin \nu_m t,$$

$$\nu_m = \nu_0 + \varepsilon + m\omega \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

der ersten Klammer und

$$A' \cos \nu_m t + B' \sin \nu_m t$$

der zweiten entsprechen *zwei entgegengesetzt zirkularpolarisierte Wellen* mit den Schwingungszahlen

$$\nu_m + \omega', \qquad \text{Intensität} \qquad \left(\frac{A + B'}{2}\right)^2 + \left(\frac{A' - B}{2}\right)^2$$

und

$$\nu_m - \omega'. \qquad \text{»} \qquad \left(\frac{A - B'}{2}\right)^2 + \left(\frac{A' + B}{2}\right)^2.$$

Jeder parallel H *schwingenden Komponente entsprechen so zwei* $\perp$ H *schwingende*, doch können die Intensitäten sehr verschieden sein, so dass einige Linien ganz zu fehlen scheinen. Besonders auffallend ist diese Anordnung in dem von Hrn. Lohmann [1] untersuchten Spektrum von Neon. Im Quadruplett der Linie D_1 sind dagegen zwei Longitudinal- und nur zwei Transversalwellen. Wir behandeln den Fall unten: es sind die Intensitäten von $\nu + \omega'$ und $\nu - \omega'$ hier sehr verschieden.

Allerdings erscheint die Mitte des ganzen Liniensystems selbst aus der ursprünglichen Lage ν_0 nach $\nu_0 + \varepsilon$ verlegt. Betrachten wir aber entgegengesetzte Richtungen von H_0 im Atom (bzw. umgekehrte Stellung der Süd- und Nordpole des Molekularmagnetes) als gleich möglich, so bleibt das Vorzeichen von $\cos \mathfrak{S}$ willkürlich, und man erhält das Spektrum:

Elektr. Kraft parallel H schwingend:

$$\nu_0 \pm \varepsilon \pm m\omega \qquad (m_1 n_1 = 0, 1, 2, \ldots).$$

Elektr. Kraft senkrecht zu H schwingend:

$$\nu_0 \pm \varepsilon \pm n\omega \pm \omega' \qquad (m_1 n_1 = 0, 1, 2, \ldots).$$

Unter sehr allgemeinen Annahmen ergibt sich übrigens für ε eine erheblich kleinere Zahl als ω und ω', so dass Linien mit den

---

[1] W. LOHMANN, *Inaug.-Diss.*, Halle 1907.

Schwingungszahlen $\nu+\varepsilon$ und $\nu-\varepsilon$ auch in Instrumenten mit hohem Auflösungsvermögen nicht mehr getrennt erscheinen. Wir setzen dies im folgenden voraus. Da nun ω'/ω eine rationale Zahl, und insbesondere eine ganze Zahl ist, falls ω die Periode der Bewegung, so folgt:

Bei beliebigen periodischen Bewegungen des Systems wird jede Linie in mehrere zerlegt, deren Abstände von der ursprünglichen Lage der Linie untereinander in rationalem Verhältnis stehen. Dies ist das Gesetz von Runge und Paschen. Allerdings haben diese Forscher darüber hinaus noch festgestellt, dass zwischen den Werten von ω für verschiedene Serien und verschiedene Elemente ebenfalls rationale Verhältnisse stattfinden. Damit wird gefordert, dass für solche Gruppen verwandter Serien die Grundperiode der Bewegung von H_0 dieselbe sei, während allerdings die Koeffizienten a_i, b_i, α_i, β_i veränderlich sein können, wodurch die Intensitäten, nicht aber die Schwingungszahlen beeinflusst werden: so können z. B. im einen Fall die Linien mit geraden, im andern die mit ungeraden Ordnungszahlen ganz fehlen.

Ist die Bewegung nicht periodisch, so ergibt sich das allgemeine Gesetz

$$(16)\quad \begin{cases} \text{Parallel zu H:} & \nu_0 \pm m\omega \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \\ \text{Senkrecht zu H:} & \nu_0 \pm n\omega \pm \omega' \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Es lassen sich alle Schwingungszahlen linear und mit ganzzahligen Koeffizienten aus zwei Grundzahlen ω und ω' berechnen; ω' tritt nur in den $\perp$ schwingenden Komponenten auf; sein Vorzeichen bestimmt den Drehungssinn.

Ob das Gesetz

$$\frac{\omega'}{\omega} = \text{rationale Zahl}$$

ein durchaus allgemeines sei, muss vorderhand dahingestellt bleiben. In manchen Fällen scheint diese Spezialisierung eine etwas gezwungene, und Hr. Runge(¹) sieht sich z. B. in dem von Lohmann (*loc. cit.*) untersuchten Spektrum von Neon genötigt, recht grosse Zähler und Nenner einzuführen, während bei Benutzung

(¹) C. Runge, *Physik. Zeitschr.*, t. VIII, 1907, p. 232.

von (16) die Zahlen 0, 1, 2, selten 3 und 4 in allen mir bekannten Fällen ausreichen. So gehen bei Neon 6506,7 die Rungeschen Zahlen bis auf 17, während ist:

parallel : $\nu_0 \pm 1,56\,m \quad (m = 0, 1)$,

senkrecht : $\nu_0 = 1,56\,m \pm 5,08 \quad (n = 0, 1)$.

Bei 6402,40 (Runge bis 10):

(p) $\nu_0 \pm 0,78\,m \; (m = 0, 1, 2)$, (s) $\nu_0 \pm 6,11 \pm 0,78\,n \; (n = 0, 1, 2)$
(15 Komponenten).

Bei 6217,50 (R. bis 14):

(p) $\nu_0 \pm 3,90\,m \; (m = 0, 1)$, (s) $\nu_0 \pm 7,04 \pm 3,90\,n \; (n = 0, 1)$.

Bei 6143,28 (R. bis 20):

(p) $\nu_0 \pm 1,22\,m \; (m = 1, 2)$, (s) $\nu_0 \pm 5,68 \pm 1,22\,n \; (n = 1, 2)$.

Bei 6096,37 (R. bis 15):

(p) $\nu_0 \pm 0,86\,m \; (m = 0, 1)$, (s) $\nu_0 \pm 5,54 \pm 0,86\,n \; (n = 0, 1)$.

Bei 6030,20 (R. bis 9):

(p) $\nu_0 \pm 0,34\,m \; (m = 2)$, (s) $\nu_0 \pm 2,76 \pm 0,34$.

Bei 5944,91 (R. bis 8):

(p) $\nu_0 \pm 0,45\,m \; (m = 2, 4)$, (s) $\nu_0 \pm 5,58 \pm 0,45\,n \; (n = 1, 3)$.

Bei 5882,04 (R. bis 21):

(p) $\nu_0 \pm 0,77\,m \; (m = 0, 1)$, (s) $\nu_0 \pm 7,14 \pm 0,77\,m \; (m = 0, 1)$.

Bei der Linie 6143 liegen $\nu_0 \pm (5,68 - 2.1,22) = \nu_0 \pm 3,24$ wohl zu nahe bei der starken parallel schwingenden Komponente; daher sind sie nicht wahrgenommen. Im übrigen beweist wegen den möglicherweise sehr verschiedenen Intensitäten das Fehlen einer berechneten Linie nichts gegen die Formel, welche gewissermassen nur ein Schema darstellt, in das die Linien hineinpassen müssen. Dieses Schema ist nicht eindeutig; bei 6143 könnte man z. B. setzen:

(p) $\nu_0 \pm 0,60\,m \; (m = 2, 4)$, (s) $\nu_0 \pm 6,30 \pm 0,60\,n \; (n = 1, 3)$.

wobei nun die beobachteten Linien und nur diese dargestellt werden.

Bei den Satelliten der ersten Nebenserie von Hg und ihren Homologen ergeben sich ebenfalls [1] hohe Zahlen bei Anwendung des Rationalitätsgesetzes:

3663,5 (R. bis 8):

(*p*) $\nu_0 \pm 0,24\,m$ ($m = 2, 4$), (*s*) $\nu_0 \pm 1,36 \pm 0,28\,m$ ($m = 1, 3$).

3663,0 (R. bis 5):

(*p*) $\nu_0 \pm 1,10\,m$ ($m = 0, 1$). (*s*) $\nu_0 \pm 1,66 \pm 1,10\,n$ ($n = 0, 1$).

3650 (R. bis 7):

(*p*) $\nu_0 \pm 0,34\,m$ ($m = 1$), (*s*) $\nu_0 \pm 1,28 \pm 0,34\,m$ ($m = 0$).

3132,0 (R. bis 3):

(*p*) $\nu_0 \pm 0,60\,m$ ($m = 0, 1$), (*s*) $\nu_0 \pm 1,10 \pm 0,60\,m$ ($m = 0, 1$).

3125,8 (R. bis 16):

(*p*) $\nu_0 \pm 0,38\,m$ ($m = 1$), (*s*) $\nu_0 \pm 1,20 \pm 0,38\,n$ ($n = 0, 1$).

2967,4:

(*p*) $\nu_0 \pm 0,60\,m$ ($m = 0, 1$), (*s*) $\nu_0 \pm 0,60 \pm 0,60\,n$ ($n = 0$).

Die neue Darstellung dürfte also den Vorzug der Einfachheit beanspruchen, und man wird, auch abgesehen von der hier vorgetragenen Theorie, die Möglichkeit einer Erklärung der Erscheinung als naheliegender betrachten, wenn, wie es hier geschieht, das Problem in zwei andere zerlegt wird: erstens, die Formeln (16) zu begründen, wobei m, n klein bleiben; zweitens, die häufig auftretenden rationalen Verhältnisse zwischen ω' und ω, insbesondere die Formel $\omega' =$ Vielfaches von ω, aus speziellen Annahmen über die Bewegung abzuleiten. Die Frage, ob $\omega'/\omega =$ rationale Zahl eine allgemeine Regel darstellt, d. h. ob die Bewegung stets eine periodische ist, für welche alle Punkte sich in geschlossenen Bahnen bewegen, ist ein Wahrscheinlichkeitsproblem, für dessen

---

[1] C. Runge, *loc. cit.* — C. Runge und F. Paschen, *Berliner Ber.*, 1902.

sichere Lösung noch weitere genaue Messungen abzuwarten sind. Die von Hrn. Runge (*loc. cit.*) angestellten Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen werden ungültig, wenn man von vornherein für die Linien das Gesetz (16) annimmt, statt eine willkürliche Verteilung vorauszusetzen.

Als Beispiel behandeln wir zunächst den Ansatz

$$\cos\vartheta = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \qquad \psi = \omega t + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t,$$

also $\omega' = \omega$ unter der Annahme, dass die Grössen zweiten Grades in $\alpha\beta$, ab, vernachlässigt werden dürfen. Da hier

$$\varepsilon = \omega(\alpha b - \beta a),$$

so wird $\alpha b - \beta a$ höchstens $= \frac{1}{10}$ etwa sein dürfen, damit feine Linien $\nu + \varepsilon$, $\nu - \varepsilon$ im mittleren Teil des Spektrums nicht mehr zu trennen seien.

Es ergibt sich in dieser Annäherung, wenn abkürzend $k = e\mathrm{H}/\omega mc$ gesetzt wird,

$$\sin\vartheta = 1, \qquad Q = +(k-1)(-a\sin\omega t + b\cos\omega t) + \nu_0(t - t_0),$$
$$\cos\psi = \cos\omega t - (\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)\sin\omega t,$$
$$\sin\psi = \sin\omega t + (\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)\cos\omega t.$$

Es ergeben sich somit durch Einsetzen in (11) die folgenden Linien:

Parallel H schwingend:

$$\nu_0(\text{Intens.} = 1); \qquad \nu_0 \pm \omega, \qquad \text{Intens.} = \frac{(a^2 - b^2)(k-1)^2}{4}.$$

⊥ H schwingend:

$$\nu_0 \pm \omega, \qquad \text{Intens.} = \frac{1}{4};$$
$$\nu_0 + 2\omega, \qquad \text{Intens.} = \left[\frac{a(k-2) - \beta}{4}\right]^2 + \left[\frac{b(k-2) + \alpha}{4}\right]^2,$$
$$\nu_0 - 2\omega, \qquad \text{Intens.} = \left[\frac{a(k-2) + \beta}{4}\right]^2 + \left[\frac{b(k-2) - \alpha}{4}\right]^2.$$

Der Drehungssinn von $\nu_0 + \omega$, $\nu_0 + 2\omega$ ist entgegengesetzt demjenigen von $\nu_0 - \omega$, $\nu_0 - 2\omega$. Die Dissymmetrie der Intensitäten wird aufgehoben, wenn man, wie oben auseinandergesetzt, entgegengesetzte Lagen von H_0, d. h. entgegengesetzte Vorzeichen

von $\cos \vartheta$, a, b als gleich möglich, und in der Lichtquelle gleich häufig vorkommend, betrachtet, so dass zu den angeschriebenen Werten der Intensitäten noch weitere ebensolche Ausdrücke hinzukommen, in welchen a, b durch $-a$, $-b$ ersetzt sind.

Es ergibt sich also ein *Quintuplett äquidistanter Linien*, bei welchem die parallel und senkrecht schwingenden Komponenten zum Teil aufeinanderfallen. Sind a, b bedeutend kleiner als α, β, so verschwinden die seitlichen Parallelkomponenten.

Die Intensität der äussersten Linien ist bedeutend kleiner als die der mittleren.

Wird derselbe Ansatz gemacht, aber $\omega' = 3\omega$ statt $\omega' = \omega$ gesetzt, so ergibt sich ein *Nonett äquidistanter Linien*, wie es von Runge und Paschen in der zweiten Nebenserie beobachtet ist (Hg 5461, 3342 und Homologe), wobei die äussersten Linien am schwächsten sind:

$$(p)\quad \nu_0 \pm m\omega \; (m = 0, 1), \qquad (s)\quad \nu_0 \pm 3\omega \pm n\omega \; (n = 0, 1).$$

Bei der Rechnung sind Glieder zweiten Grades vernachlässigt worden. Dieselben würden zunächst die Intensitätsverhältnisse der erhaltenen Linien etwas beeinflusst haben; doch sind dieselben so unsicher beobachtet, dass diese Korrektion ganz bedeutungslos ist. Ferner werden neue Linien eingeführt, deren Intensitäten von der Ordnung $(a \pm b/4)^4$, $(\alpha \pm \beta/4)^4$ sind. Wählt man also für a, b, α, β Zahlen von der Ordnung $\frac{1}{2}$, wobei k mit 1 vergleichbar sei, so ist die Intensität der äussersten Linien etwa $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{20}$ der mittleren, oder noch weniger, die der bei exakter Berechnung neu hinzukommenden $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{400}$ oder noch geringer; dieselben würden sich also in den meisten Fällen der Beobachtung entziehen, da selbst bei längerer Exposition die viel grössere Intensität der Zentrallinien die Beobachtung sehr erschwert.

Ein weiterer einfacher, wenn auch ziemlich allgemeiner Fall ist der, dass $d\psi/dt =$ konst., und zwar [1]

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{e\mathrm{H}}{mc} = \omega'.$$

[1] Die Ebene ($\mathrm{H}\,\mathrm{H}_0$) dreht sich also um H mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{e\mathrm{H}}{mc}$ und in demselben Sinne, wie freie Elektronen im Felde H; dabei führt aber H_0 in dieser Ebene noch pendelartige Schwingungen aus.

Dann reduziert sich Q auf $\nu_0(t - t_0)$, und es ergibt sich, falls abkürzend $t_0 = 0$ gesetzt wird:

Parallel H: $\quad z = \sin \nu_0 t \sin \mathfrak{I}$,

$$\perp \text{H} : \begin{cases} x = \cos\nu_0 t \cos\omega' t - \cos\mathfrak{I} \sin\nu_0 t \sin\omega' t, \\ y = \cos\nu_0 t \sin\omega' t + \cos\mathfrak{I} \sin\nu_0 t \cos\omega' t. \end{cases}$$

Hierin ist nun für $\mathfrak{I}$ eine beliebige periodische Funktion einzusetzen. Sei sehr annähernd

$$\sin\mathfrak{I} = \text{A} \sin\omega(t - t_0), \qquad |\text{A}| < 1,$$

so ergibt sich für positives Vorzeichen von $\cos\mathfrak{I} = \sqrt{1 - \sin^2\mathfrak{I}}$:

Parallel H:

$$\nu_0 \pm \omega, \qquad \text{Intens.} = \frac{\text{A}^2}{4};$$

Senkrecht H:

$$\nu_0 + \omega', \qquad \text{Intens.} = \left(1 - \frac{\text{A}^2}{8} - \frac{3\,\text{A}^4}{128} \cdots\right)^2;$$

$$\nu_0 - \omega', \qquad \text{Intens.} = \left(\frac{\text{A}^2}{8} + \frac{3\,\text{A}^4}{128} + \ldots\right)^2;$$

$$\nu_0 \pm 2\omega \pm \omega', \qquad \text{Intens.} = \left(\frac{\text{A}^2}{16} + \frac{\text{A}^4}{64} + \ldots\right)^2.$$

Für negative Vorzeichen von $\cos\mathfrak{I}$ werden die Parallelkomponenten nicht geändert in ihrer Intensität und Lage; die Intensitäten von $\nu_0 + \omega'$, $\nu_0 - \omega'$ vertauschen sich aber. Da umgekehrte Vorzeichen von $\cos\mathfrak{I}$, d. h. von H_0, verschiedenen Molekülen entsprechen, und keine Phasenrelation zwischen solchen besteht, addieren sich die Intensitäten und man erhält:

Parallel:

$$\nu_0 \pm \omega, \quad \text{Intens.} = \frac{\text{A}^2}{2}.$$

Senkrecht:

$$\nu_0 \pm \omega', \quad \text{Intens.} = \left(1 - \frac{\text{A}^2}{8} + \ldots\right)^2 + \left(\frac{\text{A}^2}{8} + \ldots\right)^2;$$

$$\nu_0 \pm 2\omega \pm \omega', \quad \text{Intens.} = 2\left(\frac{\text{A}^2}{16} + \ldots\right)^2.$$

Für $\text{A} = \frac{3}{4}$ sind die Intensitäten also

$$0{,}28\,(p), \quad 0{,}87\,(s) \quad \text{und} \quad 0{,}0003$$

Die letztere Linie ist nicht wahrzunehmen, so dass ein *Quadruplett resultiert.*

Für $A = \frac{7}{8}$ ergibt sich :

$$\text{Intens.}\ (p)\ 0{,}38;\qquad (s)\ 0{,}80;\qquad (s)\ 0{,}005.$$

Hier könnte längere Exposition ein *Oktett* ergeben.

Es müssten also, wie man sieht. die Fourierschen Reihen für $\cos \mathfrak{Z}$ recht langsam konvergieren, um noch kompliziertere Zerlegungen zu ergeben.

Für $A = 1$ ergibt sich ein neues *Oktett*:

$$(p)\ \nu_0 \pm \omega,\qquad (s)\ \nu_0 \pm \omega',\qquad (s)\ \nu_0 \pm \omega' \pm \omega.$$

Zwischen ω' und ω soll, nach Voraussetzung, ein rationales Verhältnis bestehen. Sei zunächst $A = \frac{3}{4}$ ungefähr, und $\omega' = \omega$, so ergibt sich ein Dublett mit koinzidierenden Parallel- und Perp.-Komponenten [Hg 2536,72 nach Runge und Paschen, und viele von Purvis untersuchte Linien, z. B. Vanadium ([1]) 3885,03; 3876,25; 3566,32 usw.; Ruthenium ([2]) 4584,7; 4372,7 usw.].

Für $\omega' = 2\omega$ ergibt sich das *Quadruplett der Linie* D_1.

Für $\omega' = 3\omega$, A vergleichbar mit $\frac{7}{8}$, reduziert sich das Oktett auf das *Sextett der Linie* D_2.

Mit den beiden (p)-Komponenten koinzidieren zwei (s)-Komponenten, die aber wesentlich schwächer sind, und vielleicht deshalb nicht beobachtet. Im übrigen sind die quantitativen Verhältnisse die von Runge und Paschen beobachteten. Bei D_2 hat man ω halb so gross zu wählen wie bei D_1, oder besser bei D_1 anzusetzen

$$\sin \mathfrak{Z} = A \sin 2\omega(t - t_0)\qquad \text{statt}\qquad A \sin \omega(t - t_0).$$

Die beiden D-Linien würden bei dieser Auffassung zu einer und derselben Grundperiode gehören. Der Wert $e/mc = \omega'/H$, der sich für das schwingende Teilchen ergibt, beträgt allerdings nur $\frac{2}{3}$ des Kathodenstrahlwertes $1{,}88 \cdot 10^7$. *Allgemein übersteigt* ω'/H *in keinem bisher beobachteten Fall den Kathodenstrahlwert;* bei den sehr weiten Tripletts Zn 4680 und ihren Homologen bei

([1]) Purvis, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, t. XX, 1906, p. 210.

([2]) Purvis, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, t. XIII, 1906, p. 351.

Hg usw. ist nach den neuesten absoluten Messungen von P. Weiss und A. Cotton [1], sowie nach A. Stettenheimer [2] $\omega'/H = 1,78 . 10^7$; der Kathodenstrahlwert wird nicht ganz erreicht. Für dasselbe Triplett ergibt sich dagegen nach Lorentz' Theorie $e/mc = 3,56 . 10^7$, und es gilt der Satz: für kein Triplett ist e/mc grösser als dass *Doppelte* des Kathodenstrahlwertes. Von komplizierteren Zerlegungen muss ich dabei absehen, da eine Theorie derselben nicht vorliegt, ausser in den von Robb [3] behandelten Fällen (Nonett usw.); hier gilt derselbe Satz: für das Nonett ist e/mc = Doppelter Kathodenstrahlwert.

Ich halte die Aussage $e/mc \leq$ Kathodenstrahlwert, in welcher die Annahme magnetischer (und nicht elastischer!) Molekularkräfte eine *wesentliche* Rolle spielt, für bedeutend einfacher und plausibler als die Aussage, es könne e/mc sowohl kleinere als grössere Werte wie $1,88 . 10^7$ annehmen, jedoch über das Doppelte dieses Betrages nicht hinausgehen, und glaube hierin eine nicht unwesentliche Stütze der gemachten Grundhypothese erblicken zu dürfen.

Es kann aber auch $\omega' = \omega/2$ gesetzt werden; dann erscheint ein *inverses Quadruplett*, in welchem die (s)-Komponenten *zwischen* den (p)-Komponenten liegen.

Ist endlich $\omega' = \omega/n$ bedeutend kleiner als ω, so ergibt sich das *inverse Triplett*, welches, wie das inverse Quadruplett, von Becquerel und Deslandres [4] im Spektrum von Fe zuerst beobachtet wurde: die seitlichen Komponenten sind (p), die zentralen (s).

Dem Ansatz

$$\sin\mathfrak{Z} = a + b \sin\omega(t - t'), \qquad |a| < 1, \qquad |b| < 1$$

entspricht die Zerlegung in drei (p)-Komponenten ν_0, $\nu_0 \pm \omega$; die (s)-Komponenten, deren Intensitäten je nach den Werten von a und b sehr verschieden sein können, sind

$$\nu_0 \pm \omega', \qquad \nu_0 \pm \omega \pm \omega', \qquad \nu_0 \pm 2\omega \pm \omega'.$$

Sind a, b von der Grösse $\frac{3}{4}$ etwa, und ist $\omega' = \omega$, so erhält man ein

(1) P. Weiss und A. Cotton, *Journ. de Phys.*, Juni 1907.

(2) A. Stettenheimer, *Inaug.-Diss.*, Tübingen, 1907.

(3) A.-A. Robb, *Inaug.-Diss.*, Göttingen, 1904.

(4) H. Becquerel et H. Deslandres, *Comptes rendus*, t. CXXVII, 1898, p. 18.

Triplett, wie es Runge und Paschen in der ersten Nebenserie von Mg, Ca, Sr, Hg (hier $\lambda = 2967,37$; $2534,89$) beobachtet haben, in welchem drei (p)-Komponenten, und, mit den zwei äusseren koinzidierend, zwei (s)-Komponenten erscheinen.

Diese Beispiele, die sich leicht vermehren liessen, mögen genügen, um zu zeigen, dass die Theorie in der Tat eine grosse Anzahl charakteristischer, anomaler Zeemaneffekte quantitativ richtig darstellt. Zu den bisherigen Betrachtungen kommt aber noch ein neues Moment hinzu. Verändert man bei gleich bleibender Bewegung des Moleküls und somit gleichem ω die Stellung von H_0 im Molekül, so bleibt das Schema der Linien $\nu \pm m\omega$ usw. unverändert, die Intensitäten aber ändern sich. Beschreiben wir die Bewegung des Moleküls mittels der drei Eulerschen Winkel (¹) φ, ϑ, ψ, wobei die erste Lage von H_0 als z-Achse des bewegten Koordinatensystems gelte, so dass ϑ, ψ mit den bisher so bezeichneten Winkeln zusammenfallen. Seien ϑ_0, φ_0 die in bezug auf dies bewegte System unveränderliche Polarkoordinaten der neuen Richtung von H_0 (²), und endlich ϑ', ψ' die Winkel von H_0' mit dem festen System, die den früheren ϑ, ψ entsprechen, und die nunmehr statt ϑ, ψ in die Formeln (11) einzutragen sind. Dann ist

$$\cos\vartheta' = \sin\vartheta \sin\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\vartheta \cos\vartheta_0,$$

$$\sin\psi' = \frac{1}{\sin\vartheta'}\left[-\sin\vartheta_0 \cos\psi \sin(\varphi - \varphi_0) - \sin\vartheta_0 \cos\vartheta \sin\psi \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\vartheta_0 \sin\vartheta \sin\psi\right],$$

$$\cos\psi' = \frac{1}{\sin\vartheta'}\left[\sin\vartheta_0 \sin\psi \sin(\varphi - \varphi_0) - \sin\vartheta_0 \cos\vartheta \cos\psi \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\vartheta_0 \sin\vartheta \cos\psi\right].$$

Mithin ist ϑ' von ω' unabhängig, und $\sin\psi'$, $\cos\psi'$ sind wie $\sin\psi$, $\cos\psi$ lineare Funktionen von $\cos\omega' t$, $\sin\omega' t$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Falls nun dem Atom, wie einem Kristall, unter Umständen gewisse Symmetrien zukommen, so werden sich die Elementarmagnete bei verschiedenen Molekülen an verschiedenen Stellen ansetzen

---

(¹) Vgl. z. B. F. Klein und A. Sommerfeld, *Theorie des Kreisels*, t. I, Leipzig, 1897, p. 17.

(²) So dass $\sin\vartheta \sin\varphi$, $\sin\vartheta \cos\varphi$, $\cos\vartheta$ die Richtungskosinusse von H_0' in bezug auf die bewegten Achsen sind.

können. Rotieren etwa alle Moleküle um ihre grösste Hauptträgheitsachse, so dass $d\psi/dt$, $\mathfrak{J}$ konstant sind, so entsprechen den verschiedenen Ansatzstellen zwar dasselbe ω', aber im allgemeinen verschiedene $\mathfrak{J}$, und die magnetische Zerlegung einer Linie der entsprechenden Serie erscheint als die Superposition dieser Einzelzerlegungen.

Wichtig ist, dass, von einzelnen Fällen, wie z. B. das Triplett, abgesehen, im allgemeinen sich eine theoretisch unendliche Anzahl von Komponenten ergibt, deren Intensitäten aber mehr oder weniger rapid abnehmen, so dass eine verhältnismässig einfache Zerlegung sich ergibt. Die Beobachtung bestätigt in der Tat in vielen Fällen, dass bei komplexen Zerlegungen einzelne Komponenten, besonders die äussersten, schwach sind [1], so dass man den Eindruck erhält, dass die Linie sehr wohl in ein ganzes Spektrum zerlegt sein könnte, von welchem nur die eine gewisse Minimalintensität besitzenden Linien wahrgenommen werden. Dies ist wohl insbesondere auch der Fall bei der von Lohmann (*loc. cit.*) gefundenen Zerlegung in 15 Komponenten, von denen je fünf äquidistant sind, und deren Erklärung auf Grund der Theorie der komplexen Elektronen, wenn sie überhaupt möglich, ein sehr kompliziertes Bild erfordern müsste. In der hier vorgetragenen Theorie entspricht sie einer etwas langsameren Konvergenz der Fourier-Reihen, wobei aber doch die Ordnungszahlen $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ allein in Betracht kommen, und $\omega' = 6\omega$ ist (angenähert). Längere Exposition könnte daher wohl in vielen Fällen neue, schwache Linien zum Vorschein bringen. Bei weniger scharfen Linien würde — was vielfach beobachtet wird — eine mehr oder weniger diffuse, nach den Rändern hin abschattierte Erscheinung sich zeigen, deren Auflösung nicht mehr gelingt.

Die Beurteilung der Intensitäten ist sehr unsicher und wird noch dadurch erschwert, dass, wie Hr. Zeeman [2] neuerdings gezeigt hat, das Reflexionsvermögen der Gitter für verschieden polarisiertes Licht sehr verschieden sein kann. Die Anwesenheit von Tra-

---

(1) Bei komplizierten Trennungen beobachtete Hr. Lohmann (*loc. cit.*), wie er selbst angibt, immer einige sehr schwache Linien. Vgl. die photogr. Reproduktionen bei Lohmann, insbesondere Fig. 3 und 4 (Nonett und Sextett), und bei Runge und Paschen, *Abh. d. Berliner Akad.*, 1902.

(2) P. Zeeman, *Versl. Amsterdam*, Dez. 1907.

banten kann eine bedeutende Unsicherheit auch der Wellenzahlen, und selbst eine scheinbare Disymmetrie im Felde hervorrufen, besonders wegen des Umstandes, dass ihre relative Intensität im Feld sich oft sehr verändert [1], so dass einige Linien ganz verschwinden, während dafür Linien erscheinen [2], die vorher nicht wahrnehmbar waren.

Ich muss es daher dahingestellt sein lassen, ob die entwickelte Theorie in jeder Hinsicht zur Darstellung der Beobachtungen sich eignet. Doch zeigen die vorangehenden Entwickelungen, wie ich glaube, *dass die Annahme, es sei ein Molekularfeld* H_0 — *von starren Bedingungen — abgesehen die einzige treibende Kraft, welche auf die die Serienspektren erzeugenden schwingenden Teilchen wirkt*, *in wesentlich höherem Masse als die Lorentzsche Hypothese der Ionen geeignet ist die Erscheinungen des Zeemaneffektes in ihrer grossen Mannigfaltigkeit und ihren charakteristischen Merkmalen darzustellen*, *wobei von Wichtigkeit ist*, *dass sie sich auch bei der Erklärung der Seriengesetze bewährt* — ein Problem, welches von der Lorentzschen Theorie ganz unberührt geblieben ist.

Damit wäre zunächst die Frage nach der Ursache der anormalen Zeemaneffekte auf die einfachere reduziert, die angenommenen periodischen Bewegungen des Moleküls im Felde zu erklären. Hierbei spielen aber eine wesentliche Rolle die ganz unbekannten Faktoren : Struktur des Atoms, Verteilung seiner Ladung, innere Bewegungen (wie z. B. die die molekularen Magnetfelder erzeugenden sehr grossen Drehgeschwindigkeiten elektrischer Ladungen), endlich elektromagnetische Trägheitsreaktionen. Vielleicht hat man also eher aus dem Zeemaneffekt auf diese Faktoren zu schliessen. Von der Lösung der Aufgabe, jeder einzelnen Serie ihren bestimmten Zeemaneffekt zuzuerteilen, muss die Theorie im gegenwärtigen Stand unserer Kenntnis der Atome wohl absehen. Doch ist es wichtig wenigstens zu zeigen, dass prinzipielle Schwierigkeiten den gemachten Annahmen über die Molekularbewegung im magnetischen Feld nicht entgegenstehen.

---

(1) Vgl. insbesondere W. HARTMANN, *Inaug.-Diss.*, Halle, 1907.

(2) Hierher gehört vermutlich die von Runge und Paschen (*loc. cit.*) bei der Linie Hg 2536,72 erwähnte Erscheinung.

Es ist zunächst zu beachten, dass die Molekularstösse in der Lichtquelle, in Abwesenheit eines magnetischen Feldes, keine mit den hier in Betracht kommenden vergleichbare Rotationsgeschwindigkeit hervorbringen, worauf Lord Rayleigh hingewiesen hat; es würden sonst die Linien sämtlich diffus, da innerhalb gewisser Grenzen alle Rotationsgeschwindigkeiten möglich sein müssten. Hinfällig wird der Schluss nur, wenn man, wie dies in der Lorentzschen Elementartheorie des Zeemaneffektes angenommen wird, für die auf ein schwingendes Teilchen wirkenden Kräfte *vollständige* Kugelsymmetrie annimmt, und zwar für *alle* emittierten Linien; eine Annahme, die recht unwahrscheinlich ist. Die besondere Schärfe der Quecksilberlinien (zu denen jetzt noch Neon- und Heliumlinien zuzufügen sind) wird darauf zurückgeführt, dass bei einatomigen Gasen nach der kinetischen Theorie keine Rotationsenergie bestehen soll.

Ferner erfordert die von Runge und Paschen wenigstens sehr angenähert konstatierte Unveränderlichkeit der Zerlegung innerhalb einer Serie, dass die Hinzufügung neuer Elementarmagnete ohne merklichen Einfluss auf die Bewegung des Moleküls bleibe. Man wird also wohl die magnetische Polarisation des Moleküls von der Betrachtung ausschliessen können.

Trägt das Molekül elektrische Ladungen — wobei seine Gesamtladung, und daher sein Dopplereffekt in den Kanalstrahlen, null sein können — so wird das Magnetfeld die Bewegung beeinflussen. Allein, da die magnetische Kraft bekanntlich bei reibungslos bewegten Ladungen keine Arbeit leistet, bleibt die Energie der Rotation des Moleküls um seinen Schwerpunkt im grossen ganzen dieselbe wie vorher, und es kann keine Zerlegung der Linien erfolgen.

Diesem Einwand kann man durch folgende Ueberlegung begegnen. In allen für Spektraluntersuchungen dieser Art benutzten Lichtquellen bewegte sich eine grosse Anzahl freier Elektronen, welche im Magnetfeld Schraubenlinien *mit einer und derselben Drehgeschwindigkeit* $\omega = eH/mc$ durchlaufen. Dass diese Veränderung ihrer Bewegung auf die Intensität der Linien von Einfluss ist, wurde oben bemerkt; es liegt die Annahme nahe genug, dass sie den Molekülen nun wesentlich grössere Rotationsgeschwindigkeiten beizubringen vermögen, als wenn sie sich in geradlinigen

Bahnen bewegen. Da der « Stoss » eines Elektrons auf ein Molekül ein recht schwieriger Begriff ist, wird man wohl besser von elektromagnetischen Impulsen bei grosser Annäherung, ohne Berührung, reden; dann ist für die Energieübertragung von den freien Elektronen auf die Moleküle die Ladung derselben und die Verteilung dieser Ladung massgebend. Bei Bandenspektren scheint nach den bisherigen Untersuchungen keine Ladung vorhanden zu sein; daraus erklärt sich, dass kein Zeemaneffekt der betrachteten Art bei ihnen eintritt.

Betrachten wir zunächst das Molekül als einen starren Körper, mit welchem die Elementarmagnete starr verbunden sind. Die Bewegung dieses Körpers im magnetischen Felde geht nicht kräftefrei vor sich. Doch erscheinen die Drehmomente, die das Feld auf ihn ausübt [1], mit einem Faktor von der Form EH/AC multipliziert, wo A ein Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt ist, und E eine ebenso mit den elektrischen Ladungen an Stelle träger Massen gebildete Grösse bedeutet. Bei homogener Ladung ergibt sich also die Grössenordnung eH/Mc (e gleich Ladung des Atoms, M seine Masse). Da aber e/Mc höchstens $\frac{1}{1000}$ des Kathodenstrahlwertes beträgt, so sind die durch diese Drehmomente hervorgerufenen Oszillationen viel langsamer als die zur Erklärung des Zeemaneffektes herangezogenen [2]. Betrachten wir also zunächst die Bewegung als kräftefrei; es ist bekannt, dass die Integration in diesem Falle wie auch beim schweren Kreisel, beim Pendel usw., auf eine Darstellung der Eulerschen Winkel durch elliptische Funktionen führt. Die Fourierschen Entwickelungen der Funktionen snx, cnx, dnx sind von Jacobi [3] gegeben und konvergieren in den meisten Fällen so rasch, dass nur die beiden ersten Glieder in Betracht kommen. Die Bewegung hat also den vorausgesetzten Charakter; im allgemeinen ist sie allerdings nicht periodisch, sondern es sind ω, ω' beliebig und hängen von den Integrationskonstanten ab. Dies ist im allgemeinen bei ähnlichen

---

(1) Dieselben sind, unter der speziellen Voraussetzung homogener Ladung, von W. Voigt gegeben (*Ann. d. Phys.*, t. IX, 1902, p. 115).

(2) Zwingend ist der Schluss allerdings nicht, da für das Zustandekommen einer Wirkung genügen würde, dass *ein* Trägheitsmoment bedeutend kleiner als die andern sei, oder dass die Elementarmagnete im Atom beweglich seien.

(3) G.-C.-J. Jacobi, *Fundamenta nova*, § 39, Formeln (19), (21), (25).

Problemen der Fall, und es würde hierin ein wichtiger Einwand liegen, wenn man diese Konstanten wirklich als willkürlich betrachten könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn da die Bewegung durch die Rotation der Elektronen um Achse H hervorgebracht wird, und andere Elektronenbewegungen keine merklichen Drehgeschwindigkeiten horvorzubringen imstande sind, wird die bei freier Bewegung im Raum unveränderliche Richtung des Flächenvektors parallel H liegen müssen, und die ebenfalls unveränderliche Komponente der Instantanrotation in Richtung des Flächenvektors gleich der Elektronenrotation $\omega = eH/mc$ zu setzen sein. Es bleibt dann nur noch die Grösse der Rotationsenergie des Moleküls willkürlich. Unter Berücksichtigung der schon angegebenen Bedingungen dürfte dieselbe sehr wahrscheinlich einem Maximum- oder Minimumwert zustreben — schon aus Stabilitätsgründen — d. h. eine der Hauptträgheitsachsen wird bestrebt sein, sich in die Richtung von H zu legen, so dass schliesslich eine gleichförmige Rotation um diese Achse bei der grossen Mehrzahl der Moleküle resultiert. Der Winkel von H_0 gegen diese Achse, und somit gegen H, hat dabei einen durch die Molekularstruktur bestimmten, unveränderlichen Wert $\mathfrak{I}_0$; besitzt das Molekül Symmetrien, so sind mehrere Werte von $\mathfrak{I}_0$ möglich. Auch $d\psi/dt$ hat nach Voraussetzung den unveränderlichen Wert $\omega' = eH/mc$. Wir haben diesen Fall oben behandelt; es entspricht ihm insbesondere, für $\mathfrak{I} = 90°$, das Triplett Zn 4680 und die Homologen bei Hg, Cd, usw.

Doch ist diese Bewegung ein viel zu spezieller Fall des allgemeinen Ansatzes, um zur Beschreibung der Erscheinungen auszureichen. Sie sollte uns nur als Beispiel dienen zur Festlegung scheinbar willkürlicher Integrationskonstanten, die in ω, ω' eingehen können.

Wie nun die von der Theorie geforderten Bewegungen des Moleküls oder, besser gesagt, der vielleicht im Molekül beweglichen Achse H_0 zustande kommen, und warum sie bei verschiedenen chemisch verwandten Molekülen dieselben sind, wie aus den Untersuchungen von Runge und Paschen über die Zerlegung einander entsprechenden Linien im magnetischen Feld hervorgeht, muss ich dahingestellt lassen. Dass periodische Bewegungen ausgezeichnet seien, bzw. dass die ihnen entsprechenden Anfangs-

bedingungen besonders häufig vorkommen, wie wir angenommen haben, wird man wohl als plausibel betrachten können, da hierbei jeder Punkt eine *geschlossene Bahn* durchläuft, im Gegensatz zu allgemeinen Bewegungen, wo ω', ω zueinander inkommensurabel sind.

In dieser Darstellung bildet also der Zeemaneffekt für die Rotationsbewegung des Moleküls, wie das Ohr für die Luftschwingungen, gewissermassen einen *harmonischen Analysator*.

Tübingen, Januar 1908.

VIII.

ÜBER DIE SPEKTREN DER ALKALIEN.

BEMERKUNGEN ZU DER ARBEIT DES HERRN C. RUNGE (¹).

Physikalische Zeitschrift, 9. Jahrgang, No. 8, Seite 244-245.

Durch die photo-phosphorographische Methode hat Herr A. Bergmann kürzlich (²) neue, im Rot und Ultrarot verlaufenden Serien von K, Rb, Cs entdeckt. Herr Runge hat hieran die Bemerkung geknüpft, es ständen die neuen Serien zur ersten Nebenserie in derselben Beziehung wie die Hauptserie zur zweiten Nebenserie, woraus sich der Nachweis einer zur ersten Nebenserie gehörigen Hauptserie ergäbe. Die numerischen Beziehungen, auf die Herr Runge diesen Schluss gründet, sind zwar nur roh angenähert, doch konnte der Fehler möglicherweise an der bei der geringen Genauigkeit der Messungen sehr bedeutenden Unsicherheit der Extrapolation liegen. Als Kriterium für die Richtigkeit seiner Annahme hebt Herr Runge mit Recht hervor, dass die Differenzen der Schwingungszahlen der Paare der neuen Serien, die nur bei Cs und auch da von Herrn Bergmann nur quantitativ sehr unsicher beobachtet wurden, nicht konstant sein sollten (wie es Herr Bergmann angibt), sondern mit wachsender Ordnungszahl, wie bei der Hauptserie, enger zusammenrücken müssten.

Nun sind aber schon früher von Saunders (³) dieselben Cs-Linien (nebst weiteren Gliedern der Serie), soweit ihre Wellenlänge kleiner als 9000 ist, photographisch mit dem Konkavgitter

(¹) Physikal. Zeitschr., t. IX, 1908, p. 1.

(²) A. Bergmann, *Inaug.-Diss.*, Jena, 1907.

(³) P. Saunders, *Astrophys. Journal*, t. XX, 1904, p. 188.

beobachtet und gemessen worden, wobei eine wesentlich höhere Genauigkeit erzielt wurde. Saunders bemerkte auch ihren Seriencharakter, bildete aber irrtümlicherweise aus ihnen zwei Serien, die nun durch die bekannten Formeln sich nicht darstellen liessen. Die Differenzen der Schwingungszahlen (diese fünfstellig geschrieben) sind : 96 ; 98,5 ; 97,5 ; 98,4 ; 97,7 ; 80 (sehr unsicher), wozu noch nach A. Bergmann das erste Glied mit 97,5 kommt. Damit ist, in bester Übereinstimmung mit A. Bergmann die *Konstanz* der Differenzen der Schwingungszahlen erwiesen ; die neue Serie hat den Charakter einer *Nebenserie*, womit die von Herrn Runge gemachte Annahme hinfällig wird.

Durch die Auffindung von Satelliten der ersten Nebenserie war Saunders in der Lage nachzuweisen, dass auch bei Cs das Gesetz der konstanten Differenzen streng gültig ist. Für die schon bekannten Serien ist die Differenz 554 ; für die neue 97,5. Man wird daher eher geneigt sein, die neue Nebenserie als eine Analogie zu den Nebenserien engerer Tripletts bzw. Paare von O, S, Se, vielleicht auch zu den einfachen Linien von He zu betrachten. Allein auch diese Hypothese ist hinfällig. Berechnet man nämlich bei Cs das Linienpaar $n = 3$, so ergibt sich $\lambda = 2,19\mu$ und $2,24\mu$ nach Bergmann, wobei die letzte Stelle unsicher ist. Nun hat W. J. H. Moll [1] die infraroten Spektren der Alkalien bis 4μ untersucht ; bei Cs fand er die Linien $1,0028\mu$ und $1,0127\mu$ von Bergmann (die er allerdings nicht trennen konnte) mit der Intensität 90, ebenso das folgende Paar bei $0,80\mu$ (Intensität 40). Das Paar $n = 3$ sollte also eine grössere Intensität besitzen. Aber Herr Moll findet in dieser Spektralgegend nur zwei schwache Linien $2,08\mu$ (Intensität 5) und $2,41\mu$ (Intensität 5). Wenn auch aus der numerischen Abweichung keine sicheren negativen Schlüsse zu ziehen sind, so ist das Fehlen [2] intensiver Linien von $1,4\mu$ bis 4μ ein hinreichender Beweis dafür, dass die Linien $m = 3$ fehlen, oder wenigstens sehr schwach sind.

Nun ist die erste Nebenserie von Wasserstoff die Balmersche

---

(1) W. J. H. Moll, *Proc. Amst. Acad. Wetensch.*, 26 Jan. 1907 (aus dre *Inaug.-Dissert.*).

(2) Die Linien $3,51\mu$ (Intensität 30) und 3,00 (Intensität 50) bilden das Paar $n = 3$ der ersten Nebenserie.

Serie

$$\frac{1}{\lambda} = 109675.0\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

in welcher der Wert $m = 2$ singulär wird ($\lambda = \infty$). Es hat sich merkwürdigerweise bei He[1], Zn, Cd, Hg[2], Tl[3], wo Beobachtungen vorliegen, gezeigt, dass die entsprechende Linie $m = 2$, für welche man eine bedeutende Intensität erwarten sollte, sicher *fehlt*. Gleiches gilt für Na nach den Beobachtungen von Moll. Hier sollte $\lambda = 3{,}240\,\mu$ sein; für $m = 3$ ($\lambda = 0{,}820$) findet Moll die Intensität 240, während bei $3{,}24\,\mu$ ($m = 2$) überhaupt keine Linie liegt und in der Nähe sich nur schwache Linien finden. Existiert aber die Linie $n = 2$ nicht, so kann auch die zugehörige Hauptserie, deren erstes Glied sie ist, nicht wohl existieren [4].

Man wird also vermuten, dass es sich bei den von Herrn Bergmann gefundenen Serien um erste Nebenserien handle, die, dem Rydbergschen Schema entsprechend, der hypothetischen Wasserstoffserie

$$\frac{1}{\lambda} = 109675{,}0\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

analog wären. Damit würde das Fehlen der Linien für $m = 3$ sich einigermassen erklären, und ferner der befremdliche Umstand, dass die neuen Serien mit wachsendem Atomgewicht statt, wie gewöhnlich, nach grösseren λ, nach kleineren rücken. Die Grenzen der Serien sind in der Tat nach Bergmann, wenn $\frac{1}{\lambda}$ fünfstellig geschrieben wird,

bei K : 13482, bei Rb : 14344, bei Cs : 16888 und 16792,

und nach den Rydbergschen Anschauungen wären die Serien in

([1]) C. RUNGE und F. PASCHEN, *Astrophys. Journ.*, Januar 1896.

([2]) H. HERMANN, *Inaug.-Diss.*, Tübingen, 1904.

([3]) Vgl. *Magnetische Atomfelder und Serienspektren; Œuvres*, VII, p. 98.

([4]) Zwar haben Runge und Paschen insbesondere bei Cu, Ag Linienpaare gefunden, deren magnetische Zerlegung und Abstand die für diese neue Hauptserie zu fordernden sind. Allein es war mir nicht möglich, auch nur einen roh angenäherten, zahlenmässigen Anschluss an die erste Nebenserie zu finden, wie er zwischen der zweiten Nebenserie und der Hauptserie besteht.

der Form zu schreiben :

$$\text{K} : 109675\left[\frac{1}{(3-0,1478)^2}-\frac{1}{(m-0,0081)^2}\right],$$

$$\text{Rb} : 109675\left[\frac{1}{(3-0,2349)^2}-\frac{1}{(m-0,0145)^2}\right],$$

$$\text{Cs} : 109675\left[\frac{1}{(3-a)^2}-\frac{1}{(m-0,0176)^2}\right],$$

wo $a = 0,4516$ und $0,4443$ ist.

Man erkennt, dass sowohl in den ersten, als in den zweiten Klammern die Zahlen 0,1478, 0,0081 usw., welche die Abweichung vom Wasserstoffspektrum bedingen, mit wachsendem Atomgewicht dem absoluten Werte nach zunehmen, wie es bei den übrigen Serien der Alkalien der Fall ist.

Zwischen den Konstanten der neuen Serien und denen der früher bekannten konnte ich keine Beziehungen finden. Die von Herrn Runge aufgestellten, angenäherten Relationen sind bedeutungslos, da sie, wie oben gezeigt, mit den genauen numerischen Werten der Schwingungsdifferenzen nicht vereinbar sind.

Zürich, März 1908.

IX.

ÜBER EIN NEUES GESETZ DER SERIENSPEKTREN.

(VORLÄUFIGE MITTEILUNG.)

Physikalische Zeitschrift, 9. Jahrgang, No. 16, Seite 521-529.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass man aus bekannten Spektralserien eines Elements neue Serien ableiten kann, durch welche insbesondere fast sämtliche neuerdings von Lenard, Konen und Hagenbach, Saunders, Moll, Bergmann u. a. in den Alkalien entdeckten Serien und Linien genau dargestellt werden — ohne Hinzuziehung irgend einer neuen Konstanten. Auch auf andere Spektren, insbesondere He und die Erdalkalien, findet das neue *Kombinationsprinzip* Anwendung. Es ergeben sich nähere Beziehungen zum Atomgewicht, als bisher bekannt war, und die Gesamtheit dieser neuen Relationen erleichtert die Auffindung der Serien bei Elementen, wo sie noch nicht bekannt sind.

Die von mir [1] aufgestellte Serienformel lautet in ihrer zweckmässigsten Form :

$$\nu = A - \frac{N}{[m + \alpha + \beta(A - \nu)]^2}, \tag{1}$$

$$N = 109675.0$$

wo ν die auf Vakuum bezogene reziproke Wellenlänge ist, fünfstellig geschrieben ; N eine universelle Konstante, m die Ordnungszahl [2] der Linie, A die Grenze der Serie, α, β Konstanten. Für kleine m kann ν negativ werden : dies muss natürlich beim Glied

[1] W. Ritz, *Ann. d. Physik*, t. XII, 1903, p. 264. *Inaug.-Diss.* Auszug : *Œuvres*, I, p. 1.

[2] Diese Zahl habe ich noch näher durch die Festsetzung $|\alpha| < 0{,}5$ definiert. Eine Änderung der Numerierung könnte sonst durch eine entsprechende Änderung von α immer kompensiert werden.

$\beta(A-\nu)$ berücksichtigt werden. Dies lässt sich auch schreiben

$$\nu = A - \frac{N}{\left(m+\alpha+\frac{\beta N}{m^2}-\frac{2\alpha\beta N}{m}+\ldots\right)^2}. \tag{2}$$

Die Konstanten α, β charakterisieren den Verlauf der Serie; sie sind für zwei Serien von Paaren mit konstanten Differenzen Δ identisch [1], da man beim Übergang von der ersten zur zweiten ν mit $\nu+\Delta$, A mit $A+\Delta$ zu vertauschen hat, so dass Δ aus der Formel herausfällt. Wir setzen abkürzend

$$(m, \alpha, \beta) = \frac{N}{\left(m+\alpha+\frac{\beta N}{m^2}-\frac{2\alpha\beta N}{m^3}+\ldots\right)^2}. \tag{3}$$

Die Konstanten α, β mögen für die Paare der ersten Nebenserie (*diffuse Serie*, nach Rydbergs Bezeichnung) die Werte d, δ haben; für die der zweiten Nebenserie (*scharfe Serie*) die Werte s, σ; für die der Hauptserie (*Prinzipalserie*) die Werte p_1, π_1, bez. p_2, π_2, $(p_1 > p_2)$. Es ist (*loc. cit.*, S. 291) $\pi_1 = \pi_2$ sehr angenähert. Besitzt die erste Nebenserie einen Satelliten, welcher mit der einen Hauptlinie konstante Differenzen aufweist, so kommt der zweiten Hauptlinie (mit grösserem λ) ein anderes Wertsystem d', δ' zu, wobei wieder angenähert $\delta = \delta'$ ist.

Das System von Hauptserie, erster und zweiter Nebenserie lässt sich nun (*loc. cit.*, S. 291) durch das Gleichungssystem (5) darstellen.

Hauptserie:

$$\pm\nu = \begin{cases} (1{,}5, s, \sigma) - (m, p_1, \pi_1) & \text{kleineres } \lambda, \quad (m = 2, 3, 4, \ldots), \\ (1{,}5, s, \sigma) - (m, p_2, \pi_2) & \text{grösseres } \lambda. \end{cases}$$

2. Nebenserie:

$$\pm\nu = \begin{cases} (2, p_1, \pi_1) - (m, s, \sigma) & \text{grösseres } \lambda, \quad (m = 1{,}5,\ 2{,}5,\ 3{,}5, \ldots) \\ (2, p_2, \pi_2) - (m, s, \sigma) & \text{kleineres } \lambda. \end{cases} \tag{5}$$

1. Nebenserie:

$$\pm\nu = \begin{cases} (2, p_1, \pi_1) - (m, d, \delta) & \text{Hauptlinie, grösseres } \lambda, \\ (2, p_2, \pi_2) - (m, d, \delta) & \text{Satellit} \quad (m = 3, 4, 5, \ldots), \\ (2, p_2, \pi_2) - (m, d', \delta') & \text{Hauptlinie, kleineres } \lambda. \end{cases}$$

---

[1] Die entgegengesetzte Behauptung von H. Hermann (*Diss.* Tübingen, 1904, S. 27) entbehrt jeden Grundes.

Der konstante Abstand der Doubletts ist $(2, p_2, \pi_2) - (2, p_1, \pi_1)$.

Auf Grund des vorliegenden Beobachtungsmaterials lässt sich nun zeigen :

1. Ersetzt man in der Gleichung der Hauptserien 1,5 durch die *grösseren Zahlen* 2,5, 3,5, ..., ferner in denjenigen der Nebenserien 2 durch die *grösseren* Zahlen 3, 4, 5, ..., so ergeben sich neue Linien, die in vielen Fällen beobachtet sind, so dass man obige Gleichungen mit zwei unbestimmten Ordnungszahlen m, n schreiben kann, wie schon Rydberg vermutete.

2. Für jedes Symbol (m, α, β) besteht eine kleinste Zahl m (nämlich 3 für die erste Nebenserie, 1,5 für die zweite bei der von mir loc. cit. benutzten Numerierung), welche der *Grundlinie* entspricht; gibt man m noch kleinere Werte, so sollte man eine noch kräftigere Linie erwarten ; in Wirklichkeit wird diese Linie *nicht* beobachtet. Für die Ordnungszahl $n = 2$ der ersten Nebenserie habe ich schon a. a. O. nachgewiesen, dass sie in keinem Spektrum einer wirklichen Linie entspricht, soweit die Beobachtungen reichen [1].

3. Bildet man aus diesen Symbolen die neue *Kombination*

$$\nu = (1.5, s, \sigma) - (3, d, \delta),$$

so erhält man eine (wenig intensive) Linie, die bei He, K, Rb beobachtet ist, bei Cs und den Erdalkalien ins Infrarot fällt.

4. Auch die Kombination

$$\nu = (2, p_1, \pi_1) - (m, p_1, \pi_1),$$
$$\nu = (2, p_2, \pi_2) - (m, p_2, \pi_2)$$

ist nachweisbar.

5. Bildet man ferner

$$(3, d, \delta) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) \qquad (m = 4, 5, 6, \ldots),$$

so ergeben sich die von Bergmann [2] gefundenen ultraroten

---

[1] W. Ritz, *Œuvres*, VII, p. 98; VIII, p. 137.

[2] A. Bergmann, *Beiträge zur Kenntnis der ultraroten Emissionsspektren der Alkalien* (*Inaug.-Diss.*, Jena, 1907). Die Differenz der Grenzen dieser Serie gegen die der ersten Nebenserie ist nach dieser Formel gleich der Grundlinie der ersten Nebenserie, wie Herr Runge (diese Zeitschr., t. IX, 1908, p. 1) gefunden hat. Dass es sich nicht um eine zur ersten Nebenserie gehörige Hauptserie handelt, wie Herr Runge zuerst vermutete, habe ich schon hervorgehoben (diese Zeitschr., t. IX, 1908, p. 245).

Serien von K, Rb, Cs und die entsprechenden von Li, Na, He, die unbekannt waren. Bei Rb, Cs besitzt die erste Nebenserie einen Satelliten, und man hat dementsprechend noch eine zweite Serie

$$\nu = (3, d', \delta') - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2),$$

die in der Nähe der ersten verläuft und gegen diese konstante Differenzen aufweist, was von Bergmann und Saunders in der Tat bei Cs beobachtet ist, während bei Rb die Linien nicht getrennt werden konnten. Für das Symbol $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ ist $m = 4$ die Fundamentzahl; $\pi_1 - \pi_2$ angenähert gleich Null.

6. Es existieren endlich die Kombinationen

$$\nu = (2, p_i, \pi_i) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$$

und

7. $\nu = (4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$. Bei allen Kombinationen kann man zweifellos die Ordnungszahlen beider Glieder erhöhen; die entsprechenden Linien sind aber meist zu schwach, um wahrgenommen zu werden.

Bei den Erdalkalien fehlen ausgedehnte Untersuchungen über das infrarote Gebiet, wie sie bei den Alkalien vorliegen, und die Hauptserien sind nicht beobachtet, so dass eine Prüfung des Kombinationsprinzips in dem bisher besprochenen Sinn zunächst noch unterbleiben muss. Dass es aber auch hier gültig bleibt, zeigen folgende Umstände:

Bei Triplettserien mit zwei Satelliten in der 1. Nebenserie hat man noch die neuen Symbole (m, p_3, π_3), (m, d'', δ''), wobei $p_1 > p_2 > p_3$ ist, einzuführen. Da $\pi_1 - \pi_2$, $\delta - \delta'$ bei den Alkalien angenähert Null sind, erhält man $p_1 - p_2$, $p_2 - p_3$, angenähert aus den Grenzen der Nebenserien, wenn man diese in der Form $\frac{N}{K_i^2}$, $i = 1, 2, 3$ schreibt, und $p_1 - p_2 = K_1 - K_2$, usw. setzt (wobei $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$ angenommen wird). Es ist $p_1 - p_2$ etwa doppelt so gross wie $p_2 - p_3$, und die beiden Schwingungszahldifferenzen, die Rydberg mit ν_1, ν_2 bezeichnet, lassen sich schreiben

$$\nu_1 = (2, p_2, \pi_2) - (2, p_1, \pi_1),$$

$$\nu_2 = (2, p_3, \pi_3) - (2, p_2, \pi_2).$$

Bekanntlich schwankt der Quotient von ν_1 durch das Quadrat des

Atomgewichts μ innerhalb einer Gruppe chemisch verwandter Elemente nicht sehr; dagegen schwankt er von Gruppe zu Gruppe beträchtlich, von 31,6 bei Cs bis 187,0 bei Tl. Da ν_1 einen komplizierten Ausdruck hat, ist dies zu erwarten: wir führen besser die Grösse $\frac{p_2 - p_1}{\mu^2}$ an Stelle von $\frac{\nu_1}{\mu^2}$ ein; ihre Schwankung ist *viel geringer:*

	Na	K	Rb	Cs	Cu	Ag
$\frac{\nu_1 10^3}{\mu^2}$ [1].......	32,3	37,8	32,3	31,6	61,8	79,0
$\frac{(p_2 - p_1) 10^5}{\mu^2}$....	0,142	0,189	0,180	0,186	0,186	0,242

	Mg	Ca	Sr	Zn	Cd	Hg
$\frac{\nu_1 10^3}{\mu^2}$ [1].......	68,8	66,1	51,5	91,0	93,2	115,4
$\frac{(p_2 - p_1) 10^5}{\mu^2}$....	0,146	0,177	0,157	0,172	0,186	0,223

	Al	In	Tl	He
$\frac{\nu_1 10^3}{\mu^2}$ [1].......	152,8	172,1	187,0	63,8
$\frac{(p_2 - p_1) 10^5}{\mu^2}$....	0,248	0,292	0,327	0,204

Dabei dürfte die noch bestehende Schwankung zum Teil von der Unvollkommenheit der Serienformel, vor allem aber von der Vernachlässigung von $\pi_1 - \pi_2$ herrühren, die bei hohen Atomgewichten sicher einen grösseren Fehler bewirkt. Die Kenntnis der Hauptserien würde erlauben, dies zu entscheiden.

Ferner gelang es, bei Ca, Sr, Ba die Gleichung der zweiten Nebenserie für die starken, ultravioletten Paare der Erdalkalien, für welche die Differenz der Schwingungszahlen ν'_1 etwa doppelt so gross wie ν_1 ist, aufzustellen, und aus den Grenzen dieser Serien die entsprechende Differenz der konstanten p_i zu bilden: die Differenz unterscheidet sich von derjenigen der Triplettserien nur um ca. 15 Proz.; bei exakter Berechnung (es war $\pi_1 - \pi_2 = 0$ gesetzt, da die Hauptserie ins Gebiet der Schumannschen Strahlen fällt und nicht beobachtet ist) würden wohl beide Grössen einander gleich, was dem Kombinationsprinzip der Konstanten entspricht.

[1] Die Zusammenstellung ist von RYDBERG, *Rapports du Congrès*, etc., t. II, Paris, 1900.

Endlich sind bei Ca, Sr neuerdings Nebenserien engerer Tripletts gefunden worden, aus deren Grenzen sich wieder Differenzen $p'_1 - p'_2$, $p'_2 - p'_3$ bilden lassen. Innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze zeigte sich, dass sie mit den aus den Hauptlinien der ersten Nebenserie berechneten Konstanten $d - d'$, $d' - d''$ bzw. gleich sind, so dass hier eine neue Kombination vorliegt.

Diese Umstände zeigen, dass man in manchen Fällen mit Vorteil an Stelle der Wellenzahlen die Konstanten der Formeln in Betracht zieht. Bei einer definitiven, exakten Formel würde dies in noch erhöhtem Masse der Fall sein.

In den Erdalkalien sind Doppellinien mit den Abständen ν_1, Tripletts mit den Abständen ν_1, ν_2 ausserhalb der Serien noch mehrfach beobachtet. Solche Tripletts sind nach dem Kombinationsprinzip in der Tat dann und nur dann zu erwarten, wenn die $(2, p_i, \pi_i)$ mit irgendeiner Grösse (m, α, β) verbunden werden; sie müssen somit zu Serien gehören, die an denselben Stellen endigen, wie die schon bekannten Nebenserien, enthalten aber offenbar nur wenig Glieder, die intensiv genug sind, um beobachtet zu werden, und dürften sich sogar häufig auf ihre Fundamentallinie beschränken.

Es ist bekannt, dass bei wachsendem Atomgewicht oder Siedepunkt die Serien immer rascher abklingen, so dass nur die den niedrigsten Ordnungszahlen entsprechenden Linien beobachtet werden. Anderseits nimmt die Zahl der verschiedenen Serien zu; neben den Triplettserien zeigt z. B. Mg Serien von Doppellinien und von einfachen Linien, und es wächst die Anzahl der Kombinationen. Man gelangt so schliesslich zu einem Spektrum, in welchem eine grosse Anzahl charakteristischer, konstanter Differenzen, aber keine Serien wahrnehmbar sind. Es scheint mir sehr wahrscheinlich, dass die sog. *Spektren zweiter Art*, welche diesen Charakter aufweisen, Serienspektren mit zahlreichen Kombinationen und sehr wenig entwickelten Serien sind.

Die Berechnung einer Grösse (m, α, β) setzt die Kenntnis der Grenze einer Serie voraus, in deren Formel sie eingeht. Diese Grenze lässt sich mit grosser Genauigkeit bestimmen, ausser wenn nur wenige unscharfe Linien beobachtet sind; sie ist auch ziemlich unabhängig von der noch vorliegenden Unsicherheit über die

exakte Form der Seriengleichung. Daher die unten mitgeteilten Rechnungsergebnisse nur geringe Unsicherheit involvieren; bei den oben sub 1., 3., 4. angeführten Fällen hat man sogar ausschliesslich Differenzen oder Summen beobachteter Wellenzahlen zu berechnen; hier ist die Sicherheit naturgemäss noch grösser.

Dagegen lassen sich die in das Symbol $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ eingehenden Konstanten um 20 Proz. variieren, ohne dass der Anschluss an die Beobachtung viel schlechter würde. Wegen der Kleinheit von $p_1 - p_2$, $\pi_1 - \pi_2$ ist nämlich der Einfluss dieser Konstanten relativ gering, diese Serien entfernen sich alle nur wenig von $A - \frac{N}{m^2}$; besonders bei Li, Na ist dies der Fall, während bei K, Rb, Cs die Beobachtungen zu ungenau sind, um einige Sicherheit zu gewinnen.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [1] habe ich gezeigt, dass man Systeme einfachster Art angeben kann, deren Energie rein elektromagnetisch ist, und die die Balmersche Formel, die Seriengesetze, anomalen Zeemaneffekte usw. ergeben. Die Schwingung

$$(6) \qquad \pm \nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right)$$

wird durch das magnetische Feld von $m - 2$ aneinandergereihten Elementarmagneten hervorgebracht, die untereinander identisch sind. Ähnliches gilt bei andern Spektren. Höheren Ordnungszahlen entsprechen so gewissermassen höhere magnetische Polymerisationen, die schliesslich instabil werden, so dass die Linien mit wachsendem m sich verbreitern und immer schwächer werden. Auch stürmische Bewegungen, wie sie im elektrischen Funken stattfinden, sind der Stabilität ungünstig, daher die Serien im Funken bei kleineren Ordnungszahlen aufhören als im Bogen.

Das magnetische Feld im Atom kann bei allen Spektren betrachtet werden als erzeugt durch zwei Pole entgegengesetzten Vorzeichens; jedes der zwei Glieder von $(m, \alpha, \beta) - (n, \alpha', \beta')$ stellt je den Einfluss *eines* Poles dar; jeder dieser Pole kann im Atom verschiedene Lagen annehmen, die z. B. bei Wasserstoff

---

(1) W. Ritz, *Magnetische Atomfelder und Serienspektren*; *Œuvres*, VII, p. 98.

äquidistant auf einer Geraden liegen. Vertauschung dieser Lagen untereinander entspricht dem Kombinationsprinzip. Allgemeiner kann man wohl die Vermutung aussprechen, dass *sich die einfachen Gesetze auf die Lagen dieser Pole im Atom beziehen.*

Dass für die Ordnungszahl ein gewisses Minimum vorgeschrieben ist — was bei keinem bekannten Schwingungsvorgang stattfindet, besagt in dieser Vorstellungsweise nur, dass die Magnetpole durch die Struktur des Atoms in einer gewissen Minimalentfernung von dem im Innern des Atoms schwingenden Elektron gehalten werden, was recht plausibel ist.

Ich gehe zur Besprechung der einzelnen Spektren über.

Wasserstoff.

Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn F. Paschen hat H eine infrarote Linie $\lambda = 18751 \pm 2$; sie ist das Umfassungsglied der Serie

$$\nu = N\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (m = 4, 5, 6),$$

die für $m = 4$ den Wert $\lambda = 18751{,}7$ ergibt, *womit die Annahme, es sei die Balmersche Formel* (6) *mit* **zwei** *ganzen Zahlen zu schreiben,*

$$\nu = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

wohl als bewiesen zu betrachten ist.

Lithium.

Bei Li haben Hagenbach [1], Hagenbach und Konen [2], Saunders [3] eine Reihe neuer Linien entdeckt, die eine Serie bilden. Im Infrarot hat A. Bergmann (*loc. cit.*) zwei Linien gemessen; endlich verdanke ich Herrn Paschen die gütige Mitteilung einiger vorläufiger Messungsergebnisse infraroter Linien der Alkalien.

---

(1) A. Hagenbach, *Ann. d. Physik*, t. IX, 1902, p. 729.

(2) *Physikal Zeitschr.*, t. IV, 1903, p. 592, 801.

(3) *Astrophys. Journ.*, t. XX, 1904, p. 188.

Nach Analogie der übrigen Alkalien sollte man erwarten, dass die Li-Linien aus engen Paaren bestehen. Herr Hagenbach (*loc. cit.*) findet aber die rote Li-Linie (Grundlinie der Hauptserie) einfach, während er, wie auch Saunders, die Linie 4602 der ersten Nebenserie doppelt findet, wobei allerdings der Abstand doppelt so gross ist, als zu erwarten war. Die Linie 6103, deren Komponenten noch weiter auseinander liegen sollten, findet aber Saunders einfach, während Konen und Hagenbach auch bei ihr manchmal eine doppelte Umkehrung wahrnahmen, die sie in dem Sinne deuten, dass die Linie doppelt sei. Durch die folgenden Betrachtungen wird man aber zu einer andern Auffassung gedrängt. Nach der oben erwähnten Beziehung zu den Quadraten der Atomgewichte sollte $p_1 - p_2 = 0{,}00005$ sein. Über $\pi_1 - \pi_2$ lässt sich, nach Analogie der übrigen Alkalien nur sagen, dass es von ähnlicher Ordnung sei, nicht aber, dass es verschwinde. Nun ist [1] $p = -0{,}04815$, $\pi = 0{,}0257$; setzt man etwa $p_1 = p$, $\pi_2 = \pi$, $p_2 = p + 0{,}00005$, $\pi_2 = \pi + 0{,}0002$, so kompensieren sich die Aenderungen für die Grundlinie $m = 2$ der Hauptserie, die somit, ebenso wie die Nebenserien, einfach wird; während für grössere m die Kompensation zwar nur eine teilweise ist, doch sind hier die Linien nur um einige Hundertstel Å.-E. voneinander entfernt, und somit nicht zu trennen. Bei dieser Annahme erklären sich sämtliche Beobachtungen aufs befriedigendste.

Denn bildet man zunächst die Kombination 5, also hier die Serie

$$\nu = 12202{,}6 - \frac{N}{\left(m - 0{,}00005 + \frac{0{,}0002}{m^2}\right)^2}, \qquad (m = 4, 5, 6, \ldots)$$

(wobei die Zusatzglieder, bei den Genauigkeitsgrenzen der Beobachtung, belanglos sind), so ergibt sich für $m = 4$, $\lambda = 18693{,}7$ (18694 nach einer ersten, 18698 nach einer zweiten Messung von F. Paschen); $m = 5$, $\lambda = 12791{,}5$ (Paschen 12784 ± 10). Wei-

---

(1) In meiner Inaug.-Diss. (*loc. cit.*) sind irrtümlicherweise für die Konstanten von Li die allerdings nur wenig abweichenden Ergebnisse einer vorläufigen Berechnung mitgeteilt. Die Grenze der Hauptserie ist 43484,7 (statt 43482,8), die der Nebenserien 28581,6; $s = 0{,}09934$; $\sigma = -0{,}02210$. Die Grundlinie der ersten Nebenserie ist $\nu = 16379{,}0$, somit $(3, d, \delta) = 28581{,}6 - 16379{,}0 = 12202{,}6$.

tere Glieder sind nicht beobachtet. Es entspricht diese Serie den Bergmannschen Serien von K, Rb, Cs.

Die Formel $(2, p_1, \pi_1) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ entspricht einer Serie, die parallel der vorigen verläuft, und deren Linien, da d, δ, $p_1 - p_2$, $\pi_1 - \pi_2$ bei Li alle sehr klein sind, in unmittelbarster Nähe der Linien der ersten Nebenserie liegen. Berechnet man für letztere die Grösse $\alpha + \beta(A - \nu) = \sqrt{\frac{N}{A - \nu}}$, so muss sie, nach Analogie der übrigen Alkalien, negativ sein und dem absoluten Wert nach mit m wachsen. Für $m = 3$ ergibt sich $-0,00204$; für $m = 4$ nach der ursprünglichen Messung 4602,37 von Kayser und Runge $-0,00147$, während die neuen Messungen von Hagenbach 4603,04 und Saunders 4603,2 ergeben $-0,00243$ bzw. $-0,00326$. Es ist also die eine Linie 4603 des Paares die Linie der ersten Nebenserie. Die zweite Linie entspricht

$$(2, p_1, \pi_1) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2),$$

$$m = 4, \qquad \lambda = 4601,32 \text{ [4602,00 Hag., 4601,6 S.]}.$$

Für $m = 3$ berechnet man 6097,56, eine Linie die sicher fehlt, da sie viel zu weit von 6103,77 entfernt ist, um bei der Erklärung der oben erwähnten doppelten Umkehr in Frage zu kommen. Es ist also in $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ die Ordnungszahl 4 die Fundamentalzahl, wie sich noch vielfach bestätigen wird. Bei $m = 5$ ist eine Trennung von der ersten Nebenserie nicht mehr möglich.

Bilden wir endlich die parallel der Hauptserie verlaufende Serie

$$\nu = (2, p, \pi) - (m, p, \pi),$$

deren Grenze gleich der der Nebenserien ist, und die man einfach durch Bildung der Differenzen der Schwingungszahlen der Hauptserie gegen deren Grundlinie berechnet, so erhalten wir die von Konen und Hagenbach gefundene Serie von Linien : $m = 3$, $\lambda = 6240,0$ (6240,8 K. H.; 6240,3 S.), $m = 4$, $\lambda = 4636,05$ (4636,14 H.; 4636,04 H. K.; 4636,3 S.), $m = 5$, $\lambda = 4146,8$ (4149,1 K. H.; 4148,2 S. sehr diffus), $m = 6$, $\lambda = 3922,50$ (3924 K. H.; 3921,8 S.).

Damit sind alle bis jetzt bekannt gewordenen neuen Li-Linien aufgenommen. Herr Paschen findet noch 17563 und 12209, Linien die noch unsicher bestimmt sind; sie dürften den Kom-

binationen

$$(3, p, \pi) - (4, d, \delta), \quad \lambda = 17549.$$
$$(3, p, \pi) - (5, d, \delta), \quad \lambda = 12236$$

entsprechen, die wir, ebenso wie alle andern Kombinationen, bei Na wieder finden werden. Man beachte, dass hierbei nicht eine einzige neue Konstante gebraucht ist.

Natrium.

Das Spektrum von Na ist, ausser von den schon oben genannten, im sichtbaren Teil von Lenard [1], im Infrarot bis $4{,}5\,\mu$ von Moll [2] untersucht worden.

Aus $(3, d, \delta) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ ergeben sich die Linien $(m = 4)$, $\lambda = 18460$ (Paschen 18459,5), $m = 5$, $\lambda = 12679$ (Paschen 12674,5, Messung unsicher). Die nächste Linie 10838 ist bis jetzt nicht beobachtet, weil zu schwach. Aus

$$(2, p_1, \pi_1) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$$

und

$$(2, p_2, \pi_2) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2), \quad p_1 - p_2 = 0{,}00074$$

(Serie von Doppellinien) berechnet man für $m = 4$ das Paar $\lambda = 5675{,}74$, $5670{,}00$. Dies ist das schon von Kayser und Runge beobachtete, nach Violett abschattierte Paar 5675,92, 5670,40; die Grenze der Nebenserien, die in die Rechnung eingeht, lässt sich hier nur bis auf 2 oder 3 Einheiten der 5. Stelle sicher angeben, die Abweichung von der Beobachtung bleibt innerhalb dieser Grenzen. Dass diese Auffassung des nach Violett abschattierten Paares die richtige sei, ergibt sich auch durch die Analogie von Cu, Tl, wo bei $m = 4$ der ersten Nebenserie ein solches Paar beobachtet ist, das durch eine entsprechende Formel dar-

---

(1) LENARD, *Ann. d. Physik*, t. XI, 1903, p. 636.

(2) W.-T.-H. MOLL, *Inaug.-Diss.*, s. *Proc. Amst. Acad. Wet.* 26. Jan. 1907. Die Wellenlängen hat Moll nach den (voneinander etwas abweichenden) Dispersionsbestimmungen für Steinsalz von Rubens und Langley bestimmt. Nach F. Paschen (*Ann. d. Physik*, Mai 1908) ist die letztere die richtige und es sind daher die entsprechenden λ im Texte benutzt. Die Wellenlängen sind bei kräftigen Linien im allgemeinen auf $0{,}01 - 0{,}02\,\mu$ genau, bei schwachen Linien kann der Fehler grösser werden.

gestellt wird (s. unten). Ferner erhält man für $m=5$, 4977,75 und 4973,50 (4976,1, 4973,0 K. H.; 4975,0 S., unscharf); $m=6$, 4666,00, 4662,30 (4665,2 K. und R., koinzidiert mit einer Linie der ersten Nebenserie; 4660 K. und H.; 4660,2 S.); $m=7$, 4496,4, 4492,9 (zu nahe bei der ersten Nebenserie, nicht mehr beobachtet). Für $m=3$ ergibt sich 8140; das Paar ist nicht beobachtet, ebensowenig wie die entsprechenden von Cu, Tl; dies ist zu erwarten, wenn $m=4$ die Fundamentalzahl für $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ ist.

Wie bei Li bilden wir ferner

$$(2, p_1, \pi_1) - (m, p_1, \pi_1), \quad (2, p_2, \pi_2) - (m, p_2, \pi_2)$$

und erhalten die schon von Lenard, Konen und Hagenbach bemerkte Serie unscharfer Linienpaare mit *nahezu* konstanten Differenzen: $m=3$, 7517,3, 7510,8 (wohl wegen geringer Intensität und ungünstiger Lage bisher nicht wahrgenommen); $m=4$, 5533,10, 5527,80 (5531,7 K. u. H.; 5532,7 S.; 5527,1 K. u. H.; 5528,2 S.); $m=5$, 4919,2, 4915,1 (4913,5 K. u. H.; 4918,4 S.; 4910,1 K. u. H.; 4914,0 S.); $m=6$, 4635,6, 4631,9 (4633,1 K. und H.; 4629,5 S.; 4629,4 K. u. H.; 4625,5 S.); $m=7$, 4477,9, 4474,4, (4470 Lenard; 4472,5 S., nicht getrennt wegen zu grosser Unschärfe); $m=8$, 4380,8, 4377,5 (4372 S.). Die Linien, besonders die letzten, sind so unscharf, dass die Abweichungen, wie schon aus dem Vergleich der Messungen verschiedener Beobachter hervorgeht, innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler liegen.

Auch die Kombinationen $(3, p_i, \pi_i) - (4, d, \delta)$, $i = 1, 2$ existieren, die aus der Formel der ersten Nebenserie *durch Erhöhung der Ordnungszahl des ersten Gliedes* entspringen: es findet sich $\lambda = 23378$, 23346 (Paschen 23377, vielleicht doppelt, Fehler bis 20 Å.-E. möglich). Das nächste Paar ($m=5$) wäre 1,475 μ, 1,476 μ; Moll hat eine schwache, daher wenig genau bestimmte Linie bei 1,44. Ob sie dem fraglichen Paar entspricht, bleibt zweifelhaft.

Ebenso kann man zur zweiten Nebenserie die Parallelserie $(3, p_i, \pi_i) - (m, s, \sigma)$, $i = 1, 2$ bilden, deren erstes Glied ($m = 1{,}5$) zur Hauptserie gehört, die weiteren ins Ultrarot fallen, wo sie enge Paare bilden (Abstand = 5,5 für fünfstellig geschriebene

Wellenzahlen) : es sind : $m = 2,5$, 22080, 22053 (Paschen 22081, 22056); $m = 3,5$, $3,421\,\mu$, $3,415\,\mu$ (Moll 3,42).

Endlich ergibt

$$(4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) - (5, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2), \quad \lambda = 4{,}0492\,\mu \text{ (M. 4,06).}$$

Diese Kombination entspricht sowohl bei Na wie bei K, Rb, Cs der längsten von Moll gemessenen Wellenlänge. Wie immer, *fehlen* die den niederen Ordnungszahlen 2, 3 entsprechenden Linien, wodurch $m = 4$ als Grundzahl von $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$, wie oben schon bemerkt, sich ergibt.

Ebenso wird durch die Beobachtungen von Moll die Existenz einer Linie $m = 2$ der ersten Nebenserie und damit die entsprechende Hauptserie ausgeschlossen. Es ist also $m = 3$ die Grundzahl für (m, d, δ) (die Numerierung meiner oben zitierten Dissertation stimmt für die erste Nebenserie der Alkalien mit der von Kayser und Runge überein).

Die Kombination $(1,5, s, \sigma) - (3, d, \delta)$ ergibt $\lambda = 3426{,}9$ und ist nicht beobachtet; dagegen scheint $(2,5, s, \sigma) - (3, d, \delta)$, $\lambda = 2{,}913\,\mu$ von Moll (2,90) beobachtet; die Genauigkeit ist zu gering, um eine Entscheidung zu erlauben.

Nicht aufgenommen werden durch diese Formeln Lenards Linien 5100, 4820, 4730, die weder Konen und Hagenbach, noch Saunders gefunden haben; ferner zwei schwache Paare 7369,4, 7377,41, 7410,0, 7418,3, deren Abstand etwas kleiner ist als der normale Abstand 17,2, und von deren Zugehörigkeit zu Na, wenigstens für das zweite, Saunders nicht sicher ist; Lehmann führt sie nicht. Endlich hat Moll noch eine sehr schwache Linie $1{,}57\,\mu$, die sich den Formeln nicht fügt. Die Zugehörigkeit dieser Linien zu Na, resp. ihr Zusammenhang mit den übrigen muss zweifelhaft bleiben.

Kalium.

Bei K haben sich für die im sichtbaren Teil verlaufenden neuen Serien von Li, Na bisher keine entsprechenden gefunden. Ramage hat zwar drei schwache, diffuse Linien 4829, 4767, 4638,6, die aber weder von Liveing und Dewar, noch von Saunders gesehen wurden. Dagegen findet sowohl letzterer, wie Ramage, eine schär-

fere Linie bei 4642,4 (4642,35 R., 4642,5 S.), die sich in der Form $(1,5, s, \sigma)-(3, d, \delta)$ darstellen lässt: eine Kombination, die ich sonst nur bei Rb und He noch finden konnte. Es muss zweifelhaft bleiben, ob es sich hier wirklich um diese Kombination handelt, denn zur Berechnung von $(3, d, \delta)$ ist die Kenntnis der Grundlinie der ersten Nebenserie notwendig; dieselbe ist nur von Bergmann gemessen; man findet $(3, d, \delta) = 13462 \pm 8$ aus der einen Linie des Paares, und 13467 ± 8 aus der andern; die beiden Zahlen sollten identisch sein. Dagegen ist $(1,5, s, \sigma) = 35005,0$ genau bekannt; es findet sich

$$\nu = 35005 - 13465 = 21540 \pm 8, \qquad \lambda = 4641,2 \pm 2,0,$$

während beobachtet ist 4642,4. Aehnliches gilt bei Rb, nicht aber bei Li, Na. Um hier Sicherheit zu gewinnen, müssten wesentlich genauere Messungen vorliegen, wie wir sie bei He finden werden.

Die Grenze der Bergmannschen Serie

$$\nu = (3, d, \delta) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$$

ist aus demselben Grund unsicher; diese Gleichung lautet, explizite geschrieben:

$$\nu = 13465 - \frac{N}{(m - 0,00284)^2} \pm 8$$

und ergibt $m = 4$, $\lambda = 15145 \pm 35$; $m = 5$, 11019; $m = 6$, 9598; $m = 7$, 8907; $m = 8$, 8508; während beobachtet ist 15168 [1], 11012 ± 10, 9590 ± 10, 8908 ± 10, 8500 ± 10.

Wie bei Na findet sich aus

$$(4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) - (5, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2), \quad \lambda = 4,045\,\mu \qquad (\text{Moll } 4,04).$$

Auch gibt

$$(3, p_i, \pi_i) - (4, d, \delta), \quad i = 1,2, \quad \lambda = 3,745 \text{ und } 3,720 \qquad (\text{Moll } 3,73),$$
$$(3, p_i, \pi_i) - (3, d, \delta), \quad i = 1,2, \quad \lambda = 3,160 \text{ und } 3,144 \qquad (\text{Moll } 3,14).$$

Moll hat noch 2,24, 2,76 [2], schwache Linien, deren Einordnung zweifelhaft bleibt.

---

[1] Nach vorläufigen Messungen von F. Paschen. Bergmann gibt 15282, eine Zahl, die er jedoch durch Extrapolation erhält und die um 114 zu gross ist.

[2] Dürfte der Doppellinie Na $2,20\,\mu$ entsprechen; die Rechnung ergibt 2,715 und 2,702; es ist bei schwachen Linien wie diese wohl ein grösserer Fehler in Molls Beobachtungen möglich.

Rubidium.

Bei Rb findet Bergmann für das Paar $n=3$ der ersten Nebenserie 15410, 14830, wobei jedoch, wie bei der K-Linie 15282, die Dispersionsformel des Apparats von $\lambda = 13600$ an extrapoliert ist. Korrigieren wir nach der obigen Messung der K-Linie von Paschen durch lineare Interpolation von 13600 aus, so ergibt sich 15265, 14727, wobei nun auch die Differenz der Schwingungszahlen 239 besser mit der konstanten Differenz 237,0 übereinstimmt, während sie nach B. 254 war. Dies ergibt $(3, d, \delta) = 14327$, und da $p_1 - p_2 = -0{,}01296$, $\pi_1 - \pi_2 = 0$, so gibt die Formel $(3, d, \delta) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ die Linien der Bergmannschen Serie :

$m = 4$, $\lambda = 13459$ (B. 13442); $m = 5$, λ 10082 (B. 10069); $m = 6$, 8874 (B. 8872); $m = 7$, 8276 (B. 8271).

Die Differenzen bleiben innerhalb B.s Beobachtungsfehler.

Ferner ist $(4, d, \delta) - (5, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) = 3573$, $\lambda = 2{,}799$ (Moll 2,80). Weitere Kombinationen dieser Art fallen ausserhalb des beobachteten Bereichs.

Die Kombination $(3, d, \delta) - (1{,}5, s, \sigma)$ ergibt $\lambda = 5164{,}7$, während Ramage eine nicht zu den Serien gehörende und weniger diffuse Linie bei 5165,35 hat, die vielleicht mit Lecoqs Linie 5162 ± ? identisch ist. Er führt ausserdem Linien bei 4967, 5037, 6306,8; Lehmann hat 8513,3; über die Beziehung dieser *einfachen* Linien zum System der Doppellinien habe ich keine Sicherheit erhalten können; ihre Zugehörigkeit zu Rb ist nicht ganz sicher, ebenso wie die der Linien 0,93, 1,11 von Moll, deren erste mit einer starken Cs-Linie, die zweite mit einer K-Linie koinzidiert.

Als längste Welle haben wir wieder

$$(4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) - (5, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2), \quad \lambda = 4{,}018 \qquad \text{(Moll 4,03).}$$

Endlich findet sich $(3, p_i, \pi_i) - (3, d, \delta)$, $\lambda = 2{,}255$, $2{,}295$ (Moll 2,28).

Cäsium.

Die Grundlinien der ersten Nebenserie müssen nach den Serienformeln bei 3μ liegen und kräftig sein; sie sind von Moll beobachtet: $\lambda = 3,00$, $\lambda = 3,51$; Differenz der Schwingungszahlen 480, während die normale Differenz 554 ist; dies erklärt sich aus dem Umstand, dass Moll die Hauptlinie, nicht aber den schwächeren Satelliten, welcher die konstante Differenz gibt, beobachtet hat. Die Abstände des Satelliten von der Hauptlinie sind nach Ramage und Saunders Beobachtungen ($n = 7$) 7,3, (6) 10,9, (5) 22,0, (4) 47,4, letzteres nach Lehmann, der die Hauptlinie bei 9171,9, den Satelliten bei 9211,9 gemessen hat; für $n = 3$ ergibt sich also aus Molls Beobachtung der Abstand $554 - 480 = 74$, der aber sehr unsicher und zu klein ist; denn die Zunahme von (5) zu (4) sollte bedeutend kleiner sein als die von (4) zu (3); der schwächere Satellit verschiebt das bolometrisch beobachtete Intensitätsmaximum nach seiner Seite hin, so dass 3,51 zu gross gemessen ist. Daraus ergibt sich $(3, d, \delta) = 16900 \pm 15$, $(3, d', \delta') < 16825$.

Die Bergmannsche Serie wird aus Doppellinien bestehen:

$$(3, d, \delta) = (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2),$$
$$(3, d', \delta') = (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2).$$

Wir setzen $(3, d, \delta) = 16906$, $(3, d', \delta') = 16809$, was durchaus innerhalb der Genauigkeitsgrenzen liegt, die bei obiger Festsetzung vorgeschrieben sind. Dann ergeben sich in Å.-E. die Fehler: $m = 4$, -35, $+30$, (Bergmann); $m = 5$, $+2,8$, $+2,5$ (Lehmann); $m = 6$, $-1,1$, $+1,0$; $m = 7$, $-1,6$, $-1,5$; $m = 8$, $-1,6$, $-1,5$; $m = 9$, $-2,3$, $-1,7$; $m = 10$, $+7,0$, $+1,6$.

Die Differenzen haben einen systematischen Gang, überschreiten jedoch nur wenig die möglichen Beobachtungsfehler, die bei Bergmann wohl auf 20 bis 30, bei Lehmann auf 4 bis 5, bei Saunders, welcher die übrigen Linien beobachtet hat, auf 1 Å.-E., und bei der letzten, sehr diffusen Linie auf viel mehr geschätzt werden können. Ob unsere Formel nur eine Annäherung darstellt, die, wie die übrigen Serienformeln, mit wachsendem Atomgewicht schlechter wird, muss dahingestellt bleiben.

Bei Cs haben wir die Möglichkeit, das Nichtvorhandensein der Linie $m = 3$ der Bergmannschen Serie zu konstatieren. Moll findet für die Linie 1,01 μ, die der Ordnungszahl 4 entspricht, die Intensität 90. Die Linie $m = 3$, für die man $\lambda = 2{,}29$ und 2,24 berechnet, sollte intensiver sein. Zwischen 1 μ und 4,5 μ hat Moll ausserhalb der schon bekannten Serienlinien nur 4 ganz schwache Linien (Int. 5 bis 10): 1,75, 2,08, 2,41, 3,97, wovon die zwei letzten anderen Kombinationen angehören. Die Linie $m = 3$ fehlt also sicher, $m = 4$ ist die Fundamentallinie, wie wir schon mehrfach geschlossen haben.

Wie bei Rb erhalten wir noch aus $(3, p_i, \pi_i) - (3, d, \delta)$ resp. $-(3, d', \delta')$ die Wellenlängen 1,3591, 1,3748 (Hauptlinien); 1,3930 (Satellit). Die erste fällt zusammen mit einer Linie der ersten Nebenserie (B. 1,3597), die zweite hat B. bei 1,377 beobachtet, der Satellit ist, wegen zu geringer Intensität, nicht beobachtet. Die Kombination $(3, p_i, \pi_i) - (4, d, \delta)$ resp. $(4, d', \delta')$ entspricht einer Linie von sehr grossem λ; aber $(3, p_1, \pi_1) - (5, d, \delta)$ ergibt $\lambda = 2{,}425$ (Moll 2,41, schwach); die zwei anderen, schwächeren Linien sind nicht beobachtet.

Es folgt aus $(4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) - (5, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ $\lambda = 3{,}960$ (Moll 3,97).

Es bleiben zwei sehr schwache Linien, 1,74, 2,08, und eine Linie von Ramage, 5209, die Konen und Hagenbach nicht finden konnten und daher als Verunreinigung betrachten.

$(1{,}5, s, \sigma) - (3, d, \delta)$ gibt $\lambda = 6900$ angenähert, welches vielleicht wegen ungünstiger Lage nicht beobachtet ist.

Kupfer.

Die Grenzen für die Nebenserie von Cu sind nicht sehr genau bestimmbar, weil nur wenig Glieder beobachtet sind; man berechnet 31523,3 und 31771,8, $p_2 - p_1 = 0{,}00740$, wobei $\pi_1 - \pi_2 = 0$ gesetzt ist, was angenähert erlaubt sein dürfte. Die Kombinationen $(2, p_i, \pi_i) - (4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ ergeben bis auf einige Hundertstel Å.-E. das schwache, nach Violett abschattierte Paar 4015,8, 4056,8, genau wie bei Na. Höhere Glieder der Serie sind nicht gefunden. Bei Tl ist auch ein solches Paar beobachtet; hier kann allerdings

$\pi_1 - \pi_2 = 0$ nur eine sehr rohe Annäherung sein, so dass man das Paar mit einem Fehler von 25 bis 30 Å.-E. erhält.

Die Hauptserie von Cu ist ihrem Verlauf nach nicht bekannt, und Beobachtungen im Infrarot liegen nicht vor. Es ist dies daher die einzige Kombination, die wir zu berücksichtigen haben, mit Ausnahme von $(1,5, s, \sigma) - (3, d, \delta)$, welche fehlt.

Helium.

Im Spektrum von He fanden Runge und Paschen (1) nur eine einzige Linie, die ausserhalb der Serien blieb, 3809,22, und die sie infolgedessen einer Verunreinigung durch ein unbekanntes Gas zuschrieben. Sie gehört aber zum System der Doppellinien von He, und entspricht der Kombination $(1,5, s, \sigma) - (3, d, \delta)$, die sich schreiben lässt

$$[(1,5, s, \sigma) - (2, p_i, \pi_i)] - [(2, p_i, \pi_i) - (3, d, \delta)],$$

ihre Wellenzahl ist also gleich der Summe der Wellenzahlen der Grundlinien der Hauptserie und der ersten Nebenserie, wobei in beiden Serien die stärkere, oder in beiden die schwächere Komponente zu nehmen ist. Herr Paschen hat mir das Ergebnis einer genauen Messung der infraroten He-Linien freundlichst mitgeteilt; die stärkere Komponente der Grundlinie der Hauptserie ist danach $\lambda = 10830,44 \pm 0,2$; die Grundlinie der ersten Nebenserie ist 5875,870; die Wellenzahlen im Vakuum 9230,73 und 17014,13 ergeben als Summe 26244,86, während beobachtet ist 26244,78; der Fehler, 0,015 Å.-E., bleibt innerhalb der Fehlergrenzen. Damit ist, wie ich glaube, die Existenz dieser Kombination bei He über jeden Zweifel erhoben. Die entsprechende Linie 5042,26 für das System einfacher Linien scheint dagegen nicht zu existieren.

Berechnet man auch hier die Linie $(3, d, \delta) - (4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ für das System der Doppellinien von He, so ergibt sich $\lambda = 18680$; dabei ist $p_1 - p_2 = -0,00003$ und kann ebensogut $= 0$ gesetzt werden. Bei den einfachen Linien, als sehr enge Paare aufgefasst,

(1) C. Runge und F. Paschen, *Astrophys. Journ.*, t. III, Jan. 1896, p. 15.

wäre ebenfalls $p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2$ gleich Null zu setzen: es wird $\lambda = 18687$. Bei $18687{,}5 \pm 0{,}5$ findet Herr Paschen eine Linie, von der sich bis jetzt nicht entscheiden liess, ob sie doppelt sei: dann müsste 18680 erheblich schwächer sein. Weitere Linien sind vorläufig bei He nicht gefunden.

Die Erdalkalien.

Bei den Erdalkalien treten bekanntlich neben den Tripletts starke Paare auf mit konstanten Differenzen ν', die ungefähr das Doppelte der grösseren Differenz ν_1 betragen. Wie Rydberg vermutete, und Runge und Paschen durch die magnetische Zerlegung der Linien bestätigt haben, gehören dieselben zu Serien, welche den Serien von Paaren der Alkalien durchaus entsprechen. Da nun das erste Glied der Hauptserie auch als erstes Glied der zweiten Nebenserie gelten muss, so kennt man von letzterer je zwei Glieder; in den ultravioletten Funkenspektren von Ca Sr, Ba findet sich das nächste Glied, so dass die Serie berechnet und die Grenzen, wenn auch nicht sehr genau, angegeben werden können. Eine Kontrolle dafür, dass das ultraviolette Paar (bei Sr, Ba existiert nur ein einziges) wirklich zur zweiten Nebenserie gehört, liegt in den so berechneten Konstanten der Formel, die sich untereinander und den Konstanten bekannter Serien anschliessen, während dies bei wesentlich veränderter Lage des dritten Paares nicht der Fall wäre. Eine direkte Bestätigung im magnetischen Feld oder durch Auffindung der folgenden Paare wäre allerdings erwünscht.

Die zur zweiten Nebenserie gehörenden Paare mit ihren Wellenzahlen im Vakuum sind durch die Tabelle gegeben (seite 160).

Man berechnet bei Ca, Sr, Ba für die Grenzen A und A′ und die Konstanten s, σ:

Ca	$A = 60423{,}1$,	$A' = 60646{,}0$,
	$s = -0{,}90533$,	$\sigma = +0{,}62397$;
Sr	$A = 55028{,}7$,	$A' = 55830{,}0$,
	$s = -0{,}85464$,	$\sigma = +0{,}66488$;
Ba	$A = 49925{,}8$,	$A' = 51616{,}3$,
	$s = -0{,}76651$,	$\sigma = +0{,}72693$.

	Ordnungszahlen.						
	1,5		2,5		3,5		
	λ	ν	λ	ν	λ	ν	
Mg.. ..	2795,63	35759,8	2936,61	34043,1	—	—	$\nu' = 91,5$
	2802,80	35668,3	2928,74	34134,6	—	—	
Ca.....	3933,83	25413,4	3737,08	26751,5	2208,95 (¹)	45256,6	$\nu' = 222,9$
	3968,83	25190,6	3706,18	26974,5	2198,03 (¹)	45481,5	
Sr. ...	4077,88	24515,7	4305,60	23219,2	2471,75 (²)	40445,2	$\nu' = 801,3$
	4215,66	23714,5	4161,95	24020,5	2423,75 (²)	41246,2	
Ba.....	4554,21	21951,7	4900,13	20402,0	2771,51 (³)	36071,0	$\nu' = 1690,5$
	4934,24	20261,1	4525,19	22092,4	2647,41 (³)	37761,8	
Ra.....	3814,58	26207,9	5813,85	17195,6	—	—	$\nu' = 4857,1$
	4682,36	21350,9	4533,33	22052,8	—	—	

Setzt man wieder in erster Annäherung $\pi_1 - \pi_2 = 0$, so ergibt sich daraus für $p_2 - p_1$: Ca 0,00247, Sr 0,01017, Ba 0,02448, während in den Triplettserien für $p_2 - p_1$ sich findet : Ca 0,00279, Sr 0,01184, Ba? Sie unterscheiden sich um etwa 15 Proz. von den ersteren, während die konstanten Differenzen etwa doppelt so gross sind. In der exakten Formel, und ohne die Vernachlässigung von $\pi_1 - \pi_2$, dürfte also wohl dieselbe Konstante für beide Differenzen massgebend sein.

Auch die zwei Satelliten von Ca, Sr bilden mit der Hauptserie Tripletts, für deren Abstand die Grössen $d - d'$, $d' - d''$ massgebend sind. Man findet, indem man $\delta - \delta' = 0$, $\delta' - \delta'' = 0$ setzt, aus dem ersten Glied $m = 3$ der ersten Nebenserie :

1. dass $d - d'$ bei den Serien von Doppellinien und bei den

(¹) Nach Eder und Valenta, *Beiträge zur Photochemie und Spektralanalyse : Das Funkenspektrum von* Ca. Wien, 1904. Dieses Paar ist schon von Rydberg bemerkt worden.

(²) Nach Exner und Haschek, *Wellenlängentabellen* (*Funkenspektren*). Leipzig, 1904.

(³) Nach Kayser und Runge; auch E. und H. führen die Linien im Funken spektrum.

Tripletts angenähert übereinstimmen. (Null bei Mg, 0,0007 bei Ca-Tripletts, 0,0006 bei den Dubletts, 0,00335 bei den Sr-Tripletts, 0,00339 bei den Dubletts.)

2. Bei Ca, Sr haben Fowler [1] und Saunders [2] Serien engerer Tripletts gefunden mit den konstanten Differenzen 21,2, 13,6 bei Ca; 100,3, 59,8 bei Sr. Berechnet man aus deren Grenzen die entsprechenden $p_1 - p_2$, so erhält man wieder 0,0007 bei Ca, 0,00362 bei Sr, Null bei Mg. Wieder wird man zum Schluss gedrängt, dass eine und dieselbe Konstante, also eine und dieselbe Ursache, diesen Differenzen zugrunde liegt. Die entsprechenden Differenzen der Schwingungszahlen variieren dagegen sehr stark: der Übergang zu den Konstanten unserer, wenn auch unvollkommenen Formel bringt also entschieden Gewinn.

Bei den Elementen der zweiten Mendelejeffschen Kolonne fehlt die Hauptserie, und zwar sollte das als Grundlinie der zweiten Nebenserie extrapolierte Triplett, welches zugleich Grundlinie der Hauptserie ist, nach meinen Rechnungen [3] bei Mg, Ca, Sr nicht sehr weit ins Ultraviolett fallen; es müsste grosse Intensität besitzen, und die Differenzen ν_1, ν_2 in umgekehrter Reihenfolge aufweisen. Bei keinem dieser Elemente existiert aber ein Triplett von solcher Beschaffenheit; man kommt also zum Schluss, dass bei den von mir nach der willkürlichen Festsetzung $(s) < 0,5$ gewählten Ordnungszahlen die *Grundzahl* für das Symbol (m, s, σ) bei diesen Elementen 2,5 ist. Da jedoch bei andern Elementen 1,5 die Grundzahl ist, dürfte es empfehlenswert sein, die Ordnungszahlen in der zweiten Nebenserie der Erdalkalien um eine Einheit zu erniedrigen. Man erzielt dadurch auch den Vorteil, dass $-\sigma/s$, welches bei den Alkalien nur zwischen 0,42 und 0,349 schwankte, auch bei den Erdalkalien angenähert konstant bleibt, nämlich:

Mg 0,340, Ca 0,421, Sr 0,455, Zn 0,326, Cd 0,362, Hg 0,368 und analog Tl 0,377.

Demnach wäre das Triplett 2,5 der zweiten Nebenserie, nach

---

(1) Fowler, *Astrophys. Journ.*, t. XXI, 1905, p. 81.

(2) Saunders, *ibid.*, p. 195.

(3) W. Ritz, *Inaug.-Dissert.*, *Auszug*, *Ann. d. Phys.*, t. XII, 1903, p. 302 ff. *Œuvres*, I, p. 67 ff.

der Numerierung meiner Inaug.-Dissertation, Grundlinie der Hauptserie bei diesen Elementen, und dieselbe würde weiter im Ultrarot und Rot verlaufen.

Göttingen, Juni 1908.

Autoreferat (1).

Während die bisher bekannten Gesetze der Serienspektren die Linien *einer* Serie untereinander verknüpfen (vom Gesetze der konstanten Differenzen der Wellenzahlen abgesehen), wird hier gezeigt, dass auch zwischen verschiedenen Serien eines Elements einfache Beziehungen bestehen : durch additive oder substraktive Kombination, sei es der Serienformeln selbst, sei es der in dieselben eingehenden Konstanten, werden neue Formeln gebildet, die die in den letzten Jahren von Lenard u. a. entdeckten neuen Linien der Alkalien vollständig aus den früher bekannten zu berechnen gestatten, und auch bei andern Elementen, insbesondere He, weitgehende Anwendungen zulassen. Die von Rydberg schon ausgesprochene Hypothese, dass die Serienformeln mit *zwei* willkürlichen ganzen Zahlen zu schreiben seien, wird aus Messungen von F. Paschen u. a. bestätigt : so besitzt Wasserstoff neben der bekannten Serie $\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right)$ noch die Serie $\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2}\right)$, usw. (wobei N ein numerischer Faktor ist). Endlich wird gezeigt, dass für die willkürliche ganze Zahl m zwar keine obere, wohl aber eine gewisse untere Grenze existiert, und dass die Konstanten der Formeln nahe Beziehungen zu den Atomgewichten zeigen. Es ergibt sich eine neue Ansicht über die Konstitution der sog. Spektren zweiter Art.

(1) Compte rendu par l'auteur lui-même, trouvé dans ses papiers et de destination inconnue.

X.

ON A

NEW LAW OF SERIES SPECTRA.

Astrophysical Journal, Vol. XXVIII, No. 3, October 1908, p. 237-243.

This communication is intended to show how we may derive from the known spectral series of an element, new series which represent accurately, without the inclusion of any new constant, nearly all of the series and lines recently discovered by Lenard, Konen, Hagenbach, Saunders, Moll, Ramage, and Bergmann. The new principle of combination also finds application to other spectra, particularly to helium and the earth alkalies. Closer relationships to the atomic weight than have been known hitherto are also furnished.

In its most convenient form, the series formula proposed by me reads [1]:

$$(1) \qquad \nu = A - \frac{N}{[m + \alpha + \beta(A - \nu)]^2},$$

where ν is the wave-number referred to vacuum, N is a universal constant, m the numeral, and A the limit of the series; α and β are constants. For small values of m, ν may become negative, which must be taken into account in the term $\beta(A - \nu)$. The constants α and β characterize the course of the series: they are identical for two series with constant differences.

[1] *Inaug.-Diss. Auszug*, *Ann. der Physik*, t. XII, 1903, p. 264; *Œuvres*, I, p. 1.

We also have approximately

$$(2) \qquad \nu = A - \frac{N}{\left(m + \alpha + \frac{\beta N}{m^2}\right)^2}.$$

We use for abbreviation

$$(3) \qquad m, \alpha, \beta = \frac{N}{[m + \alpha + \beta(A - \nu)]^2}.$$

Let the constants α and β have the values d and δ for the pairs of the first subordinate series for instance ("diffuse series" according to Rydberg's notation); for the second subordinate series (Rydberg's "sharp series") let the values be s, σ; for the principal series, let the values be p_1, π_1, and p_2, π_2; for the alkalies $\pi_1 = \pi_2$ very approximately [1].

If the first subordinate series has a satellite, a different set of values, d', δ', applies to the second principal line, where again $\delta = \delta'$, approximately.

The statement of three series may now be written (*loc. cit.*, p. 291) : Principal series :

$$\pm \nu = (1,5, s, \sigma) - (m, p_i, \pi_i) \qquad (i = 1, 2; m = 2, 3, 4, \ldots, p_1 > p_2).$$

Second subordinate series:

$$\pm \nu = (2, p_i, \pi_i) - (m, s, \sigma) \qquad (i = 1, 2; m = 1,5; 2,5; 3,5, \ldots).$$

First subordinate series:

$$\pm \nu = \begin{cases} (2, p_1, \pi_1) - (m, d, \delta) & (m = 3, 4, 5 \ldots) \text{ (first principal line and satellite).} \\ (2, p_2, \pi_2) - (m, d', \delta') & (m = 3, 4, 5 \ldots) \text{ (second principal line).} \end{cases}$$

The constant separation of the doublet is $\nu_1 = (2, p_1, \pi_1) - (2, p_2, \pi_2)$. On the basis of the observed data now available, the following points may be shown [2] :

1. In the equation of a principal series, if we replace 1,5 by the larger numbers 2,5; 3,5, ...; and in the equation of a subordinate series, if we replace 2 by the larger numbers 3, 4, 5, ...,

---

[1] *Loc. cit.*, p. 291; *Œuvres*, I, p. 52.

[2] The reader will find further particulars in a paper to appear presently in the *Physikalische Zeitschrift. Œuvres*, IX, p. 141.

new lines will result which have been observed in many cases. This was already suspected by Rydberg.

2. For every symbol (m, α, β) there exists a minimum number m (namely, 3 for the first subordinate series; 1.5 for the second subordinate series, according to the notation of my dissertation already cited), which is a fundamental number: if we assign still smaller values to m, we should expect a stronger line, but in practice this line has not been observed. I have already shown [1] that in no spectrum does an actual line correspond to the numeral $n = 2$ of the first subordinate series, in so far as the observations are adequate on this point.

3. If we form from these symbols the new combination $(1,5, s, \sigma) - (3, d, \delta)$ we obtain new lines which have been observed in case of He, K, Rb, but which are lacking in Na and Li thus far; for the earth alkalies they fall in the infra-red. The calculated value for He is $\nu = 26244,86$, the observed value is $26244,78$.

4. In case of Li and Na, there has been also observed the combination $(2, p_1, \pi_1) - (m, p_1, \pi_1)$; $(2, p_2, \pi_2) - (m, p_2, \pi_2)$; $m = 3, 4, \ldots.$

5. If we form $(3, d, \delta) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$; $m = 4, 5, \ldots.$ then we get the infra-red series found by Bergmann [2] for K, Rb, Cs, and the corresponding lines for Li, Na, He, which were unknown.

For Rb and Cs, the first subordinate series has a satellite, so that we have further a second series $(3, d', \delta') - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$, which runs along in the neighborhood of the first, and has a constant difference with respect to this, as was observed by Bergmann, and even earlier by Saunders in case of Cs, while for Rb the lines could not be separated. The fundamental number for this newly formed symbol $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ is $m = 4$.

6. The following combinations also exist:

$$(2, p_i, \pi_i) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) \qquad (i = 1, 2;\ m = 4, 5, \ldots).$$

The pair shading toward the violet of Na, the corresponding pair

---

(1) *Œuvres*, VII, p. 98, et VIII, p. 137.

(2) *Inaug.-Diss.*, Jena, 1907; also C. Runge, *Physik. Zeitschr.*, t. IX, 1908, p. 1.

of Cu, and the series of lines which have been found in Li and Na, by Lenard, Konen and Hagenbach, belong here.

$$(4, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2) - (m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2).$$

7. Extended investigations, such as exist for the alkalies, are lacking for the earth-alkalies in the infra-red region; and the principal series have not been observed, showing that the test of the principle of combination, in the sense hitherto used, cannot be made at present. The following circumstances, however, indicate that it is also valid here: in the first subordinate series of the series of triplets, with two satellites, we have to introduce the new symbols (m, p_3, π_3), (m, d'', δ'') with $p_1 > p_2 > p_3$. In the first approximation we may neglect $\pi_1 - \pi_2$, $\pi_2 - \pi_3$, and compute $p_1 - p_2$, $p_2 - p_3$, from the limits of the subordinate series, in spite of the fact that the principal series have not been observed; $p_1 - p_2$ will be about twice as large as $p_2 - p_3$, and the two differences of the vibration number (designated by Rydberg as ν_1 and ν_2) are

$$\nu_1 = (2, p_2, \pi_2) - (2, p_1, \pi_1), \qquad \nu_2 = (2, p_3, \pi_3) - (2, p_2, \pi_2).$$

There frequently occur double lines, with the distance ν_1, and triplets with the distance ν_1, ν_2, outside of the series. This is to be expected on the principle of combination only, and only when $(2, p_i, \pi_i)$ are associated with any quantity (m, α, β). These doublets and triplets must therefore belong to series which end at the same point $(2, p_i, \pi_i)$ as the subordinate series already known, but of which only a few terms of sufficient intensity are to be perceived.

It was further possible to find the equation of the second subordinate series for the strong ultra-violet pairs for Ca, Sr, Ba, for which the difference of the vibration-numbers ν' is to be twice as large as ν_1, and from the elements of these double lines to form the corresponding differences of the constants p, on the assumption that $\pi_1 - \pi_2 = 0$. The distance differs from that of the series of triplets by only about 15 per cent.; in the same exact computation, the two quantities would probably become equal to each other, which would correspond to the principle of combination.

Finally, subordinate series of close triplets have recently been found for Ca and Sr, by Fowler and by Saunders, from the limits

of which again the differences $p'_1 - p'_2$, $p'_2 - p'_3$, can be formed. Within the limits of accuracy of these, it appears that they are the same as those computed from the satellites and principal lines of the first subordinate series $d - d'$, $d' - d''$, so that a new combination exists here.

It further appears of advantage, in respect to the relations with the atomic weight, to introduce the constants of the formula in place of the wave-numbers, in spite of the fact that this can only be regarded as an approximation. It is well known, for instance, that the quotient of ν_1 and the square of the atomic weight μ does not vary much within a group of chemically related elements; but on the contrary it varies greatly from group to group, from 31,6 for Cs, to 187,0 for Tl. We introduce $\frac{p_2 - p_1}{\mu^2}$ in place of $\frac{\nu_1}{\mu^2}$ and the variation becomes much less.

The discrepancies which still remain are probably due in part to the incompleteness of the series formulae, but particularly to the neglect of $\pi_1 - \pi_2$, which certainly is not admissible in the case of Al, In, and Tl. A knowledge of the principal series of these elements would enable us to decide about this.

ELEMENT [1].	Na.	K.	Rb.	Cs.	Cu.	Ag.	Mg.	Ca.	Sr.	Zn.	Cd.	Hg.	Al.	In.	Tl.	He.
$\frac{\nu_1 10^3}{\mu^2}$	32,3	37,8	32,3	31.6	61.8	79.0	68.8	66,1	51,5	91,0	93,2	115.4	152.8	172,1	187,0	63,8
$\frac{p_2 - p_1}{\mu^2}$ 10...	14,2	18,9	18.0	18.6	18.6	24.2	14.6	17.7	15,7	17,2	18,6	22,3	24,8	29,2	32,7	20.4

(1) According to the summary by Rydberg, *Rapports du Congrès de Physique*, t. II, Paris, 1900.

It is known that with increasing atomic weight the series fall off with increasing rapidity, so that only those lines are observed which correspond to the lowest numbers of the order. At the same time the number of the different series increases (even Mg shows series of double lines and of simple lines in addition to the series of triplets) and the number of combinations increases. Thus we finally reach a spectrum in which we may perceive a large number of characteristic constant differences, but no series. It seems to

me very probable that the so-called spectra of the second class which exhibit this behavior are spectra with very many combinations and with very slightly developed series.

The computation of a quantity (m, α, β) assumes a knowledge of the elements of a series in the formula of which it enters. This elements may be determined with great accuracy, except when only a few diffuse lines are observed; it is also somewhat independent of the outstanding uncertainty as to the exact form of the equation of the series. In the cases cited under (1), (3), (4), we have indeed to compute exclusively differences and sums of observed wave-numbers; the accuracy is naturally still greater here. But on the other hand the constants entering into the symbol $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ may be varied by 20 per cent. without making the difference between computation and observation much worse. On account of their smallness the influence of the constants $p_1 - p_2$, $\pi_1 - \pi_2$, is relatively slight compared to that of m, and the series run along nearly parallel with Balmer's series, particularly for Li, Na, and He; for greater atomic weight the observations are hitherto too inaccurate to give us any certainty on this point.

In a paper which recently appeared [1] I have shown that we may cite systems of the simplest sort of which the energy is purely electro-magnetic and which observe Balmer's formula, the laws of series and the analogous Zeeman effect, etc. The vibration

$$\nu = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right)$$

is produced by the magnetic field of $m - 2$ elementary magnets turned toward each other, which are identical among themselves: in addition to this magnetic series the electron is subject to only rigid combinations. Similar facts hold good for other spectra. Higher numbers of the order thus correspond in a certain degree with higher magnetic polymerizations, which constantly become less stable, so that the lines become broader with an increasing number of the order, and also become constantly weaker. Violent motions, such as occur in a electric spark, are also unfavorable to stability,

---

(1) *Magnetische Atomfelder und Serienspektren* (*Œuvres*, VII, p. 98).

whence the series in the spark cease at lower numbers of the order than in the arc.

The magnetic field in an atom may be regarded in all spectra as produced by two poles of opposite sign, which separately may occupy different positions in the atom. In case of hydrogen, these points lie at equal distances on a straight line. It would appear that we may more generally state the principle that the simple lines refer to or depend upon the positions of these poles in the atom. In $(m, \alpha, \beta) - (n, \alpha', \beta')$ each of the terms represents the influence of one pole; and, as we have shown before, the possible positions of the separate poles permit the most varied combinations of the poles in pairs.

As to a certain minimum prescribed in the number of the order m—which occurs in the case of no known processes of vibration—this mode of representation only affirms that the magnet poles are held by the structure of the atom at a certain minimum distance from the electron vibrating within an atom, an idea which is quite plausible.

Göttingen, June 1908.

XI.

LES SPECTRES DE LIGNES

ET

LA CONSTITUTION DES ATOMES.

Revue générale des Sciences, 20e année, 1909, p. 171-175.

I. — Généralités. Nouvelles lois empiriques.

La nature des atomes et des forces moléculaires nous est, on le sait, bien peu connue, malgré les efforts toujours renouvelés des chercheurs ; la grande difficulté du problème vient, en effet, de ce que ce ne sont pas, en règle générale, les propriétés des atomes, mais des moyennes compliquées, dépendant de l'agitation moléculaire et des conditions extérieures, qui font l'objet de nos perceptions. Pourtant il est, à cette règle, une exception importante : les spectres des corps simples nous renseignent d'une façon immédiate sur les modes de vibration des atomes, car la position des raies dans le spectre est à peu près complètement indépendante soit de la température, soit des conditions extérieures, et même des actions des molécules les unes sur les autres. Évidemment, s'il était possible de conclure des vibrations des charges électriques de l'atome aux forces qui les produisent et à la disposition ou au mouvement des charges elles-mêmes, le problème serait résolu ; la précision extrême des mesures spectrales nous fournit donc, sur ce sujet, des documents nombreux et précieux, écrits malheureusement en des hiéroglyphes que nous ne savons pas déchiffrer. Pourtant, quelques

résultats ont été obtenus dans cette voie, grâce à la remarquable simplicité de quelques-unes des lois empiriques reliant entre elles les longueurs d'onde d'un spectre. On va voir que le problème comporte, en effet, pour l'hydrogène du moins, une solution très simple, qui s'accorde parfaitement avec les vues générales sur la constitution des atomes auxquelles ont mené les dernières découvertes.

Rappelons la formule remarquable, découverte par Balmer, qui relie entre elles les longueurs d'onde λ des raies du spectre de l'hydrogène. Elle peut s'écrire, en désignant par N une certaine constante :

$$\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

En donnant successivement à m les valeurs 3, 4, 5, ..., 32, on obtient exactement les longueurs d'onde de toutes les raies de l'hydrogène. L'erreur, si elle existe, semble être inférieure au cent-millième.

Pickering a découvert, dans certaines étoiles où l'hydrogène prédomine, une seconde série de lignes, que nous ne savons pas encore produire au laboratoire, et qui sont données par la formule :

$$\frac{1}{\lambda} = N\left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}\right] \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

où N désigne la même constante que plus haut.

On est porté, avec Balmer et Rydberg, à penser qu'en réalité ces formules devraient s'écrire chacune avec *deux* nombres entiers arbitraires m et n, en sorte que le spectre de l'hydrogène serait donné par les formules :

$$(1) \qquad \frac{1}{N}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{N}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2},$$

les valeurs $n = 3, 4, \ldots$, correspondant à des lignes infrarouges. Cette hypothèse a reçu tout récemment une confirmation éclatante. Sur mes indications, M. Paschen a effectivement trouvé deux lignes

infrarouges de l'hydrogène, qu'il a pu mesurer avec une grande précision [1]; il a obtenu :

$$\lambda = 18751,3 \pm 1 \text{ U.Å.} \qquad \text{et} \qquad \lambda = 12817,6 \pm 1,5 \text{ U.Å.}$$

Or, les formules :

$$\frac{1}{N}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}, \qquad \frac{1}{N}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}$$

donnent

$$\lambda = 18751,6 \qquad \text{et} \qquad \lambda = 12818,7;$$

l'accord ne laisse rien à désirer.

Il semble que la recherche de systèmes mécaniques ou électromagnétiques dont les vibrations soient représentées par des formules d'une telle simplicité ne soit pas une entreprise déraisonnable. D'ailleurs, des lois analogues ont été découvertes dans d'autres spectres, comme on sait, par Rydberg, Kayser et Runge. Ici encore, la démonstration est faite [2] que les formules contiennent deux entiers arbitraires. En première approximation, on peut les écrire, avec Rydberg :

$$\frac{1}{N\lambda} = \frac{1}{(n+a)^2} - \frac{1}{(m+a')^2},$$

et, plus exactement, comme l'a montré l'auteur de cet article :

$$(3) \qquad \frac{1}{N\lambda} = \frac{1}{\left(n+a+\frac{b}{n^2}\right)^2} - \frac{1}{\left(m+a'+\frac{b'}{m^2}\right)^2}.$$

N a la même valeur que pour l'hydrogène, tandis que les constantes a, b, a', b', varient d'un élément à l'autre. En les choisissant convenablement, et posant $m = 1\frac{1}{2}$, $n = 2, 3, \ldots$, la formule (3) donne la « *série principale* » de Kayser et Runge; pour $n = 2$, $m = 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, \ldots$, elle donne la *deuxième série secondaire;* aux systèmes de valeurs $n = 3$, $m = 2\frac{1}{2}, \ldots$, etc., correspondent également des raies observées. Remplaçant a', b', par certaines nouvelles constantes a'', b'', on aura pour $n = 2$, $m = 3, 4, 5, \ldots$, la

(1) F. PASCHEN, *Ann. der Physik,* t. XXVII, 1908, p. 537.

(2) Pour plus de détails sur ce qui suit, *consulter* mes différents Mémoires (*Œuvres*, VI, p. 95; VII, p. 98; IX, p. 141, et X, p. 163).

première série secondaire, qui a même limite, pour $m = \infty$, que la deuxième. Ici encore, les lignes infrarouges $n = 3$, $m = 3, 4$, etc., ont pu être observées. Mais, résultat qui précise nettement la signification de ces formules, si, au lieu de combiner, comme nous venons de le faire, un premier terme en a, b avec un deuxième en a', b' ou en a'', b'', nous combinons ceux-ci entre eux, de manière à former l'expression :

$$\frac{1}{N\lambda} = \frac{1}{\left(n + a' + \frac{b'}{n^2}\right)^2} - \frac{1}{\left(m + a'' + \frac{b''}{m^2}\right)^2}, \tag{4}$$

nous *obtenons encore des lignes observées*, au moins dans certains spectres. Enfin, pour Li, Na, on peut, dans un sens analogue, combiner la série principale avec elle-même :

$$\frac{1}{N\lambda} = \frac{1}{\left(m + a + \frac{b}{m^2}\right)^2} - \frac{1}{\left(n + a + \frac{b}{n^2}\right)^2}. \tag{5}$$

Ces lois énoncent que, par l'addition ou la soustraction des fréquences de deux lignes ou séries observées, on obtient la fréquence d'une nouvelle ligne ou série de lignes. Les erreurs sont de l'ordre des incertitudes expérimentales ; pour l'hélium, on calcule pour la ligne la plus intense du système (4) : $\frac{1}{\lambda} = 26244,86$; l'expérience a donné $26244,78$.

Je n'insiste pas davantage ; on voit que :

1° Les lois simples se rapportent toujours à $\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire à la fréquence ;

2° Qu'en faisant augmenter indéfiniment l'un ou l'autre des nombres entiers, les fréquences obtenues ont une limite ;

3° Que chacun des deux termes de la formule a, en quelque sorte, une existence séparée, et qu'on obtient les raies d'un spectre en combinant de diverses manières entre eux de tels termes.

II. — Hypothèse des champs atomiques.

Ces résultats généraux font nettement ressortir la grande différence qui existe entre tous les modes de vibrations élastiques, électriques et autres que nous connaissons, et les vibrations spec-

trales. En premier lieu, — et lord Rayleigh a beaucoup insisté sur ce point, — les lois simples des phénomènes vibratoires se rapportent, à peu d'exceptions près, aux *carrés* des fréquences, et non aux fréquences elles-mêmes. Cela tient à ce que, à côté des coordonnées qui définissent l'état des systèmes, les équations du mouvement en contiennent les dérivées secondes ou accélérations. Or, lorsqu'il s'agit de vibrations, le temps n'entre que sous la forme $\sin\nu(t-t_0)$, expression dont la dérivée seconde contient le facteur ν^2; pour déterminer la fréquence ν, on a donc finalement, puisque $\sin\nu(t-t_0)$ disparaît du résultat, une équation en ν^2, et ce n'est que dans des cas très particuliers qu'on pourra extraire algébriquement la racine carrée. Il en serait autrement, a remarqué lord Rayleigh, si les équations étaient du premier ordre. Malheureusement, l'introduction des accélérations s'impose à tous les points de vue d'une manière absolue, et il semble que, dès l'abord, nous nous trouvions dans une impasse.

Pourtant, une hypothèse simple va nous tirer d'embarras. Si les forces qui produisent les vibrations, au lieu d'être déterminées par la position ou la déformation du système, comme c'est généralement le cas pour les systèmes élastiques et autres, dépendent des vitesses, les équations du mouvement ne contiendront, à côté de celles-ci, que leurs dérivées premières, les accélérations; elles seront du premier ordre par rapport aux vitesses.

Or, la *force magnétique* satisfait précisément à cette condition, et, de plus, nous ne saurions douter de l'existence de champs magnétiques puissants à l'intérieur des atomes. D'après la théorie du ferromagnétisme de P. Weiss [1], ces champs sont au moins de l'ordre de 10^7 gauss, ordre de grandeur du champ moléculaire, et l'on sait que l'explication quantitative des anomalies des chaleurs spécifiques du fer, du nickel et du cobalt est venue confirmer cette théorie d'une façon remarquable. D'autre part, M. Humphreys, pour expliquer les lois du déplacement des raies sous l'influence de la pression, phénomène découvert par lui il y a quelques années, a été amené à les attribuer à l'action réciproque de champs moléculaires de l'ordre de grandeur de 10^8 gauss.

Avec un tel champ, on montre sans difficulté qu'il est possible,

---

[1] Voir La *Revue générale des Sciences* du 15 février 1908.

d'une infinité de manières, d'obtenir des vibrations de corpuscules de fréquence proportionnelle à ce champ et d'un ordre de grandeur correspondant aux vibrations lumineuses. Il suffit, par exemple, d'assujettir le corpuscule à rester sur un élément de surface ou dans un plan donné : ce corpuscule, mis en mouvement, exécutera un mouvement circulaire de fréquence ν proportionnelle à la composante H_n du champ H normale au plan. Si au champ H_n vient s'en ajouter un nouveau H'_n, qui produirait à lui seul une vibration de fréquence ν', la superposition des deux champs donnera la fréquence $\nu + \nu'$. On obtient donc bien la forme linéaire exigée par la loi des différences constantes et par les lois énoncées ci-dessus.

III. — Les spectres de l'hydrogène. Les séries.

Admettons donc que les forces qui produisent les vibrations des spectres de lignes, ou, plus exactement, des spectres en séries, soient purement magnétiques. Cette hypothèse va nous permettre d'expliquer l'existence d'une limite des fréquences, et surtout de donner une interprétation simple des formules (1) et (2) de l'hydrogène ; de plus, elle nous fera comprendre l'origine des effets Zeeman anormaux et compliqués. Sa probabilité s'en trouvera accrue d'autant plus que, malgré les efforts de nombreux chercheurs, aucune solution admissible ni de l'un ni de l'autre de ces problèmes n'avait pu être trouvée jusqu'ici.

Admettons (ce sera l'hypothèse la plus simple) que le champ soit produit par un aimant, et supposons, par raison de symétrie, le corpuscule placé sur le prolongement de la ligne des pôles à une distance r_1 du premier, r_2 du second, et exécutant de petites vibrations dans un plan perpendiculaire à cette ligne. Soit μ la charge magnétique d'un des pôles; la fréquence sera proportionnelle au champ, pris au point où se trouve le corpuscule, c'est-à-dire à

$$\mu\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right);$$

soit A un facteur qui ne dépend que de la charge et de la masse du corpuscule; on aura :

$$\text{fréquence} = \nu = A\,\mu\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right).$$

On reconnaît déjà la forme si curieuse des formules (1) à (4).

Pour obtenir exactement les formules de l'hydrogène, il suffira dès lors de supposer l'aimant composé d'un nombre arbitraire m' d'aimants identiques entre eux, de longueur a chacun, posés bout à bout. De plus, l'aimant sera rattaché de façon rigide à l'élément de surface dans lequel le corpuscule est assujetti à vibrer, au moyen d'un certain nombre de particules de mêmes dimensions que les aimants, également posées bout à bout, mais non magnétiques. Les distances r_1, r_2, seront alors des multiples de a, soit $r_1 = na$, $r_2 = ma$, et les fréquences seront :

$$\nu = \frac{A\mu}{a^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Il suffit de choisir convenablement les constantes A, μ, a^2, pour obtenir la formule (1) de l'hydrogène.

En somme, il faut admettre que, dans les conditions où il émet la série de Balmer, l'hydrogène est susceptible d'états divers, constituant en un certain sens des polymérisations, et résultant de ce qu'un nombre plus ou moins grand d'éléments magnétiques et non magnétiques, dont il n'est pas nécessaire de préciser la nature, peuvent s'agglomérer entre eux en forme de chapelet rectiligne et s'attacher à l'atome d'hydrogène. Ou, si l'on veut une image concrète : prenons une barre aimantée et deux barres de cuivre de même longueur; plaçons-les bout à bout. A l'extrémité cuivre du système, plaçons une charge électrique convenable, et donnons-lui une légère impulsion; elle vibrera en donnant la raie Hα. Ajoutons au bout de la première une seconde barre aimantée identique : nous obtiendrons Hβ; une troisième donnera Hγ, etc.

Cette explication est-elle invraisemblable au point de vue des idées modernes sur la constitution de la matière? On ne saurait le prétendre. Il est, en effet, facile, de bien des manières, de distribuer l'électricité dans un corps de révolution en rotation autour de son axe, de manière à le rendre équivalent à un aimant élémentaire. Des mouvements rotatoires ou circulatoires des charges électriques à l'intérieur des atomes sont, d'ailleurs, indispensables pour expliquer le magnétisme; les premiers sont les plus stables. D'autre part, les systèmes qui émettent les spectres de lignes — et c'est encore lord Rayleigh qui a particulièrement insisté sur ce point —

doivent être extraordinairement stables, sinon les lignes deviendraient diffuses. Si donc on admet que l'atome chimique est un assemblage de divers éléments, l'hypothèse de connexions rigides entre ces éléments sera particulièrement probable. Enfin, parmi les diverses manières d'assembler un nombre variable d'éléments, une des plus simples et sans contredit de les poser bout à bout.

Il est bien évident que toute hypothèse particulière sur la structure des atomes, capable d'expliquer le grand nombre de lignes des spectres, paraîtra plus ou moins improbable à première vue. On s'en rend compte pour peu qu'on y réfléchisse. L'hydrogène lui-même, qu'on sera tenté de considérer comme le plus simple des éléments, possède plusieurs spectres et émet des centaines de lignes de caractères très différents. On devra bien admettre que cette simplicité est très relative, et s'estimer heureux d'y découvrir au moins des rapports géométriques simples et des forces connues, agissant suivant des lois simples, comme c'est le cas dans l'hypothèse qui nous occupe.

D'ailleurs, on peut modifier notre système de diverses manières, éviter l'introduction des éléments non magnétiques, etc. *Le point essentiel est que les vibrations soient produites par un champ magnétique provenant de deux pôles susceptibles de prendre chacun, dans l'atome, un certain nombre de positions différentes, équidistantes sur des lignes droites.*

En généralisant ces hypothèses, on arrive à d'autres formules telles que (2), (3); il existera toujours une limite des vibrations. L'observation a donné ce résultat remarquable que le facteur N est le même pour tous les corps. Cela exige, dans notre théorie, que non seulement le corpuscule vibrant, mais aussi les « aimants élémentaires », soient identiques pour tous les corps. On voit ainsi apparaître, à côté des corpuscules, un deuxième élément constituant universel de la matière.

IV. — Les effets Zeeman anormaux.

On sait que ce sont précisément les lignes appartenant aux séries qui se décomposent, dans un champ magnétique, de la façon en général la plus compliquée. On a compté quinze et même dix-neuf composantes, et les distances de ces composantes sont très souvent

entre elles comme des nombres entiers. M. Lorentz a tenté d'expliquer ces décompositions en remplaçant l'électron simple de la théorie élémentaire par des systèmes à n degrés de liberté; et il faut autant de systèmes qu'il existe de lignes spectrales. C'est donc là une hypothèse très compliquée; encore les décompositions observées n'ont-elles pu être interprétées, je ne dis pas physiquement, mais mathématiquement, que dans un très petit nombre de cas, et la loi des rapports rationnels reste inintelligible. Il en est autrement dans notre hypothèse. Un système magnétique exécutera dans la plupart des cas, sous l'influence combinée du champ extérieur er du champ intérieur, beaucoup plus intense, des mouvements oscillatoires périodiques, développables en série de Fourier. Il en résulte, pour l'électron vibrant, des mouvements plus compliqués, et le calcul montre que, ω étant la période du mouvement de l'atome, la vibration sera décomposable en une somme de termes sinusoïdaux, correspondant à des lignes de fréquence $\nu_0 \pm m\omega$, ν_0 étant la fréquence primitive, et m un entier. On voit que les distances des composantes sont bien dans un rapport rationnel; leurs polarisations sont celles qu'exige l'expérience. Un électron nous donnera, en général, à lui seul, un nombre infini de composantes, dont quelques-unes seulement sont assez intenses pour être perçues; leur nombre dépend de la rapidité de la convergence de la série. *Le phénomène de Zeeman joue donc, dans cette manière de voir, pour les mouvements rotatoires de l'atome, le rôle d'un analyseur harmonique.*

V. — Autres modes d'explication. Conclusions.

Peut-on conclure de là que les vibrations des spectres en séries sont bien dues à des champs magnétiques intenses? Il est dans la nature des choses qu'une telle conclusion ne s'impose pas immédiatement. Les vibrations d'un système ne suffisent pas à nous renseigner sur sa constitution. Pour s'imposer, la théorie devra embrasser de façon simple l'ensemble des observations et les rattacher à d'autres domaines; les autres modes d'explication devront apparaître comme infiniment moins économiques pour notre pensée. Pour cela, il importe de les cultiver tous; aussi voudrais-je, en terminant cet exposé, parler de l'un de ces modes, le seul qui,

à l'heure qu'il est, mérite sérieusement d'être pris en considération.

On sait que les vibrations des corps élastiques, comme celles des séries spectrales, sont en nombre infini, et que leurs fréquences dépendent de certains nombres entiers qui sont les nombres de lignes nodales (figures de Chladni) ou de surfaces nodales caractérisant chaque vibration. Pour une membrane rectangulaire, on a

$$v^2 = am^2 + bn^2,$$

a et b étant des constantes, m et n des entiers. Mais, à l'opposé des séries spectrales, lorsque m, n augmentent indéfiniment, il en est de même de v. Cela résulte, en dernière analyse, de ce que les forces produisant les vibrations élastiques s'annulent à petite distance. On pouvait se demander si d'autres forces, agissant suivant la loi de Newton ou d'autres lois, ne donneraient pas des formules du type (1), (2) et (3). Cette hypothèse a été envisagée par l'auteur de cet article, et, à sa suite, par MM. Fredholm et Hadamard. Elle trouve son expression mathématique, non dans des équations aux dérivées, mais dans des équations intégrales, et il résulte de ces recherches que la loi du carré des distances, et une infinité d'autres, conduisent bien à une limite des vibrations. Malheureusement, l'analogie semble s'arrêter là. Car, pour obtenir effectivement les formules de l'hydrogène (1) et (2), il faut admettre des lois d'une complication invraisemblable. Les équations intégrales simples de M. Fredholm n'y sauraient conduire. Il ne suffit d'ailleurs pas qu'à une série spectrale on puisse faire correspondre *une* loi d'attraction; il faut que celle-ci ne soit pas trop invraisemblable, et ne dépasse pas de beaucoup en complication la formule qu'il s'agissait d'expliquer. Le fait que les équations, dans cette hypothèse, contiennent le carré des fréquences, n'est pas de nature à simplifier le problème, et montre plutôt la grande portée de la remarque de lord Rayleigh dont il a été question plus haut. Pour avoir des exceptions, il faut des constructions compliquées. Enfin si, abandonnant tout préjugé physique, on cherche simplement à satisfaire aux conditions mathématiques du problème, on est conduit à des systèmes dont la vibration fondamentale seule rayonne de façon sensible; le rayonnement des harmoniques supérieurs est sensiblement nul par l'effet des lignes nodales; ils ne seraient pas perceptibles.

Pourtant, toutes ces hypothèses méritent d'être étudiées avec soin, car, si elles ne s'appliquent pas aux lignes sériées, elles peuvent s'appliquer aux autres lignes, sur l'arrangement desquelles nous ne savons rien, ou aux spectres de bandes, dont les lois fondamentales, données, on le sait, par M. Deslandres, présentent avec les lois des systèmes vibratoires connus plusieurs analogies importantes.

En somme, *l'explication de beaucoup la plus simple des séries spectrales de l'hydrogène et d'autres corps consiste à attribuer ces vibrations à l'influence de champs magnétiques intenses, provenant de pôles magnétiques distribués dans l'atome suivant des lois géométriques simples. L'énergie de ces systèmes, il est important de le remarquer, est purement électromagnétique.*

XII.

ÜBER EINIGE ANOMALE ZEEMAN-EFFEKTE

IM

SPEKTRUM VON THORIUM.

(BEMERKUNGEN ZU DER ARBEIT DES HERRN B. E. MOORE.)

Physikalische Zeitschrift, 10. Jahrgang, No. 9, Seite 307-308.

Die von Hrn. Moore [1] bei Thorium beobachteten komplizierten Zerlegungen zeichnen sich durch einige bisher nicht bekannte Eigentümlichkeiten aus, die ich im folgenden hervorheben möchte.

Wie Verf. gezeigt hat [2], entsprechen die bisher bekannten Zerlegungen, in der Skala der Schwingungszahlen ν gemessen, den Formeln

$$\nu = \nu_0 \pm m\omega \tag{1}$$

für die Schwingungen parallel zum Feld (p),

$$\nu = \nu_0 \pm \omega' \pm n\omega \tag{2}$$

für die Schwingungen senkrecht zum Feld (s).

Es sind ω, ω' zwei geeignete Konstanten, m, n ganze Zahlen, für die meist nur die Werte 0, 1, 2 in Betracht kommen. Mit

---

[1] *Physik. Zeitschr.*, t. X, 1909, p, 297.

[2] *Œuvres*, t. VII, p. 98.

andern Worten, die beiden (s)-Gruppen entstehen aus der (p)-Gruppe durch eine geeignete Verschiebung derselben nach rechts und nach links. Wieviel Linien dieses (unendlichen) Schemas wirklich beobachtbar sind, und ob Lücken vorhanden, bleibt theoretisch unbestimmt.

Im einfachsten Falle bestehen die Gruppe der (p) und die zwei Gruppen der (s) je aus äquidistanten Linien, und der Abstand ist ω für alle drei Gruppen. Auch bei Thorium ist dem so in der Mehrzahl der Fälle, insbesondere bei den Linien 4448,00; 4094,99; 4086,71; 4019,30; 3704,16; 3549,83 [1]. Bei 3929,74 dagegen ist der Abstand der (s) (beob.: 0,28) genau halb so gross wie der der p-Komp. (beob.: 0,57; 0,55; 0,55); es ist jede zweite Linie des Schemas (1) zu schwach, um wahrgenommen zu werden, falls sie existiert. Oder auch: es kommen in (1) nur gerade m, in (2) aber gerade und ungerade n vor.

Bei 4277,49 hat n die Werte 0, 2, m den Wert 3; längere Exposition würde wahrscheinlich die dem Wert $m = 1$ entsprechenden p-Komponenten $\frac{\delta\lambda}{\lambda^2} = \pm 0,26$ hervorbringen. Die Abstände sind wie 1 zu 3. Bei 3792,52 ist $m = 0, 3$, $n = 1$ zu setzen; die Abstände verhalten sich wie 2 zu 3.

Endlich bei 4142,87 verhalten sich die Abstände wie 3 zu 4, und zwar genau, wie die Koinzidenz der p und s bei 1,34 zeigt (beob.: 1,34, 1,32, 1,35, 1,35); es ist $m = 2, 6, 10$; $n = 0, 3$. Im Gegensatz zu den meisten andern Zerlegungen sind hier für die Darstellung nach der Rungeschen Regel und nach obigen Formeln dieselben ganzen Zahlen erforderlich, so dass diese Linie zwischen den beiden Gesetzen keine Entscheidung bringt. Dem ist stets so, wenn, wie eben bei 4142,87, eine der s-Komponenten die frühere Lage der Linie einnimmt: dann fordern die Formeln (1), (2) ein rationales Verhältnis aller Abstände, womit der eine Teil der Rungeschen Regel erfüllt ist. Ob die Abstände mit der « Normalzerlegung » rational zusammenhängen, lässt sich zurzeit nicht prüfen, weil die Unsicherheit des Wertes $\frac{e}{m}$ der Kathodenstrahlen.

---

(1) Bei 4282,20; 4202,03; 4180,15; 4116,91; 4069,40; 3434,09; 3338,00 sind die p-Komponenten aber äquidistant, von den s ist nur je eine gemessen worden, so dass eine Prüfung der Formeln nicht möglich ist.

und somit der Normalzerlegung, noch zu gross ist. — Der entgegengesetzte Fall tritt bei 4086,71 ein: es sind die Abstände der s- bzw. p-Komponenten untereinander : 0,88; 0,90; 0,89; 0,83; 0,83; 0,85; sie sind äquidistant innerhalb der Fehlergrenzen, mit $\omega = 0,863$, $m = 1,3$; $n = 1,3$. Die innerste s-Komponente liegt aber nur um 0,16 von der Nullage entfernt, so dass ein rationales Verhältnis ω'/ω sehr unwahrscheinlich ist, und man bei Anwendung der Rungeschen Regel hier, wie in vielen andern Fällen, auf sehr grosse ganze Zahlen geführt wird. Es ist möglich, dass diese Regel nur unter besonderen Umständen, etwa bei speziellen Symmetrieverhältnissen des schwingenden Systems, Geltung hat.

Die Zerlegung von 3649,90 lässt einen sicheren Schluss nicht zu; weitere für die Prüfung der Formeln in Betracht kommende Linien hat Herr Moore nicht beobachtet.

Göttingen, Februar 1909.

XIII.

SERIES IN THE BARIUM SPECTRUM.

(*Astrophysical Journal*, Vol. XXIX, 1909, p. 243.)

The previously unknown triplet series of barium has recently [1] been discovered and published by F. A. Saunders. Very few terms of the series were observed, and since these were not represented by formulae known to be applicable to Mg, Ca, and Sr, the choice of lines may seem at first to be somewhat doubtful. The following remarks will, I think, serve partly to verify his results.

The lines of the first subordinate series may be accurately represented by either of the two following formulae :

$$\nu = A - \frac{109675.0}{\left(m + a + \frac{b}{m^2}\right)^2} \tag{1}$$

$$\nu = A - \frac{109675,0}{[m + \alpha + \beta 10^{-5}(A - \nu)]^2} \tag{2}$$

which, as I have shown [2], serve to represent with great accuracy the series of other elements. In these formulae A, a, b, α, and β are constants; m a whole number, and ν the wave-number (per cm) in vacuum.

For the strongest (and most completely observed) lines we obtain, for instance :

(1) *Astrophysical Journal*, t. XXVIII, 1908, p. 223.

(2) *Annalen der Physik*, t. XII, 1903, p. 264.

$m =$	3	4	5	6	7
λ obs	5777,84	4489,50	4084,94	3895,2	3787
ν obs	17302,8	22268,1	24473,4	25665,4	26399
Error (in Å.)	0,00	0,00	+0,02	+0,6	−0,5

The differences are throughout smaller than the errors of observation. In this case $A = 28472$; $a = +0,29581$; $b = -1,4600$. In the corresponding cases for Mg, Ca, Sr, the constant $a + 1$ has the values 0,842, 1,090, and 1,222; the value for Ba, 1,296, fits in well with these. The alkalies furnish a progression which is very similar.

The wave-number difference $= 878,0$, divided by the square of the atomic weight (μ) gives $47,0 \cdot 10^{-3}$, while the values for Mg, Ca and Sr are $68,8 \cdot 10^{-3}$, $66,1 \cdot 10^{-3}$, and $51,5 \cdot 10^{-3}$. As I have pointed out (¹), the quotient $\frac{p_1 - p_2}{\mu^2}$, calculated from the limits of the series, varies still less from element to element,

$$\frac{(p_1 - p_2)10^5}{\mu^2} = 0,146(\mathrm{Mg});\quad 0,177(\mathrm{Ca});\quad 0,157(\mathrm{Sr});\quad 0,148(\mathrm{Ba}).$$

Finally, the separations of the satellites of the strongest lines of the first members ($n = 3$) vary approximately as the square of the atomic weights. This requirement is also fulfilled in this case. From these facts it is evident that the first subordinate series of Ba is correctly given by Saunders.

The same conclusions hold for the first two triplets of the second subordinate series. Since the quotient $\frac{\beta}{\alpha + 0.5}$ varies but little among the members of a group of chemically related elements, I have already (²) given a probable value of 0.825 for this number in the case of Ba. Granting that the limits of the two series are the same, we have left in the equation of the second subordinate series only a single constant, α, to be calculated. In the red and ultra-red, where the first term of the series must lie, only one

(¹) *Œuvres*, IX, p. 141; X, p. 163.

(²) *Annalen der Physik*, t. XII, 1908, p. 309; Inaug.-Diss. Auszug, *Œuvres*, I, p. 74.

triplet was found with the proper separations. If we use this to calculate α, the formula so derived leads to the second triplet given by Saunders to within 5 Å., and this is a very small error when we consider that both the number 0.825 and the limit of the first subordinate series [1] are very uncertain. Thus both these triplets doubtless belong to the second subordinate series. If we now determine A and α from these two triplets, we find $\lambda = 4248.4$ for the strongest line of the third triplet, while Saunders gives 4239.91. The use of the formula therefore leads us to doubt the propriety of classifying this triplet (and those following) in the series. It is possible, as Saunders remarks, that the formula does not fit this series, notwithstanding the fact that it successfully represents the second subordinate series of all the elements; but further investigation of the missing lines of the triplets of this series must be made before the question can be definitely settled.

Göttingen, January 1909.

---

[1] The formulae (1) and (2) represent, in general, the first subordinate series (especially of Ca) less exactly than the second; if only a few terms are known, and these only inaccurately, considerable errors in A may result.

XIV.

PLAQUES

POUR LA

PHOTOGRAPHIE DU SPECTRE INFRA-ROUGE

(d'après le cahier de laboratoire de Ritz,
par A. Cotton et Pierre Weiss).

La Note des *Comptes rendus* publiée par Ritz le 16 juillet 1906 et reproduite plus haut (IV, p. 88), ne renferme que des indications générales sur les essais qu'il avait faits sur ce sujet à diverses reprises. Il les avait entrepris dans le but de rechercher lui-même les raies d'émission de certains métaux que ses formules spectrales lui faisaient prévoir, et qui ont, depuis, été effectivement observées par d'autres procédés.

La Note des *Comptes rendus* renferme l'essentiel des résultats concernant les premières expériences qui ont porté sur le procédé d'Abney. Ce physicien, en soumettant à la chaleur, dans des conditions convenables, un collodion au bromure d'argent, avait obtenu une émulsion, caractérisée par une coloration bleue, par transparence, avec laquelle il a pu photographier le spectre *solaire* jusqu'à $1^{\mu},4$ environ. Les expériences n'avaient jamais pu être reproduites. Ritz qui y avait réussi, non sans peine, indique dans la Note pour quelles raisons surtout [1] ceux qui avaient essayé avant lui avaient échoué. Mais il ne semble pas utile de chercher à compléter les indications données sur le procédé d'Abney dans cette Note. Ritz, en effet, a réussi à préparer, non

---

[1] Les différences entre les diverses pyroxylines, et la viscosité du collodion variant par suite dans d'énormes proportions.

plus avec du collodion, mais avec de la gélatine, des plaques beaucoup plus sensibles et d'un emploi plus commode.

Ses expériences sur ce sujet ont été interrompues au moment où elles lui avaient donné les résultats les plus encourageants. Voici un *procédé opératoire*, extrait de son cahier de laboratoire. (Mai et juin 1905.)

On prépare d'abord une solution de gélatine à 10 pour 100 en faisant dissoudre (température 65° environ) 14^g de gélatine de Winterthur dans 140^g d'eau.

On fait ensuite le précipité de bromure d'argent en pulvérisant, au moyen de l'appareil représenté figure 1, une solution de bromure dans une solution de nitrate d'argent. La pression était obtenue commodément au moyen d'une bombe d'acide carbonique munie d'un détendeur.

1°	Bromure de zinc........	1^g,90.
	Eau....................	30$^{cm^3}$.
2°	Nitrate d'argent	3^g.
	Eau....................	30$^{cm^3}$.

(Dans cette expérience il y a donc un léger excès de nitrate d'argent.)

La pulvérisation faite, on maintient pendant 10 minutes à une température de 40° à 50°, on lave, puis on émulsionne le précipité à la température de 40° en l'ajoutant à 35$^{cm^3}$ de la solution de gélatine, de sorte que le volume total soit d'environ 40$^{cm^3}$. On ajoute 0,2 [1] de bromure d'ammonium. On porte pendant 15 minutes à une température comprise entre 90° et 100°. On laisse refroidir pendant 5 heures, on coule sur la plaque et on laisse sécher pendant 12 heures.

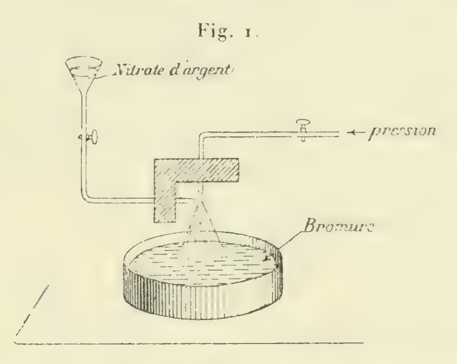
Dans le cahier de laboratoire dont est extrait ce procédé, il n'y a pas de renseignement sur la teinte de l'émulsion après le murissage, c'est-à-dire dans les conditions où Ritz l'employait; d'après sa Note aux *Comptes rendus* il semble que le bromure précipité à froid par ce procédé était bleu par transmission. D'après le cahier, l'émulsion aussitôt après sa préparation à 40°, n'était pas bleue mais grise, tirant plus ou moins sur le rose.

---

[1] Grammes ou centimètres cubes d'une solution titrée?

Après 5 minutes d'exposition à un spectre donné par une lampe Nernst et un prisme à vision directe, il obtenait une impression qui allait jusqu'à la limite d'action de l'infra-rouge sur un écran de sulfure de zinc phosphorescent. La phosphorescence est détruite par les rayons infra-rouges de longueur d'onde inférieure à $1^{\mu},4$ ou $1^{\mu},5$, nombres donnés par Becquerel et adoptés par Ritz. C'est cette limite qui est indiquée en M dans la figure 2, dans laquelle

Fig. 1.



les deux doubles traits verticaux R représentent deux repères en fil métallique qui se marquaient par leur ombre sur la plaque. *l* est la limite de sensibilité des plaques panchromatiques Lumière.

Comme Ritz l'indique dans sa Note aux *Comptes rendus*, il a aussi préparé le bromure d'argent, par le même procédé de pulvérisation, avec des solutions alcooliques :

1°	Bromure de zinc........	$1^{g},90$.
	Alcool.................	30^{cm^3}.
2°	Nitrate d'argent........	$3,0^{g}$.
	Eau....................	3^{cm^3}.
	Alcool.................	30^{cm^3}.

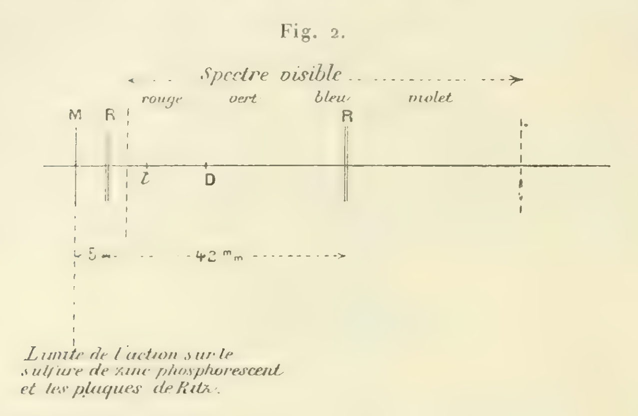
Le reste de la préparation a été fait exactement comme ci-dessus. La sensibilité semblait s'étendre un peu moins loin que dans la préparation à l'eau (2^{mm} dans la figure 2).

Au moment où il interrompit les expériences, Ritz considérait que les deux recettes ci-dessus contenaient une solution du problème. Il pensait qu'elle devait encore être perfectionnée en remédiant au défaut du voile, par les procédés habituellement employés à cet effet.

Il se proposait aussi de varier d'une façon systématique les

conditions de cette préparation. On a vu qu'il faisait la pulvérisation de la solution de nitrate dans celle de bromure. Il se proposait d'essayer l'inverse. Les liqueurs employées correspondaient à un excès de nitrate, il fallait essayer un excès de bromure. Il restait aussi à voir si l'excès d'un des réactifs est utile pendant le chauffage, s'il ne serait pas avantageux de laver le précipité avant

Fig. 2.



de le chauffer pour la première fois, de laisser refroidir avant l'émulsification, etc.

Quelques semaines plus tard, après la lecture de deux Mémoires de Stas (*Annales de Chim. et de Phys.*, 4e série, t. XXV, 1872, p. 22 et 5e série, t. III, 1874, p. 145 et 289), il semble avoir cru à la possibilité d'en déduire une préparation plus rationnelle et simplifiée des mêmes plaques et, peut-être, d'augmenter leur sensibilité.

Stas avait établi que le chlorure d'argent sous ses deux états, floconneux et grenu (cristallin), possède des solubilités différentes et des sensibilités à la lumière différentes (*voir* notamment le premier Mémoire de Stas, p. 44); le bromure d'argent, quoique moins soluble dans l'eau pure, peut être obtenu aussi sous ces deux états. Ritz estimait que c'était la variété grenue (ou cristalline) qu'il fallait obtenir. C'est pourquoi il songeait notamment à prendre du bromure préparé avec des solutions concentrées, le laver, le mettre en présence d'une *grande quantité d'eau* en agitant énergiquement, puis à le soumettre à une cuisson prolongée dans un bain d'eau bouillante, ou même à l'autoclave et au besoin,

comme l'avait fait Stas pour le chlorure d'argent, à des alternatives de chauffe et de refroidissement. On émulsifierait enfin le bromure amené à l'état voulu.

L'idée de la résonnance électromagnétique des grains de bromure l'avait guidé dès le début de ses recherches sur les plaques photographiques. On a émis, comme on sait, cette hypothèse de la résonnance pour expliquer la coloration de certaines solutions colloïdales métalliques renfermant des particules ultramicroscopiques. Ritz paraît avoir admis que si des particules de bromure d'argent sont 100 à 1000 fois plus grandes que les particules d'argent métallique en résonnance avec les mêmes ondes, cela tiendrait à ce que la conductibilité superficielle est aussi 100 à 1 000 fois plus petite.

Le contrôle de cette hypothèse lui paraissait accessible à l'expérience, en mesurant, soit directement ou par leur vitesse de chute, la grosseur des grains.

Peu après, ses reflexions ont reçu une impulsion nouvelle par la lecture des Mémoires de J. Perrin sur *L'Électrisation de contact et les solutions colloïdales* (*Journal de Chimie physique*, t. II, 1904, p. 601 et t. III, 1905, p. 50). Il avait joint à ses notes photographiques des extraits de ces Mémoires et semble avoir espéré y trouver le moyen de pénétrer plus avant dans le mécanisme de la sensibilité du bromure, comme le montre la réponse suivante qu'il fit à une demande de publication plus complète :

Sion, 20 mars 1906.

. . . Je ne suivrai sans doute pas votre conseil de rédiger mes procédés photographiques. Le clou manque encore, ce serait l'affaire de quelques expériences qui fermeraient le cycle en fortifiant toutes les autres conclusions et expériences, le procédé de Burbank [1] combiné avec le mien, et l'ionisation démontrée être le facteur essentiel de cette transformation du bromure. J'ai horreur de publier des choses mal finies. . .

---

[1] G. MEYER, *Physikal. Zeitschr.*, t. I, 1900, p, 6.

XV.

ÜBER EINE NEUE METHODE

ZUR LÖSUNG GEWISSER VARIATIONSPROBLEME DER MATHEMATISCHEN PHYSIK.

(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. CXXXV, p. 1–61.)

EINLEITUNG.

Die Randwertaufgaben der mathematischen Physik erfordern durchweg die Darstellung endlicher, stetiger Funktionen in vorgeschriebenen endlichen Bereichen. Nur ausnahmsweise gelingt hier eine Entwickelung nach Potenzreihen, und noch seltener ist dieselbe im ganzen Bereich numerisch brauchbar. Endlich scheitert, selbst in Fällen, wo die Entwickelung prinzipiell möglich wäre, ihre Berechnung häufig an dem Umstand, dass sie die Lösung unendlich vieler linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten erfordert. Sehr viel besser eignen sich Entwickelungen nach Polynomen, Fouriersche Reihen usw. für die Darstellung einer reellen Funktion $w(x, y, \ldots)$ *in einem gegebenen Bereich*, da hier für die Konvergenz im ganzen Bereich nur Eigenschaften der Stetigkeit usw. gefordert werden, die bei den Randwertaufgaben meist erfüllt sind. Bei numerisch gegebenem w bietet die Bestimmung der Koeffizienten eines Polynoms $w_n = a_0 + a_1 x + \ldots$ von gegebenem Grade n, derart, dass w_n als Approximation von w gelten könne, keinerlei Schwierigkeit, und es kann die Genauigkeit bei genügend grossem n unbegrenzt gesteigert werden. *Ist aber w als Integral einer Differentialgleichung, unter gewis-*

sen Nebenbedingungen, *definiert*, so gelingt die Berechnung der Koeffizienten a_i zunächst nur in dem sehr speziellen Fall, wo eine Integration durch rasch konvergente Potenzreihen möglich ist. Es erhebt sich die Forderung, die *angenäherte Darstellung des Integrals im ganzen vorgeschriebenen Bereich durch ein Polynom von gegebenem Grade n auch in diesem Falle allgemein durchzuführen, in der Art, dass bei wachsendem n die Genauigkeit unbegrenzt wachse, so dass schliesslich eine Entwickelung des Integrals nach Polynomen resultiert.*

Dabei wird man n klein wählen können, falls die Erfahrung uns z. B. zeigt, dass die gesuchte Kurve nur schwach gekrümmt ist.

Auch Fourier-Reihen usw. können brauchbar sein; allgemeiner kann man meist derartige Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ angeben, dass die etwa durch Beobachtung bekannte Funktion w von $x, y, \ldots$ in der Form

$$w_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n, \tag{1}$$

auch wenn n klein bleibt, durch geeignete Wahl der unbestimmten Koeffizienten a_i mit genügender Genauigkeit dargestellt werden kann. Wieder stellt sich die eben für Polynome aufgeworfene Frage ein.

Gegenstand dieser Abhandlung ist die Angabe einer Methode zur Bestimmung der a_i unter der Voraussetzung, dass es sich um ein Variationsproblem handle, eine Forderung, die ja bei einer grossen Anzahl physikalischer und mechanischer Probleme erfüllt ist. Kann, bei geeigneter Wahl der ψ_i, die Genauigkeit mit wachsendem n unbegrenzt gesteigert werden, so ist damit die Integration des Problems, und zwar in einer für die Anwendung besonders brauchbaren Gestalt, geleistet.

Beschränken wir uns zunächst auf eine unabhängige Variable und ist

$$J = \int_a^b f(x, w, w', w'', \ldots w^{(\sigma)})\, dx \tag{2}$$

das zu variierende Integral, so lässt sich das Verfahren zur Berechnung der a_i in folgender allgemeiner, wenn auch zunächst noch etwas unbestimmter Form aussprechen:

Man setze den Ausdruck (1) *von w_n in f an Stelle von w; dann wird das Integral eine bekannte Funktion $J_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*

der a_i, die x nicht enthält. Man bestimme die a_i so, dass J_n ein Extremum werde, also aus dem Gleichungssystem

$$(3) \qquad \frac{\partial J_n}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_n} = 0.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, dass die ψ_i so gewählt sind, dass w_n die vorgeschriebenen Nebenbedingungen, soweit dieselben sich nicht aus der Variation selbst ergeben [1], für jeden Wert der a_i erfüllt. Lässt das System (3) eine und nur eine Lösung $a_1 = \alpha_1^{(n)}, a_2 = \alpha_2^{(n)}, \ldots, a_n = \alpha_n^{(n)}$ zu, so ist

$$(4) \qquad w_n(x) = \psi_0 + \alpha_1^{(n)} \psi_1 + \alpha_2^{(n)} \psi_2 + \ldots + \alpha_n^{(n)} \psi_n$$

die *bestmögliche Darstellung von w*, falls man als Mass der Genauigkeit das Integral J selbst betrachtet. Dieses wird in der Tat bei der angegebenen Bestimmung der a_i möglichst wenig von seinem exakten Minimal- oder Maximalwert $J^{(0)}$ abweichen. Da bei physikalischen und mechanischen Problemen J in einfachem Zusammenhang mit wichtigen Grössen, nämlich der potentiellen und kinetischen Energie steht, z. B. im Falle des Gleichgewichts gleich der ersteren ist, so ist es wohl berechtigt, diese für den Vorgang wesentliche Grösse als Mass des Gesamtfehlers zu betrachten.

Die vorausgesetzte Beschränkung auf *eine* Variable x und auf *eine* unbekannte Funktion w ist natürlich ganz unwesentlich, und es erweist sich, wie man im folgenden sehen wird, diese Methode der Bestimmung der a_i sowohl theoretisch wie auch praktisch als eine durchaus zweckmässige.

Bei den Randwertaufgaben der mathematischen Physik handelt es sich meist um lineare Differentialgleichungen. Es ist dann J_n eine Funktion zweiten Grades der a_i und die Gleichungen (3) werden linear. In allen Fällen, wo unter dem Integralzeichen J eine *definite Form steht,* — wie dies insbesondere bei Gleichgewichtsproblemen, beim Dirichletschen Problem usw. der Fall ist — *existiert eine und nur eine Lösung des Systems* (3). Die

---

(1) Zu dieser letzteren Art von Bedingungen gehören z. B. die an den *freien* Rändern einer elastischen Platte zu erfüllenden Gleichungen, wie aus der Kirchhoffschen Theorie hervorgeht.

Werte eines solchen Integrals besitzen für alle den Bedingungen genügende Funktionen eine obere oder untere Grenze, ob sie wirklich erreicht wird, bleibt zunächst unbekannt. Bildet man nun die sukzessiven Approximationen $w_1 = \psi_0 + \alpha_1^{(1)} \psi_1$; $w_2 = \psi_0 + \alpha_1^{(2)} \psi_1 + \alpha_2^{(2)} \psi_2$ usw., und die entsprechenden Minimalwerte $J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, J_3^{(0)}, \ldots,$ so bilden die letzteren eine immer ab- oder immer zunehmende Reihe von Zahlen, die gegen eine bestimmte Grenze konvergieren. Es zeigt sich, dass die Existenz dieser Grenze hinreicht zum Beweis, *dass die w_n, oder gewisse über diese Funktionen erstreckte unbestimmte Integrale, im ganzen gegebenen Bereich gleichmässig konvergieren.* Diese Konvergenz findet selbst dann statt, wenn die ψ_i z. B. gerade Funktionen sind, während die gesuchte Lösung w eine ungerade ist: in diesem und ähnlichen Fällen konvergieren die w_n gegen eine andere Grenzfunktion. *Besitzen aber die ψ_i die oben erwähnte Eigenschaft, dass sich jede beliebige Funktion w, die den gestellten Rand- und Stetigkeitsbedingungen genügt, durch einen Ausdruck der Form* (1) *beliebig angenähert darstellen lässt, nebst einer bestimmten Anzahl ihrer Ableitungen, so konvergieren die w_n gegen die gesuchte Lösung.* Der Beweis dieses letzteren Satzes stützt sich im wesentlichen auf die von Herrn Hilbert [1] gegebene neue Variationsmethode.

Die angegebene Methode sukzessiver Approximationen lehnt sich also aufs engste an das sog. *Dirichletsche Prinzip* an; in allen Fällen, wo sie anwendbar ist, gibt sie einen *Beweis dieses Prinzips*, da die hier getroffene besondere Auswahl der Funktionen, durch welche das zu variierende Integral J immer kleiner gemacht wird, wie oben bemerkt, einen Konvergenzbeweis ermöglicht.

Die numerische Durchführbarkeit und der praktische Wert der Methode hängen wesentlich von einer geeigneten Wahl der ψ_i ab, die natürlich durch die Resultate des Experiments oft sehr erleichtert werden kann. In den von mir berechneten Beispielen (s. unten) sind sie durchaus befriedigend.

Die Erläuterung dieser notwendigerweise etwas unbestimmten

---

[1] D. Hilbert, *Ueber das Dirichletsche Prinzip.* (*Festschrift der Kgl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Klasse*), Berlin, 1901, p. 17 ff.

allgemeinen Betrachtungen geschieht am besten an Hand einiger spezieller Probleme; dabei wird sich gleichzeitig zeigen, wie die ψ_i zu wählen sind, damit den Rand- und Stetigkeitsbedingungen genügt wird.

1°. Als erstes Beispiel geben die §§ 1 bis 13 die *allgemeine Lösung* der bisher nur in sehr speziellen Fällen behandelten Aufgabe, die *Deformation einer ringsum eingespannten, ursprünglich ebenen elastischen Platte von gegebener Gestalt unter der Einwirkung gegebener Druckkräfte zu berechnen.*

Es ist dies Problem äquivalent mit der Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \equiv \Delta\Delta w = f(x, y),$$

wo f gegeben und am Rande $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ vorgeschrieben ist (n = Normale zum Rande).

2° § 13 und § 14 enthalten die Lösung des *Dirichletschen Problems* in seiner klassischen Form. Es soll die Gleichung $\Delta w = 0$ unter der Voraussetzung der Stetigkeit von w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ und bei gegebenen Randwerten $\overline{w}$ erfüllt sein.

Die Beschränkungen, die hierbei der Gestalt der Randkurve und den gegebenen Funktionen f, $\overline{w}$ auferlegt werden müssen, sind sehr allgemeiner Natur und für die Anwendungen durchaus unwesentlich.

3° § 15 enthält die Anwendung der Methode auf *gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten*, die aus einem Variationsproblem entspringen, wobei die Werte des Integrals und eventuell einiger Ableitungen an den Endpunkten des Intervalls $a \ldots b$ vorgeschrieben sind.

4°. Endlich zeigt die Anwendung auf die *schwingende Saite*, § 16, dass auch in Fällen, wo der oben angedeutete Konvergenzbeweis versagt, die Methode numerisch sehr brauchbar bleibt und sich zur Berechnung z. B. Chladnischer Klangfiguren usw. wohl eignet.

In der Mechanik werden bei Anwendung des Hamiltonschen Prinzips auf ein endliches Zeitintervall die Gleichungen (3) im allgemeinen nicht linear, und die Berechnung höherer Approxi-

mationen ist dadurch sehr erschwert. Kennt man aber eine genügend angenäherte Lösung, so wird man in diesem, wie auch in andern Fällen, die *Methode nur auf die Berechnung der Korrektionen* anwenden und sich dabei auf die quadratischen Glieder in der Entwickelung von $J_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in der Umgebung der Nullwerte der Variablen beschränken können.

Sind geeignete Bedingungen im Unendlichen vorgeschrieben, die von den ψ_i erfüllt werden, so dass das über ein unendlich ausgedehntes Gebiet erstreckte Integral J und die J_n endlich bleiben, so kann die Methode ebenfalls angewendet werden.

Es ist wesentlich zu bemerken, dass *die ψ_i in verschiedenen Gebieten verschiedene analytische Funktionen sein, bzw. durch verschiedene Ausdrücke gegeben sein können*, falls nur auf der Grenze zweier solcher Gebiete gewisse Stetigkeitsbedingungen (siehe z. B. § 2) erfüllt sind. Hierin liegt für die Anwendung auf experimentelle Ergebnisse unter Umständen eine grosse Erleichterung.

Deformation einer am Rande eingespannten elastischen Platte unter dem Einfluss eines gegebenen Normaldrucks.

§ 1.

Wir behandeln zunächst das Problem der Integration der Gleichung

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y), \tag{5}$$

wobei auf dem Rand L des gegebenen Gebiets R die Bedingungen zu erfüllen sind

$$\overline{w} = 0, \qquad \overline{\frac{\partial w}{\partial n}} = 0 \tag{6}$$

und die Endlichkeit und Stetigkeit von w und seinen Ableitungen bis zur 4. Ordnung in R und auf L gefordert wird.

Das Problem reduziert sich, wie man ohne weiteres einsieht, darauf, das Integral

$$J = \int\!\!\int_R \left[\frac{1}{2}(\Delta w)^2 - f(x, y)\,w\right] dS, \tag{7}$$

welches über die ganze Platte, d. h. das ganze Gebiet R zu erstrecken ist, unter den erwähnten Bedingungen zu einem Minimum zu machen. Es ist bis auf einen konstanten Faktor J die potentielle Energie der Deformation [1] und f der auf die Platte pro Flächeneinheit ausgeübte Druck. Von f setzen wir voraus, dass es endlich und stetig ist, und dass $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ endlich sind.

Die Ausdehnung der Greenschen Sätze auf die Gleichung (5) hat Mathieu [2] gegeben.

Sind U, V zwei im Gebiete R nebst ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung inkl. stetige Funktionen, so gilt

$$\int\int_R (U\,\Delta\Delta V - V\,\Delta\Delta U)\,dS = \int_L \left(\Delta U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta V\frac{\partial U}{\partial n} + U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right) ds,$$

wo n die äussere Normale der Berandung L bedeutet.

Es sei (a, b) ein Punkt im Innern von R und

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2};$$

wir setzen $V = r^2 \log r$. Diese Funktion spielt hier dieselbe Rolle wie $\log r$ in der Potentialtheorie. Dann ist

$$-8\pi U(a, b) = \int\int_R r^2 \log r\,\Delta\Delta U\,dS - \int_L \left[r^2 \log r\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \frac{\partial(r^2\log r)}{\partial n}\Delta U + 4\log r\frac{\partial U}{\partial n} - 4\frac{\partial \log r}{\partial n}U\right] ds.$$

Ist also

$$\Delta\Delta U = f(x, y), \qquad U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ auf } s,$$

---

[1] Der Kirchhoffsche Ausdruck für die potentielle Energie der Platte enthält allerdings noch ein weiteres Glied, welches aber, wie zwei sukzessive partielle Integrationen zeigen, im Falle $\overline{w} = 0$, $\frac{\partial \overline{w}}{\partial n} = 0$ identisch verschwindet.

[2] Mathieu, *Journal de Liouville*, t. XIV, p. 378, 1869; *Théorie du potentiel*, Kap. III, p. 70; Paris, 1890; vgl. auch W. Voigt, *Kompendium der theor. Physik*, t. I, p. 206, Leipzig, 1895.

so gilt

$$-8\pi U(a,b) = \int\int_R r^2 \log r\, f(x,y)\, dS$$
$$-\int_L \left[\Delta U \frac{\partial(r^2 \log r)}{\partial n} - \frac{\partial \Delta U}{\partial n} r^2 \log r\right] ds.$$

Ist (a, b) ein innerer Punkt, so kann man das Linienintegral beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiieren; das Flächenintegral kann dreimal ebenso differentiiert werden, ohne dass seine Konvergenz im Punkte (a, b) aufhört. Um Derivierte höherer Ordnung zu erhalten, kann man eine Methode von Riemann [1] verallgemeinern:

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial a}\int\int r^2 \log r\, f(x,y)\, dS = \int\int \frac{\partial}{\partial a} r^2 \log r . f\, dS$$
$$= -\int\int \frac{\partial}{\partial x}(r^2 \log r) f\, dS$$
$$= -\int_L r^2 \log r f \cos nx\, ds + \int\int_R r^2 \log r \frac{\partial f}{\partial x} dS,$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial x}$ endlich und f stetig sein muss. Durch Wiederholung dieser Transformation erhält man den Satz:

Wenn $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, \mu;\ q = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$ endlich und stetig sind — $\frac{\partial^{\mu+\nu} . f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$ braucht nur endlich zu sein — so erhält man auf diese Weise die entsprechenden Ableitungen von U nach a und b; ferner kann man von jeder so berechneten Ableitung noch die Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung durch Differentiation unter dem Integralzeichen, ohne Transformation, erhalten. *Alle Ableitungen* $\frac{\partial U^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}$ *sind stetig und endlich, wenn* $p \leqq \mu + 3$; $q \leqq \nu + 3$; $p + q \leqq \mu + \nu + 3$ *sind.*

Man hat ebenfalls

$$\int\int_R \Delta U\, \Delta V\, dS = \int\int_R V \Delta\Delta U\, dS + \int_L \left(\Delta U \frac{\partial V}{\partial n} - \Delta V \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds.$$

---

[1] RIEMANN, *Schwere, Elektrizität u. Magnetismus*, herausgeg. von Hattendorf.

Wendet man dies auf die Variation von J an

$$\delta J = \int\int_R (\Delta w\, \delta \Delta w - f\, \delta w)\, dS,$$

wobei $U = w$, $V = \delta w$ zu setzen ist, so ist auf L wegen $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ auch $\delta w = 0$, $\frac{\partial \delta w}{\partial n} = 0$, und es ergibt sich

$$\delta J = \int\int (\Delta \Delta w - f)\, \delta w\, dS,$$

also die Gleichung (5.). Jede Lösung dieser Gleichung entspricht offenbar einem wirklichen *Minimum* von J.

Ferner besitzen die Werte, die J für beliebige, den Stetigkeits- und Randbedingungen genügende Funktionen w annehmen kann, *eine untere Grenze* (die möglicherweise allerdings nicht wirklich erreicht wird). Denn setzt man

$$w(a, b) = w_1 - w_2, \qquad w_1 = -\frac{1}{8\pi}\int\int r^2 \log r\, f(x, y)\, dS,$$

$$J_0 = \int\int_R \left[\frac{1}{2}(\Delta w_1)^2 - f w_1\right] dS - \int_L \left(w_1 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_1}{\partial n}\Delta w_1\right) ds.$$

so ergibt sich

$$\Delta \Delta w_2 = 0$$

und auf L:

$$w_1 = -w_2, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial n} = -\frac{\partial w_2}{\partial n}.$$

Somit wird der Ausdruck

$$J = \int\int \left[\frac{(\Delta w_1)^2}{2} + \frac{(\Delta w_2)^2}{2} - \Delta w_1 \Delta w_2 - f(w_1 - w_2)\right] dS$$

wegen

$$\int\int_R \Delta w_1 \Delta w_2\, dS = \int\int_R w_2 \Delta \Delta w_1\, dS + \int_L \left(\frac{\partial w_2}{\partial n}\Delta w_1 - w_2 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n}\right) ds$$

$$= \int\int_R w_2 f\, dS - \int_L \left(\frac{\partial w_1}{\partial n}\Delta w_1 - w_1 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n}\right) ds$$

gleich

$$J - J_0 = \frac{1}{2}\int\int_R (\Delta w_2)^2\, dS.$$

Somit ist $J \geqq J_0$, womit die Existenz einer unteren Grenze nachgewiesen ist.

Die Lösung von (5) unter den gegebenen Bedingungen ist eindeutig bestimmt, da die Differenz zweier Lösungen w, w' ergeben würde .

$$\Delta\Delta(w - w') = 0, \qquad w - w' = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{\partial w'}{\partial n} = 0 \text{ auf L},$$

woraus durch Multiplikation mit $w - w'$ und Integration

$$\int\int [\Delta(w - w')]\, dS = 0.$$

Es ist somit $\Delta(w - w') = 0$ in R, und da $w - w' = 0$ auf L, ist überall $w - w' = 0$.

Ich beschliesse diese vorbereitenden Sätze durch die Bemerkung, dass aus $w = 0$ auf L folgt $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$; und da auch $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$, so wird

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial n}\cos(n, x) + \frac{\partial w}{\partial s}\cos(s, x) = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ auf L}.$$

§ 2.

Sei

$$\psi_1(x, y), \quad \psi_2(x, y), \quad \ldots \quad \psi_n(x, y), \quad \ldots$$

eine unbegrenzte Reihe von Funktionen, die folgenden Bedingungen genügen :

1°. Sie sind in der ganzen Ausdehnung der Platte R und auf deren Rand L eindeutige endliche und stetige Funktionen von x und y. Gleiches gilt von ihren Ableitungen der Form

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\, \partial y^n} \qquad (m = 0, 1, 2, 3;\ n = 0, 1, 2, 3),$$

die im folgenden eine wichtige Rolle spielen und die wir abkürzend als *Hauptableitungen* bezeichnen.

2°. Auf L ist für jedes i, $\psi_i = 0$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0$.

3°. Sei ζ eine beliebige nebst ihren Hauptableitungen endliche und stetige Funktion, welche überall gleich 0 ist ausser in einem Rechteck ρ, welches ganz innerhalb R liegt, und dessen Lage und

Grösse willkürlich bleiben. Wir setzen voraus, dass man die Koeffizienten α_i und den Index m im Ausdruck

$$\zeta_m(x, y) = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \ldots + \alpha_m\psi_m,$$

so wählen kann, dass $\zeta - \zeta_m$ und seine Hauptableitungen in R und auf L dem absoluten Werte nach kleiner bleiben als eine willkürlich gegebene Grösse ε. Man kann also eine Reihe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \ldots$ von Funktionen angeben, die gleichmässig in R gegen ζ konvergieren, ebenso wie ihre Hauptableitungen. (Diese Annahme fordert also, dass die ψ_i die Eigenschaft der Polynome, Fourier-Reihen usw. besitzen, eine willkürliche Funktion darzustellen.)

4°. Eine Summe der Form ζ_m kann nur dann in R überall identisch verschwinden, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Es wird unten gezeigt werden, wie bei gegebener Berandung die bekannten Eigenschaften der Polynome, Fourier-Reihen usw. es gestatten, solche Funktionen ψ_i zu bilden.

Um nun die gesuchten sukzessiven Approximationen zu erhalten, haben wir nur den Ausdruck

$$w_m = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m$$

an Stelle von w *in das Integral* J *zu setzen;* sei

$$\text{(8)} \qquad J_m = \int\int_R \left[\frac{1}{2}(\Delta w_m)^2 - f w_m\right] dS,$$

dann ist J_m eine Funktion zweiten Grades der a_i, die von x, y unabhängig ist,

$$J_m = \sum_1^m \sum_1^m \alpha_{pq} a_p a_q - \sum_1^m \alpha_q a_q,$$

wo

$$\text{(9)} \qquad \alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \int\int_R \Delta\psi_p \, \Delta\psi_q \, dS = \int\int_R \Delta\Delta\psi_p . \psi_q \, dS$$

$$= \int\int_R \Delta\Delta\psi_q . \psi_p \, dS,$$

$$\text{(10)} \qquad \alpha_p = \int\int_R f(x, y)\psi_p \, dS.$$

Wir wählen die a_i in der Weise, dass $J_m(a_1, a_2, \ldots a_m)$ ein Minimum wird, so dass also

$$(11) \qquad \sum_{p=1}^{m} \alpha_{pq} a_p = \alpha_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, m).$$

Die quadratische Form

$$Q = \sum_1^m \sum_1^m \alpha_{pq} a_p a_q = \frac{1}{2} \int\int (\Delta w_m)^2 \, dS$$

ist *stets positiv* und nur dann gleich Null, wenn $\Delta w_m = 0$ in R, also, wegen $w_m = 0$ auf L, wenn w_m identisch gleich Null ist. Daraus folgt nach 4°, dass $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sämtlich verschwinden müssen, falls $Q = 0$ sein soll.

Da nun J_m, wie wir gezeigt haben, eine untere Schranke J_0 besitzt, so folgt, dass J_m *ein Minimum für ein eindeutig bestimmtes Wertesystem der a_i erreicht*, die Gleichungen (11) also stets und nur in *einer* Weise lösbar sind, d. h., dass ihre Determinante von Null verschieden ist.

Es sei nebenbei bemerkt, dass auch in Fällen, wo $J_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ eine allgemeinere analytische Form hat, das Minimum, falls es existiert, nach einem bekannten Satz auch wirklich erreicht wird, so dass sich bei einer endlichen Anzahl von Parametern nie die Schwierigkeit einstellt, die dem Dirichletschen Prinzip, wo die Anzahl der Parameter als unendlich betrachtet werden kann, anhaftet.

Sei $d'w$ das totale Differential von w in bezug auf die a_i, und

$$\zeta_m = \sum_1^m A_p \psi_p,$$

wo die A_p willkürlich sind; dann kann man $da_p = \varepsilon . A_p$ setzen (ε = unendlich kleine Grösse), so dass

$$d' w_m = \varepsilon \zeta_m$$

ein Ausdruck von derselben Form wie w_m ist. Es ist

$$(12) \qquad d'J = \sum_1^m \frac{\partial J}{\partial a_p} da_p = 0 = \int\int (\Delta w_m \, \Delta d' w_m - f d' w_m) \, dS,$$

woraus, wegen der von den ψ_i erfüllten Grenzbedingungen, und unter Weglassung des Faktors ε folgt

$$(13)\qquad o = \int\int (\Delta w_m \,\Delta\zeta_m - f\zeta_m)\, dS$$

oder auch

$$(14)\qquad o = \int\int (\Delta\Delta w_m - f)\zeta_m\, dS.$$

Setzt man insbesondere $\zeta_m = w_m$, so gibt (13)

$$\int\int_R [(\Delta w_m)^2 - f w_m]\, dS = o$$

so dass, nach (7)

$$(15)\qquad \operatorname{Min} J_m = J_m^{(0)} = -\frac{1}{2}\int\int_R (\Delta w_m)^2\, dS.$$

Ebenso wird man eine neue, dem Index $m+n > m$ entsprechende Approximation finden, mit einem neuen Wertsystem a'_i der a_i. Ist

$$a'_p - a_p = \varepsilon_p \qquad (p = 1, 2, \ldots m),$$

$$a'_p = \varepsilon_p \qquad \text{für} \qquad p = m+1 + \ldots - m+n,$$

$$w_{m+n} - w_m = \varphi_{mn} = \sum_1^{m+n} \varepsilon_p \psi_p, \qquad \zeta_{m+n} = \sum_1^{m+n} A'_p \psi_p,$$

so gilt ebenso für das neue Minimum $J_{m+n}^{(0)}$

$$(16)\qquad J_{m+n}^0 = \int\int \left[\frac{1}{2}(\Delta w_m + \Delta\varphi_{mn})^2 - f(w_m + \varphi_{mn})\right] dS$$

$$= J_m^{(0)} + \int\int \left[\Delta w_m \,\Delta\varphi_{mn} - \frac{1}{2}(\Delta\varphi_{mn})^2 - f\varphi_{mn}\right] dS$$

und

$$o = \int\int [(\Delta w_m + \Delta\varphi_{mn})\Delta\zeta_{m-n} - f\zeta_{m+n}]\, dS.$$

Setzt man in letzterer Gleichung insbesondere $A'_p = \varepsilon_p$, d. h. $\zeta_{m+n} = \varphi_{mn}$, so folgt eine neue Gleichung, welche, in (16) eingesetzt, ergibt

$$(17)\qquad J_{m+n}^{(0)} = J_m^{(0)} - \frac{1}{2}\int\int_R (\Delta\varphi_{mn})^2\, dS.$$

Die Grössen $J_1^{(0)}$, $J_2^{(0)}, \ldots$ bilden also eine *nie* zunehmende, unbegrenzte Zahlenreihe, wie a priori zu erwarten war. Da sie aber grösser als J_0 bleiben, besitzen sie eine Grenze $J^{(0)} \geqq J_0$, und man kann eine Zahl M so bestimmen, dass, wenn $m > M$ und η eine noch so kleine, vorgegebene Zahl ist, für jedes n

$$(18) \qquad 2\,|\,J_{m+n}^{(0)} - J_m^{(0)}\,| = \int\int (\Delta\varphi_{mn})^2\,dS < \eta.$$

Aus dieser Ungleichung lässt sich nun die Konvergenz unserer sukzessiven Approximationen ableiten.

§ 3.

Ist

$$\varphi = \frac{\varphi_{mn}}{\sqrt{\eta}},$$

so ist nach (18)

$$(19) \qquad \int\int_R (\Delta\varphi)^2\,dS < 1.$$

Es ist aber identisch

$$(20) \qquad \varphi(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_R \log r\,\Delta\varphi\,dS$$

$$[\,r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2\,]$$

für jeden inneren Punkt, weil das Zusatzglied

$$\int_L \left(\log r\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial \log r}{\partial n}\right)ds,$$

welches im allgemeinen hinzukommt, hier gleich Null ist wegen $\varphi = 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ auf L. Sei D das Gebiet, in welchem $|\log r| \leqq |\Delta\varphi|$, und D′ dasjenige, in welchem $|\Delta\varphi| < \log r$ (letzteres enthält den Punkt $a\,b$), dann ist

$$2\pi\,|\,\varphi\,| < \int\int_R |\log r|\,|\Delta\varphi|\,dS < \int\int_D (\Delta\varphi)^2\,dS + \int\int_{D'} (\log r)^2\,dS$$

$$< \int\int_R (\Delta\varphi)^2\,dS + \int\int_R \log^2 r\,dS.$$

Das letzte Integral ist konvergent, wie man durch Einführung

von Polarkoordinaten sieht, wobei $r \log^2 r$ für $r = 0$ gegen Null konvergiert; es hängt von (a, b) ab; ist K sein grösster Wert in R, so wird endlich

$$|\varphi| < \frac{1+K}{2\pi}$$

und somit

$$|\varphi_{mn}| = |w_{m+n} - w_m| < \frac{1+K}{2\pi}\sqrt{\eta}.$$

Die Zahl $\frac{1+K}{2\pi}\sqrt{\eta}$ ist sowohl von x, wie von y und von n unabhängig; sie kann kleiner als jede vorgegebene Zahl ε gemacht werden, da man wegen der Konvergenz von $J_m^{(0)}$ immer M so wählen kann, dass

$$\eta \leqq \frac{4\pi^2}{(1+K)^2}\varepsilon^2.$$

Dann ist für jedes $m > M$ und jedes n, x und y: $|w_{m+n} - w_m| < \varepsilon$. Hieraus folgt der Satz:

Die Funktionsreihe $w_1, w_2, w_3, \ldots$ *konvergiert gleichmässig im ganzen Gebiet* R *gegen eine Funktion* $w(x, y)$, *welche somit in* R *stetig ist, und auf dessen Rand* S *verschwindet.*

Damit ist zwar die Konvergenz unserer sukzessiven Approximationen bewiesen; da wir aber von der Voraussetzung (3) bisher keinen Gebrauch gemacht haben, wird die Funktion w von der gesuchten Lösung, bei besonders unzweckmässiger Wahl der ψ_i, möglicherweise sehr verschieden sein. Hat man für die ψ_i z. B. gerade Funktionen gewählt, während die Lösung eine ungerade Funktion ist, so kann w natürlich nicht die Lösung sein. Es ist aber bemerkenswert, dass der blosse Umstand, dass wir die unendliche Anzahl Konstanten, über die wir verfügen, nach dem angegebenen Schema bestimmen, für sich allein schon unter allen Umständen die Konvergenz erzwingt. Dass, wie wir zeigen werden, die *richtige Grenzfunktion* w herauskommt, falls die w_m nach Analogie der Polynome, der Fourier-Reihen usw. nahezu beliebige Funktionen darzustellen vermögen, ist von vornherein zu erwarten. Diese Bedingung ist aber keine notwendige, besonders wenn es sich nur um die Erreichung eines bestimmten Masses von Genauigkeit handelt: es kann, wie bei semi-konvergenten Reihen, für ein bestimmtes m ein Optimum der Annäherung stattfinden.

Bei numerischen Anwendungen hat man meist nicht dafür zu sorgen, dass der gemachte Ansatz

$$a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n \tag{21}$$

jede Funktion *beliebig genau* interpoliere, sondern dass er eine Funktion von der Art der gesuchten Lösung, und mit der vorgeschriebenen Genauigkeit, darzustellen imstande sei.

Aus dem Umstande, dass das Integral (18) mit wachsendem m unendlich klein wird, kann man natürlich keineswegs darauf schliessen, dass auch der Integrand $(\Delta\varphi_{mn})^2 = (\Delta w_{m+n} - \Delta w_m)^2$ diese Eigenschaft besitze, und somit dass die Ableitungen erster und zweiter Ordnung ebenfalls konvergieren. Allerdings wird man aber, bei Polynomen usw., in den in der Anwendung vorkommenden Fällen kaum auf Funktionen geführt werden, die in einzelnen Punkten endlich bleiben, im grössten Teil des Gebiets R aber unendlich klein werden, wie dies nötig ist, damit das Integral ebenfalls unendlich klein sei. Es wird vielmehr der Integrand selbst klein bleiben, und somit werden auch die ersten und zweiten Ableitungen durch $\frac{\partial w_m}{\partial x}, \ldots,$ beliebig angenähert dargestellt sein. Kann aber jede den Rand-und Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen innerhalb R durch einen Ausdruck der Form (21) und seine Ableitungen beliebig genau dargestellt werden, so kann die untere Grenze der $J_m^{(0)}$ nicht verschieden sein von der unteren Grenze von J für beliebige, den Bedingungen genügende Funktionen, und die Grenzfunktion w ist in diesem Falle die gesuchte Lösung.

Im folgenden werden wir durch Hinzuziehen der noch nicht benutzten Bedingung 3° Seite 201 den strengen Beweis erbringen, dass $\lim w_m$ die gesuchte Lösung ist. Diese Bedingung 3° fordert allerdings etwas mehr als für die numerischen Anwendungen im allgemeinen nötig ist.

Es lässt sich zunächst noch allgemein zeigen, dass, unter α, β ein innerer Punkt von R verstanden, auch die Grenzwerte existieren

$$\lim_{m=\infty} \frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^x w_m\,dx = \frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^x w\,dx,$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{\partial}{\partial x}\int_\beta^y w_m\,dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_\beta^y w\,dy.$$

Der Beweis beruht wieder darauf, dass

$$\int_\alpha^x \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dx, \qquad \int_\beta^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy,$$

in welchen die Integrationswege $\alpha \ldots x$, $\beta \ldots y$ innerhalb R liegen, infolge von (19) kleiner als bestimmte, von der Gestalt der Platte allein abhängige Zahlen bleiben. Denn man kann (20) unter dem Integralzeichen zuerst nach a integrieren, dann nach b differentiieren; nun ist

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_\alpha^a \log r \, da = \text{arc tang} \frac{a-x}{b-y} - \text{arc tang} \frac{\alpha-x}{b-y},$$

und zwar auch wenn der Integrationsweg durch den Punkt $x = a$, $y = b$ führt, falls nur a und α verschieden sind. Da die rechte Seite stets $< 2\pi$ bleibt, so folgt

$$\left|\frac{\partial}{\partial b}\int_\alpha^a \varphi(a, b)\, da\right| < \int\!\!\int_R |\Delta\varphi| \, dS.$$

Man zerlege wieder R in ein Gebiet D, in welchem $|\Delta\varphi| \leqq 1$, und ein solches D′, in welchem $|\Delta\varphi| > 1$ ist; dann folgt

$$\int\!\!\int_D |\Delta\varphi| \, dS < \int\!\!\int_D dS < \text{Oberfläche von R},$$

$$\int\!\!\int_{D'} |\Delta\varphi| \, dS < \int\!\!\int_{D'} |\Delta\varphi|^2 \, dS < 1,$$

somit

$$\left|\frac{\partial}{\partial b}\int_\alpha^a \varphi(a, b)\, da\right| < 1 + \text{Oberfläche von R},$$

womit, wie oben, der Konvergenzsatz für

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^x w_m \, dx, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\int_\beta^y w_m \, dy$$

bewiesen ist. Dass die entsprechenden Grenzfunktionen von

$$(22) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^x w \, dx, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\int_\beta^y w \, dy$$

nicht verschieden sind, und somit, wenn auch vielleicht nicht w, so doch über w erstreckte Integrale erste Ableitungen besitzen, ist unmittelbar einleuchtend, da wegen der *Gleichförmigkeit* der Konvergenz für jedes Rechteck innerhalb R

$$\int_\beta^y dy \lim_{m=\infty} \int_\alpha^x \frac{\partial w_m}{\partial y} dx = \lim_{m=\infty} \int_\alpha^x [w_m(x,y) - w_m(x,\beta)]\, dx$$
$$= \int_\alpha^x [w(x,y) - w(x,\beta)]\, dx.$$

Da der Differentialquotient nach y der linken Seite

$$\lim_{m=\infty} \int_\alpha^x \frac{\partial w_m}{\partial y} dx$$

existiert, folgt, dass auch $\int_\alpha^x w(x,y)\, dx$ nach y differentiierbar und gleich dem gesuchten Grenzwert ist. Doch darf möglicherweise die Reihenfolge der Differentiation und Integration in (22) nicht vertauscht werden.

Ebenso folgt allgemeiner aus

$$\left| \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \right| = \left| \int\int_R \Delta\varphi\, dS \right| \leqq \int\int_R |\Delta\varphi|\, dS \leq \text{bestimmte Zahl}$$

durch Anwendung auf ein innerhalb R liegendes Gebiet, welches durch ein Kurvenstück l und zwei Parallelen zu den Achsen begrenzt wird, dass

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds < \text{bestimmte Zahl}$$

ist, da gleiches für die Parallelen zu den Achsen schon gezeigt worden ist. Dabei kann auch l ein Teil von L sein. Es existiert also auch die Grenze

$$\lim_{m=\infty} \int_l \frac{\partial w_m}{\partial n} ds$$

und sie ist gleich Null auf L, da hier $\frac{\partial w_m}{\partial n} = 0$ ist für jedes m.

§ 4.

Es ist nun zu zeigen, dass, wenn man über die ψ_i die in § 2 unter 3° gemachte Voraussetzung heranzieht, die *Grenzfunktion w wirklich die gesuchte Lösung ist.* Zu diesem Zweck bediene ich mich der von Herrn Hilbert ([1]) angegebenen Variationsmethode, in etwas veränderter Gestalt.

Seien (α, β), (x, y) innere Punkte, und sei

$$U_m(x, y) = \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\beta^y \int_\beta^y \int_\beta^y w_m(x, y)\, dx^3\, dy^3;$$

$$F = \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\beta^y \int_\beta^y \int_\beta^y f(x, y)\, dx^3\, dy^3,$$

woraus

$$\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3\, \partial y^3} = w_m, \qquad \frac{\partial^6 F}{\partial x^3\, \partial y^3} = f.$$

Das rechteckige Integrationsgebiet kann zum Teil über R hinausragen: wir haben bisher w_m und f nur innerhalb R definiert, und setzen nun fest, dass bei dieser Integration ausserhalb R überall

$$w_m = 0, \qquad f = 0$$

sei; die Funktion w_m und ihre Ableitungen $\frac{\partial w_m}{\partial x}$, $\frac{\partial w_m}{\partial y}$ sind somit in der ganzen Ebene stetig, da sie auf dem Rande L verschwinden.

Nach den Sätzen von § 3 konvergieren für $m = \infty$ sowohl U_m wie seine Ableitungen bis zur 4. Ordnung einschl. gleichmässig gegen stetige Funktionen $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \ldots \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$. Gleiches gilt noch von $\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^4\, \partial y^2}, \frac{\partial^6 U_m}{\partial y^4\, \partial x^2}, \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^4\, \partial y}, \frac{\partial^5 U_m}{\partial y^4\, \partial x}$. Die Ableitungen $\frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4\, \partial y^3} = \frac{\partial w_m}{\partial x}$, $\frac{\partial^7 U_m}{\partial y^4\, \partial x^3} = \frac{\partial w_m}{\partial y}$, $\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3\, \partial y^3} = w_m$ sind auf L gleich Null.

Die Gleichung (13) lässt sich nun schreiben

$$(23)\quad 0 = \iint_R \left[\left(\frac{\partial^8 U_m}{\partial x^5\, \partial y^3} + \frac{\partial^8 U_m}{\partial x^3\, \partial y^5}\right)\left(\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^6 F}{\partial x^3\, \partial y^3}\zeta_m\right] dS.$$

([1]) D. Hilbert, *Das Dirichletsche Prinzip*, a. a. O.

Über die Konvergenz der Ableitungen, die in diese Formel eintreten, wissen wir nichts.

Durch partielle Integrationen, die den in der Variationsrechnung gebräuchlichen gewissermassen entgegengesetzt sind, transformieren wir daher diesen Ausdruck in die Summe eines Linienintegrals und eines Flächenintegrals der Form

$$(24)\qquad \iint_{R} (\Delta\Delta U_m - F)\frac{\partial^6 \zeta_m}{\partial x^3\,\partial y^3}\,dS.$$

Hierbei gibt das Glied $\frac{\partial^8 U_m}{\partial x^5\,\partial y^3}\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x^2}$ von (23) das Linienintegral

$$\int_L \left[\frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4\,\partial y^3}\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x^2}\cos n x + \left(-\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^4\,\partial y^2}\frac{\partial^3 \zeta_m}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^4\,\partial y}\frac{\partial^4 \zeta_m}{\partial x^3\,\partial y} - \frac{\partial^4 U_m}{\partial x^4}\frac{\partial^5 \zeta_m}{\partial x^3\,\partial y^2}\right)\cos(n,y)\right] ds,$$

in welchem das erste Glied gleich Null ist, während die andern in diesem Ausdruck vorkommenden Ableitungen von U_m konvergieren.

Das Glied $\frac{\partial^8 U_m}{\partial x^5\,\partial y^3}\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial y^2}$ gibt

$$\int_L \left[\left(\frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4\,\partial y^3}\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial y^2} - \frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3\,\partial y^3}\frac{\partial^3 \zeta_m}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^2\,\partial y^3}\frac{\partial^4 \zeta_m}{\partial x^2\,\partial y^2}\right)\cos(n,x) - \frac{\partial^4 U_m}{\partial x^2\,\partial y^2}\frac{\partial^5 \zeta_m}{\partial x^3\,\partial y^2}\cos(n,y)\right] ds,$$

und es gilt dieselbe Bemerkung für dieses und ebenso für die anderen Glieder. Im übrigen treten nur die Hauptableitungen von ζ_m auf. Im Flächenintegral (24), welches sich durch diese Umformungen ergibt, konvergieren ebenfalls alle Ableitungen von U_m. Von ζ_m und seinen Hauptableitungen endlich dürfen wir nach Voraussetzung (3°) in § 2 annehmen, dass sie gegen die dort definierte Funktion ζ und ihre Hauptableitungen gleichmässig konvergieren, wobei die Wahl von ζ noch willkürlich bleibt. Unter diesen Umständen können wir zur Grenze $m = \infty$ übergehen. Nach der Definition von ζ verschwindet das Randintegral, und es bleibt

$$(25)\qquad \iint_{R} (\Delta\Delta U - F)\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3\,\partial y^3}\,dS = 0.$$

Auf dieses Integral lässt sich unmittelbar der Hilbertsche Hülfssatz (a. a. O. § 4) anwenden. Dieser Satz besagt folgendes. Wenn φ eine Funktion von x und y ist, die innerhalb eines Rechtecks ρ den Bedingungen genügt :

1°. Sie ist, nebst ihren Hauptableitungen innerhalb ρ und auf dessen Seiten endlich und stetig.

2°. Auf den Seiten, die parallel der x-Achse sind, ist $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$; auf denjenigen, die parallel y sind, ist $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$ und, wenn ferner $F(x, y)$ eine Funktion bezeichnet, die in ρ einschliesslich der Seiten stetig verläuft, und endlich das über ρ erstreckte Integral

$$\int\int F \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^3 \partial y^3} dS$$

für alle diesen Bedingungen genügenden Funktionen φ verschwindet, so hat F notwendig die Form

$$F = X + X'y + X''y^2 + Y + Y'x + Y''x^2,$$

in welcher X, X′, X″ stetige Funktionen von x allein, Y, Y′, Y′ stetige Funktionen von y allein bezeichnen.

Diese Bedingungen decken sich aber mit den für ζ in § 2 angenommenen, da ζ und somit seine Ableitungen ausserhalb ρ identisch verschwinden, das Integral (25) also nur auf das Rechteck ρ ausgedehnt zu werden braucht. Ausserdem erfordert die dort vorausgesetzte Stetigkeit von ζ und seinen Hauptableitungen, dass diese auf dem Rand von ρ verschwinden. Aus der obigen Forderung 2° ergibt sich aber z. B. für die Seiten parallel der x-Achse aus $\varphi = 0$ auch $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$. $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0$ usw., und aus $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$. $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0$. $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} = 0$, woraus das Verschwinden aller Hauptableitungen mit Ausnahme von $\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^3 \partial y^3}$ auf dem Rande des Rechtecks sich ergibt. Zum Beweise des Satzes benutzt aber Herr Hilbert nur eine spezielle Form von φ, für welche auch $\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^3 \partial y^3} = 0$ ist am Rande, und ferner die weiteren Ableitungen endlich, wenn auch unstetig sind. Diese beschränkenden Voraus-

setzungen über φ dürfen also hinzugefügt werden, wodurch die über φ und über ζ gemachten Annahmen identisch werden, und es folgt für das Rechteck ρ, dessen Seiten $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$ seien

$$(26)\quad \Delta\Delta U - F = X(x) + y X'(x) + y^2 X''(x) + Y(y) + x Y' y + x^2 Y''(y).$$

Sei endlich

$$V = U - \int_a^x \int_a^x \int_a^x \int_a^x dx^4 (X + y X' + y^2 X'')$$
$$- \int_b^y \int_b^y \int_b^y \int_b^y dy^4 (Y + x Y' + x^2 Y'')$$
$$+ 2 \int_{a^{(6)}}^x X'' dx^6 + 2 \int_{b^{(6)}}^y Y'' dy^6,$$
$$(a \leqq x < a',\ b \leqq y \leqq b')$$

so ergibt sich

$$(27)\qquad \Delta\Delta V = F(x, y)$$

innerhalb ρ, wobei V und seine Ableitungen der ersten, zweiten, dritten und vierten Ordnung innerhalb ρ und auf dessen Rande stetig und endlich sind. Man hat also

$$(28)\qquad V(\xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi} \int_\rho \int r^2 \log r \, F(x, y)\, dx\, dy + T,$$

wo T ein Linienintegral ist, welches als Funktion des innerhalb ρ gelegenen Punktes (ξ, η) betrachtet eine analytische Funktion ist, die der Gleichung $\Delta\Delta T = 0$ genügt.

§ 5.

Wir können nun leicht beweisen, dass w wirklich die gesuchte Lösung ist, indem wir uns auf die Stetigkeitseigenschaften der Integrale partieller Differentialgleichungen stützen, die im vorliegenden Falle aus den in § 1 angeführten Greenschen Sätzen sich ergeben. Denn da F nebst seinen Hauptableitungen, nach Definition, stetig und endlich ist, so lässt sich die Grösse $\frac{\partial^6 V}{\partial \xi^3 \partial \eta^3}$ durch die in § 1 angegebene Riemannsche Methode bilden, und es

wird

$$\frac{\partial^6 V}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} = \frac{\partial^6 U}{\partial \xi^3 \partial \eta^3} = w(\xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi} \int\int r^2 \log r f(x, y)\, dx\, dy + T_1,$$

wo T_1 wieder ein Linienintegral mit denselben Eigenschaften wie T bedeutet. Daraus folgt durch direkte Differentiation unter dem Integralzeichen, dass die Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von w existieren und stetig sind, und, wegen der vorausgesetzten Endlichkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, nach einer Transformation der in § 1 besprochenen Art, dass gleiches auch von den Ableitungen vierter Ordnung gilt. Endlich genügt $w(x, y)$ der Gleichung

$$\Delta\Delta w = f(x, y).$$

Da diese Sätze für jedes Rechteck ρ innerhalb R gelten, so gelten sie innerhalb der ganzen Platte R. Endlich ist, wie wir sahen, $w = \lim_{m=\infty} w_m = 0$ am Rande. Da ausserdem die Existenz von $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ innerhalb R bewiesen ist, so folgt aus den in § 3 bewiesenen Sätzen, dass für jedes Kurvenstück l innerhalb R der Limes

$$\lim_{m=\infty} \int_l \frac{\partial w_m}{\partial n} ds,$$

dessen Existenz wir bewiesen haben, mit $\int_l \frac{\partial w}{\partial n} ds$ zusammenfällt. Nähert l sich L und fällt mit einem Stück von L zusammen, so wird der Limes $= 0$, weil $\frac{\partial w_m}{\partial n} = 0$ für jedes m; es ist also wegen der durch die Gleichmässigkeit der Konvergenz bedingten Stetigkeit

$$\int \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0$$

für jedes noch so kleine Stück des Randes L; woraus folgt, dass $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ ist.

Die sukzessiven Approximationen w_m konvergieren also gleichmässig gegen eine Grenzfunktion w, welche den gestellten Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügt und die

partielle Differentialgleichung erfüllt

$$(5)\qquad \Delta\Delta w = f(x, y),$$

also die gesuchte Lösung ist.

Allerdings wissen wir nicht, ob auch $\lim\limits_{m=\infty} \frac{\partial w_m}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$, usw., d. h. ob auch die Ableitungen von w konvergieren. Dass die Konvergenz auch der zweiten Ableitungen bei der grösseren Anzahl der Anwendungen erwartet werden darf, ist schon bemerkt worden. Dagegen ist im allgemeinen kein Grund vorhanden, dass auch die vierten Ableitungen noch konvergieren sollten; wird somit im allgemeinen die Approximation w_m in (5) eingesetzt, so wird diese Gleichung bei wachsendem m nicht mit wachsender Genauigkeit erfüllt sein.

Damit ist also das Problem für alle diejenigen Fälle gelöst, in welchen man Funktionen ψ_i mit den geforderten interpolatorischen Eigenschaften angeben kann. Wir haben nun zu zeigen, wie dies unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Gestalt der Platte möglich ist, womit der allgemeine Existenzbeweis erbracht sein wird.

§ 6.

Sei

$$F(x, y) = 0$$

die Gleichung der Randkurve L. Diese Gleichung kann unter Umständen mehrere Kurven l definieren, von welchen ein Teil dem Rand nicht angehört. Dies wird der Fall sein, wenn der Rand etwa ein Polygon ist und F die Form hat

$$(29)\quad F_1 = (a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2)\ldots(a_r x + b_r y + c_r)$$

Die Geraden $a_i x + b_i y + c_i = 0$ werden nicht in ihrer ganzen Ausdehnung dem Rande angehören. Wir setzen voraus, dass F *innerhalb der Platte nicht verschwindet*, was für die spezielle Form (29) bedingt, dass das Polygon ein konvexes ist.

Ferner sollen F und seine Hauptableitungen in R und auf L endlich und stetig sein. Endlich soll auf dem Rande, wo $F = 0$ ist, auch $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ sein. Erfüllt F die vorangehenden Bedingungen, aber

nicht diese letzte, so wird F^2 alle Bedingungen erfüllen. Die weiteren Ableitungen $\frac{\partial^2 F}{\partial n^2}, \cdots$ sollen dagegen auf dem Rande nur in einzelnen Punkten verschwinden.

Diese Beschränkungen sind von geringer Bedeutung für die Anwendung auf physikalische Probleme. Bei stetig gekrümmter Randkurve wird F sie meist von vornherein erfüllen. Aber auch bei geradlinigen Polygonen und allgemeiner bei solchen Figuren, die durch mehrere Kurvenstücke begrenzt werden

$$f_1(x, y) = 0, \qquad f_2(x, y) = 0, \qquad \ldots \qquad f_r(x, y) = 0$$

wo $f_1, f_2, \ldots$ analytische Funktionen sind, wird

$$F = f_1^2 f_2^2 \cdots f_r^2$$

allen Anforderungen genügen, falls nur die Kurven $f_i = 0$, sofern sie nicht zum Rande gehören, *ausserhalb* der Platte verlaufen.

Bei *einspringenden* Winkeln, z. B. nichtkonvexen Polygonen, ist diese einfache Form von F nicht mehr anwendbar. Für ein *Sternpolygon*, dessen einspringende Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ mit ausspringenden $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ in der Reihenfolge $P_1\,Q_1\,P_2\,Q_2 \ldots$ abwechseln, setze man

$$F = r_1^6 r_2^6 \ldots r_n^6 \sin^2 \frac{\pi\varphi_1}{\alpha_1} \sin^2 \frac{\pi\varphi_2}{\alpha_2} \sin^2 \frac{\pi\varphi_3}{\alpha_3} \ldots \sin^2 \frac{\pi\varphi_n}{\alpha_n},$$

wobei r_i der Abstand des inneren Punktes (xy) vom Punkte P_i, α_i der Winkel $Q_{i+1}P_iQ_i$, und φ_i der Winkel $(xy)P_iQ_i$ ist. Bleibt (xy) *innerhalb* des Polygons oder auf dessen Rändern, so ist F eindeutig und erfüllt alle gestellten Bedingungen. Offenbar lassen sich solche Ausdrücke auch in allgemeineren Fällen einspringender Winkel aufstellen.

Ebenso bietet es keine Schwierigkeit, bei ringförmigen Gebieten usw., die Gleichung der Ränder auf diese Form zu bringen.

Um die *Existenz* solcher Funktionen F unter möglichst allgemeinen Bedingungen einzusehen, hat man sich nur zu erinnern, dass Herr H. A. Schwarz die Existenz der Fundamentallösung der Gleichung

$$\Delta u^2 + K^2 u = 0$$

unter der Bedingung, dass u auf dem Rande verschwindet und im

Innern nebst $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ endlich und stetig bleibt, unter bekannten Voraussetzungen sehr allgemeiner Art über die Gestalt des Gebietes R bewiesen hat. Diese Lösung entspricht dem Fundamentalton einer Membran von der gegebenen Gestalt; sie ist innerhalb R analytisch und verschwindet in keinem Punkte im Innern von R [1]. Es genügt also

$$F = u^2$$

allen gestellten Forderungen, falls seine Hauptableitungen auch auf L endlich und stetig bleiben. In singulären Punkten des Randes, insbesondere bei einspringenden Ecken, können allerdings $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ und die höheren Ableitungen unendlich werden. Sind $r_1, r_2, \ldots$ die Abstände eines inneren Punktes (x, y) von diesen singulären Punkten, so lassen sich dann stets ganze Zahlen p_1, $p_2, \ldots$ so bestimmen, dass

$$F = r_1^{p_1} r_2^{p_2} \ldots r_n^{p_n} u^2$$

nebst seinen Hauptableitungen auch in diesen Punkten endlich und stetig bleibt. Denn, wie man leicht einsieht, ist für ein Gebiet, welches gebildet wird durch einen Kreis vom Radius a und zwei von seinem Mittelpunkte ausgehende Radien, deren Winkel gleich α ist, u von der Form

$$u = \sin\frac{\pi\varphi}{\alpha} J_{\frac{\pi}{\alpha}}(kr),$$

wo J eine Besselsche Funktion bedeutet, k die kleinste Wurzel von

$$J_{\frac{\pi}{\alpha}}(ka) = 0$$

ist, und r, φ die Polarkoordinaten eines inneren Punktes in bezug auf den Mittelpunkt als Pol und einen der zwei Radien als Achse. Somit ist, in der Nähe des Mittelpunktes,

$$u = \sin\frac{\pi\varphi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}}(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots),$$

---

[1] H.-Weber, *Math. Annalen*, t. I, 1868.

und für $\alpha > \pi$, wo der Winkel ein *einspringender* wird, werden $\frac{\partial u}{dx}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ unendlich, aber nur wie die Potenz $\frac{\pi}{\alpha} - 1$ von r. Dieser Satz lässt sich leicht auf die Entwickelung von u in der Nähe eines Eckpunktes, in welchem zwei analytische Kurven zusammenstossen, erweitern. Damit ist die Existenz von F für eine beliebige, aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven zusammengesetzte Begrenzung erwiesen.

Für die Anwendung wird man allerdings von dieser Konstruktion von F keinen Gebrauch machen.

§ 7.

Sei ζ die in § 2 unter 3° definierte Funktion. Wir setzen die Platte R in das Innere eines Vierecks Q, dessen Seiten gleich a sind. Die Funktion

$$\frac{\zeta}{F} = P(x, y)$$

ist nur innerhalb eines ganz im Innern von R gelegenen Rechtecks ρ von übrigens willkürlicher Lage und Grösse von Null verschieden. In diesem Rechteck bleibt sie stetig und endlich nebst ihren Hauptableitungen. Auf dem Rande L von R und auf den (ausserhalb R gelegenen) Kurvenstücken, auf welchen F verschwindet und somit $P = \frac{0}{0}$ wird, versagt zunächst die Definition. Soll P stetig sein, so ist auch hier der Wert Null zu wählen, was wir im folgenden voraussetzen.

Unter diesen Umständen wird man P und seine Hauptableitungen innerhalb des ganzen Vierecks Q durch Fourier-Reihen und analoge Entwickelungen darstellen können. Denn werden zwei Seiten von Q als Koordinatenachsen gewählt, und wird die Funktion P ausserhalb Q so fortgesetzt gedacht, dass sie ungerade ist in x und in y, so wird

$$P = \sum_1^\infty \sum_1^\infty b_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a},$$

$$b_{mn} = \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a P(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}\, dx\, dy.$$

Man erhält die Hauptableitungen dieser Reihe durch *gliedweise Differentiation*. Denn, da P nebst seinen Ableitungen für $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = a$ verschwindet, ergibt sich durch partielle Integrationen

$$b_{mn} = \frac{4a^4}{\pi^6 m^3 n^3} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial^6 P}{\partial x^3 \partial y^3} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} dx\, dy.$$

Die gleichmässig konvergente Entwickelung von $\frac{\partial^6 P}{\partial x^3 \partial y^3}$ ist aber

$$\frac{\partial^6 P}{\partial x^3 \partial y^3} =$$

$$\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{4}{a^2} \left(\int_0^a \int_0^a \frac{\partial^6 P}{\partial x^3 \partial y^3} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} dx\, dy \right) \times \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{a},$$

sodass durch gliedweise Differentiation in der Tat der richtige Ausdruck sich ergibt. Dies würde im allgemeinen nicht der Fall sein, wenn die Ableitungen auf den Seiten von Q nicht verschwänden. Für *eine* Variable ist diese Abschätzung der Koeffizienten wohlbekannt.

Setzen wir

$$\psi_{mn} = F \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

so werden Ausdrücke der Form

$$\sum_1^M \sum_1^M b_{mn} \psi_{mn}$$

und ihre gliedweise genommenen Hauptableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} \sum b_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} + \frac{F\pi}{a} \sum m b_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a},$$

u. s. w., gleichmässig für $m = \infty$ gegen ζ und seine Hauptableitungen konvergieren; die Funktionen ψ_{mn} verschwinden ferner auf dem Rand, nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial \psi_{mn}}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi_{mn}}{\partial y}$. *Die Funktionen ψ_{mn} genügen somit allen den Funktionen ψ_i in § 2 auferlegten Bedingungen.* Den Grenzfall, dass ρ mit dem Rande L einzelne Punkte oder Strecken gemeinsam hat, brauchen wir nicht in Betracht zu ziehen. Denn wir haben beim Beweise für die *gleichmässige* Konvergenz von w_m in R und auf L die Bedin-

gung 3° in § 2 nicht vorausgesetzt. Aus dieser gleichmässigen Konvergenz folgt aber, dass wenn $\lim\limits_{m=\infty} w_m = w$ die gesuchte Lösung ist, dieselbe auf dem Rand verschwindet, wie ja vorgeschrieben ist, nebst $\frac{\partial w}{\partial n}$. Dass die weiteren Ableitungen stetig und die Differentialgleichung erfüllt ist, braucht nur für *innere* Punkte gezeigt zu werden.

Es ist aber leicht einzusehen, dass selbst, wenn der Rand von ρ zum Teil mit L koinzidiert, ζ / F hier gegen Null konvergiert. Denn in unmittelbarer Nähe eines Punktes des geradlinigen Randstücks, das wir vorübergehend als x-Achse betrachten, ist die abteilungsweise analytische Funktion ζ von der Form

$$\zeta = y^3 \text{ mal einer Potenzreihe in } x, y,$$

weil für $y = 0$ identisch $\zeta = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0$ sein muss. Dagegen verschwindet die ebenfalls abteilungsweise analytische Funktion F, wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \neq 0$ nach Voraussetzung (ausser vielleicht in einzelnen Punkten), nur wie $y^2 \times$ Potenzreihe. Somit ist $\frac{\zeta}{F}$, einzelne Punkte vielleicht ausgenommen, auf L gleich Null, und die Ableitungen stetig und endlich. Die oben für $\frac{\zeta}{F}$ aufgestellte Fourier-Reihe gilt also auch in diesem Falle, und die ebengenannten singulären Punkte allein müssen eventuell an dem Rande von ρ ausgeschlossen werden.

§ 8.

Man kann die trigonometrischen Reihen des vorigen Paragraphen durch andere Reihen, z. B. Entwickelungen nach Polynomen, ersetzen. Da sich jede Potenz von x durch Legendresche Polynome P_m (einfache Kugelfunktionen) linear in bekannter Weise [1]

---

[1] LEGENDRE, *Exercices*, t. II, p. 352. Es ist

$$x^n = \frac{1.2\ldots n}{3.5\ldots 2n-1}\left[P_n(x) + \frac{2n-3}{2} P_{n-2}(x) + \frac{(2n-7)(2n-1)}{2.4} P_{n-4}(x) + \ldots\right]$$

darstellen lässt und umgekehrt, ist es gleichgültig, ob man setzt

$$(31)\quad \psi_{mn} = \left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{a}\right)^n \mathrm{F} \qquad \text{oder} \qquad \psi_{mn} = \mathrm{P}_m\left(\frac{2x}{a}\right)\mathrm{P}_n\left(\frac{2y}{a}\right)\mathrm{F},$$

unter a wieder die Seite des Quadrats Q verstanden. Wir benutzen die letztere Form und setzen der Einfachheit halber $a = 2$. Wenn

$$(32)\quad f(x) = \sum_0^\infty \mathrm{A}_n \mathrm{P}_n(x), \qquad \mathrm{A}_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{P}_n(x)\,dx,$$

so ist diese Entwickelung gleichmässig konvergent von -1 bis $+1$, wenn f stetig und endlich ist und nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima in diesem Gebiet besitzt. Die gliedweise Integration von -1 bis x gibt, wegen der Formeln

$$\frac{d\mathrm{P}_{n+1}}{dx} - \frac{d\mathrm{P}_{n-1}}{dx} = (2n+1)\mathrm{P}_n, \qquad \mathrm{P}_{n+1}(-1) - \mathrm{P}_{n-1}(-1) = 0;$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{x} f(x)\,dx &= \sum_0^\infty \frac{\mathrm{A}_n}{2n+1}\int_{-1}^{x}\left(\frac{d\mathrm{P}_{n+1}}{dx} - \frac{d\mathrm{P}_{n-1}}{dx}\right)\\ &= \sum_0^\infty \frac{\mathrm{A}_n}{2n+1}\left[\mathrm{P}_{n+1}(x) - \mathrm{P}_{n-1}(x)\right]\\ &= \sum_0^\infty \left(\frac{\mathrm{A}_{n-1}}{2n-1} - \frac{\mathrm{A}_{n+1}}{2n+1}\right)\mathrm{P}_n(x),\end{aligned}$$

also wieder eine gleichmässig konvergente Reihe von derselben Form. Umgekehrt kann man also auch die Reihe (32) gliedweise differentiieren, wenn $f'(x)$ denselben Bedingungen genügt wie $f(x)$. Dieser Satz lässt sich sofort auf mehrere Variable ausdehnen. Der allgemeinere Satz : Wenn $f, \frac{\partial f}{\partial x}\cdots, \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\,\partial y^n}$ in Reihen von Polynomen in x, y, entwickelbar sind, welche gleichmässig konvergieren, so ist f selbst in eine solche Reihe entwickelbar, welche m mal nach x, und n mal nach y gliedweise differentiiert werden darf, folgt unmittelbar aus dem Umstand, dass durch gliedweise Integration jeder dieser Reihen von o bis x oder o bis y wieder Polynomreihen entstehen, da $\left(\frac{\partial^{m+n-1} f}{\partial x^{m-1}\,\partial y^n}\right)_{x=0}$ usw. nach Voraussetzung in solche entwickelbar sind.

Sei also innerhalb Q

$$\frac{\zeta(x,y)}{F(x,y)} = f(x,y) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty A_{mn} P_m(x) P_n(y),$$

dann wird die Reihe, nach den über ζ, F gemachten Voraussetzungen, innerhalb jedes inneren Rechtecks ρ nebst ihren Hauptableitungen gleichmässig konvergieren, und es lässt sich somit ζ durch eine Summe der Form

$$\sum_0^M \sum_0^M A_{mn} F P_m(x) P_n(y)$$

nebst seinen Hauptableitungen beliebig genau darstellen. Die in (31) definierten Grössen ψ_{mn} genügen also allen Voraussetzungen.

Die Anwendung von Polynomen wird besonders zweckmässig bei konvexen Polygonen. Hier kann, wie wir gesehen haben, für F ebenfalls ein Polynom gesetzt werden, und alle durch die Methode verlangten Quadraturen können explizite ausgeführt werden. Für ein Rechteck z. B. wird also w_m in der Form anzusetzen sein

$$(33) \qquad w_{mn} = \sum_0^{mn} a_{mn}(x-a)^2(x-a')^2(y-b)^2(y-b')^2 x^m y^n,$$

wo $x = a$, $x = a'$; $y = b$, $y = b'$ die Gleichungen der Seiten des Rechtecks sind.

Besteht die gegebene Figur allgemeiner aus vier Kurvenstücken eines Orthogonalsystems

$$f_1(x,y) = \text{konst.} = s_1, \qquad f_2(x,y) = \text{konst.} = s_2,$$

die den Werten s'_1, s'_2, s''_1, s''_2 der Parameter s entsprechen, so wird man die s_i als neue Variable einführen, wodurch das vorgelegte Kurvenrechteck auf ein gewöhnliches Rechteck abgebildet wird, und der Ansatz (33) anwendbar bleibt, wenn man x durch s_1, a durch s'_1, a' durch s''_1 usw. ersetzt. Allerdings wird der Integrand der potentiellen Energie J seine Gestalt ändern und eine allgemeinere quadratische Form der Differentialquotienten $\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2}$ usw. werden, mit variablen Koeffizienten. Dadurch wird aber

die Anwendung der Methode keineswegs verändert. Die Koeffizienten der linearen Gleichungen, welche die unbekannten Grössen a_i bestimmen, lassen sich in jedem numerisch gegebenen Spezialfall durch mechanische Quadratur beliebig genau finden, *da sie von keinerlei veränderlichem Parameter abhängen;* und die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen wird nach wie vor durch den Umstand bedingt, dass die quadratische Form definit ist. Dass auch der Konvergenzbeweis sich in ähnlicher Weise führen lässt, wird man an dem unten zu behandelnden Beispiel gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten erkennen.

Eine praktisch brauchbare Lösung partieller Differentialgleichungen setzte bisher meist die Auffindung gewisser, in Faktoren zerlegbarer Elementarlösungen voraus, aus deren Summation allgemeinere gebildet wurden und die nur in besonderen Fällen existieren. *Durch die Behandlung des speziellen Falles einer viereckigen Platte werde ich nun zeigen, dass auch, wenn solche Lösungen nicht bekannt sind, die neue Methode den wichtigen Vorteil bietet, numerisch brauchbare Resultate zu geben.*

§ 9.

Wir wollen die in den vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Methode auf eine rechteckige Platte anwenden, wobei wir für die ψ_i einen neuen, von (33) verschiedenen Ansatz machen. Wir bemerken zunächst, dass die klassische Methode, die von einem Produkt $X(x)\,Y(y)$ auszugehen hätte, hier, wie man leicht übersieht, versagt. Dagegen führt die physikalische Analogie von selbst zu Funktionen, die die Eigenschaften der ψ_i besitzen : die Betrachtung eines an beiden Enden eingeklemmten, elastischen Stabes, gewissermassen das Analogon zum vorgelegten Problem in *einer* Dimension, wird uns die gewünschten ψ_i in zweckmässiger Form liefern.

Sei u die transversale Verschiebung, a die Länge des Stabes; dann ist für $x = 0$ und $x = a$, $u = 0$, und $\frac{du}{dx} = 0$. Die Eigenschwingungen des Stabes genügen bekanntlich der Differential-

gleichung

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = u\lambda^4,$$

wozu man noch, wegen der Homogenität des Systems, die Bedingung

$$\int_0^a u^2\,dx = a$$

setzen kann : die Lösungen sind dann bis auf das Vorzeichen bestimmt, und es existieren deren für eine unendliche Anzahl von Werten von λ, nämlich für alle Wurzeln K_n der Gleichung

$$(34) \qquad \cos K\,\mathfrak{ch}\,K = 1, \qquad \lambda_n = \frac{K_n}{a}.$$

Die zugehörigen Lösungen sind, unter $\mathfrak{sh}\,x$, $\mathfrak{ch}\,x$ die hyperbolischen Sinus und Kosinus verstanden,

$$(35) \quad \xi_n(x) = \frac{\left(\cos\frac{K_n x}{a} - \mathfrak{ch}\frac{K_n x}{a}\right)(\sin K_n - \mathfrak{sh}\,K_n) - \left(\sin\frac{K_n x}{a} - \mathfrak{sh}\frac{K_n x}{a}\right)(\cos K_n - \mathfrak{ch}\,K_n)}{\sin K_n - \mathfrak{sh}\,K_n}.$$

Die Wurzeln von (34) sind wenig verschieden von $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, und zwar um so weniger, je grösser n ist. Sie sind von Lord Rayleigh [1] berechnet worden :

$$K_1 = \frac{3\pi}{2} - 0,01765 = 4,7300, \qquad K_2 = \frac{5\pi}{2} - 0,00078 = 7,8532,$$

$$K_3 = \frac{7\pi}{2} - 0,00003 = 10,9956, \qquad K_4 = \frac{9\pi}{2} = 14,1372,$$

$$K_5 = \frac{11\pi}{2} = 17,2787, \qquad K_6 = \frac{13\pi}{2} = 20,4203, \quad \text{u. s. w.}$$

Man hat

$$\frac{d^4\xi_n}{dx^4} = \frac{K_n^4}{a^4}; \qquad \int_0^a \xi_n \xi_m\,dx = 0 \quad (n \neq m) \qquad \int_0^a \xi_m^2\,dx = a.$$

Die Lösung ξ_1 verschwindet nicht zwischen o und a; ξ_2 besitzt *einen* Knoten, usw.

---

[1] Lord RAYLEIGH, *Theory of Sound*, § 174.

Ebenso wie die Lösungen des Systems $\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda u$, $u(0) = u(a) = 0$, nämlich sin und cos, zu Entwickelungen nach trigonometrischen Reihen führen, ist auch jede willkürliche Funktion $f(x)$ zwischen 0 und a wenigstens formal nach der Formel

$$f(x) = a_1 \xi_1(x) + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + \ldots \tag{36}$$

entwickelbar; durch Multiplikation mit $\xi_n(x)$ und Integration von 0 bis a findet man

$$a_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \xi_n(x) \, dx. \tag{37}$$

Die Konvergenz von (36) lässt sich für die hier in Betracht kommenden Fälle leicht erweisen. Es genüge die Funktion $f(x)$ folgenden Bedingungen :

1°. Sie ist endlich und stetig, nebst ihren Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von 0 bis a; die Ableitung vierter Ordnung bleibt endlich und besitzt nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima.

2°. Für $x = 0$ und $x = a$ verschwinden f und $\frac{df}{dx}$.

Dann ist die Reihe (36) absolut und gleichmässig konvergent und kann wenigstens 3 mal gliedweise differentiiert werden, ohne dass die Konvergenz aufhört, eine absolute und gleichmässige zu sein.

Durch partielle Integration findet man nämlich

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a^3}{\mathrm{K}_n^4} \int_0^a f \frac{d^4 \xi_n}{dx^4} dx \\ &= \frac{a^3}{\mathrm{K}_n^4} \left(f \frac{d^3 \xi_n}{dx^3} - \frac{df}{dx} \frac{d^2 \xi_n}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d\xi_n}{dx} - \frac{d^3 f}{dx^3} \xi_n \right)_0^a \\ &\quad + \frac{a^3}{\mathrm{K}_n^4} \int_0^a \frac{d^4 f}{dx^4} \xi_n \, dx. \end{aligned} \tag{38}$$

Da f, $\frac{df}{dx}$, ξ_n, $\frac{d\xi_n}{dx}$ an den Endpunkten verschwinden, so verschwindet die Klammer. Nach dem zweiten Mittelwertsatz aber, wenn den Werten $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ die Maxima und Minima von $\frac{d^4 f}{dx^4}$

entsprechen, gilt

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{d^4 f}{dx^4}\xi_n\,dx = \left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right)_{x=\alpha_i}\int_{\alpha_i}^{\alpha'_i}\xi_n\,dx + \left(\frac{d^4 f}{dx^4}\right)_{x=\alpha_{i+1}}\int_{\alpha'_i}^{\alpha_{i+1}}\xi_n\,dx$$

$$(0 < \alpha_i < \alpha'_i < \alpha_{i+1} < a).$$

und entsprechende Formeln gelten für die Intervalle $0 \ldots \alpha_1$, $\ldots \alpha_p \ldots a$.

Nach (35) aber ist

$$\left|\int_{\alpha_i}^{\alpha'_i}\xi_n\,dx\right| < \frac{A}{K_n},$$

wo A eine bestimmte, von n, α_i, α'_i unabhängige Zahl ist. Somit, falls L der grösste Wert von $\frac{d^4 f}{dx^4}$ im Intervall $0 \ldots a$ bedeutet,

$$\left|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}\frac{d^4 f}{dx^4}\xi_n\,dx\right| < \frac{2LA}{K_n}$$

und

$$\left|\int_0^a \frac{d^4 f}{dx^4}\xi_n\,dx\right| < \left|\int_0^{\alpha_1}\right| + \left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\right| + \ldots + \left|\int_{\alpha_p}^{a}\right| < \frac{2LA(p+2)}{K_n},$$

somit, unter B eine bestimmte Zahl verstanden,

$$|a_n| < \frac{B}{K_n^5}.$$

Nun ist aber $K_n = (n+\frac{1}{2})\pi + \varepsilon_n$, wo ε_n mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert; die Reihe (36) konvergiert somit wie

$$\sum \frac{1}{n^5},$$

also sehr rasch. Die Ableitungen, nach (35) gebildet, konvergieren langsamer: die erste wie $\sum \frac{1}{n^4}$, die zweite wie $\sum \frac{1}{n^3}$, die dritte wie $\sum \frac{1}{n^2}$; also auch hier noch ist die Konvergenz eine absolute und gleichmässige, womit der Satz bewiesen ist.

§ 10.

Der eben bewiesene Satz lässt sich leicht auf Funktionen zweier Variablen ausdehnen. Sei $f(x, y)$ eine endliche, stetige Funktion;

gleiches gelte von ihren Hauptableitungen und von $\frac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3}$, $\frac{\partial^7 f}{\partial x^3 \partial y^4}$, und zwar innerhalb und auf dem Rande eines Rechtecks R, dessen Seiten $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = b$ seien; ferner seien f und $\frac{\partial f}{\partial n}$, somit $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, auf dem Rande gleich Null. Die Funktion f ist dann in die absolut und gleichmässig konvergente Reihe

$$f = \sum_1^\infty \sum_1^\infty a_{mn}\, \xi_m(x)\, \eta_n(y) \tag{39}$$

entwickelbar, und man erhält ihre Hauptableitungen durch gliedweise Differentiation dieser Reihe. Die Funktionen ξ_m sind wie oben durch (35) definiert, und die η_n erhält man hieraus durch Vertauschung von x mit y, a mit b, m mit n.

Man findet zunächst

$$a_{mn} = \frac{1}{ab} \int\int_R f\, \xi_m\, \eta_n\, dx\, dy,$$

woraus wieder durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
a_{mn} = & \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^a \int_0^b f \frac{d^4 \xi_m}{dx^4} \frac{d^4 \eta_n}{dy^4}\, dx\, dy \\
= & \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^b dy \left(f \frac{d^3 \xi_m}{dx^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 \xi_m}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d \xi_m}{dx} \right)_{x=0}^{x=a} \frac{d^4 \eta_n}{dy^4} \\
& + \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^a dx \frac{d\xi_m}{dx} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{d^3 \eta_n}{dy^3} - \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} \frac{d^2 \eta_n}{dy^2} - \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2} \frac{d \eta_n}{dy} \right)_{y=0}^{y=b} \\
& - \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^b \left(\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3} \xi_m \right)_0^a \frac{d \eta_n}{dy}\, dy \\
& - \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^a \left(\frac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3} \xi_m \eta_n \right)_0^b dx \\
& + \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int\int_R \frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} \xi_m \eta_n\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Aus $f(x, 0) \equiv 0$ folgt $\frac{\partial^3 f(x, 0)}{\partial x^3} \equiv 0$, und weitere ähnliche Gleichungen; da ferner $\xi_m(0) = \left(\frac{d \xi_m}{dx}\right)_0 = 0$, usw., verschwinden die einfachen Integrale, und es bleibt

$$a_{mn} = \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^b \int_0^\alpha \frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} \xi_m \eta_n\, dx\, dy.$$

Unter sehr allgemeinen Umständen ist dieses Doppelintegral wieder der Form $\frac{\text{endl. Zahl}}{K_m K_n}$; insbesondere gilt dies, wenn $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$, $\frac{\partial^9 f}{\partial x^4 \partial y^5}$ stetig und $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}$ endlich bleibt, wie man durch eine neue partielle Integration leicht einsieht. Damit ist aber gezeigt, dass auch die gliedweise genommenen Hauptableitungen von (39) absolut und gleichmässig konvergieren, *und dass somit die Funktionen $\xi_m \eta_n = \psi_i(x, y)$ alle den ψ_i auferlegten Bedingungen genügen* (die Funktion ζ in § 2 darf auch den zuletzt für f gestellten Bedingungen ohne Einschränkung der Gültigkeit der früher gegebenen Beweise unterworfen werden).

§ 11.

Wir haben also einfach einen Ausdruck der Form

$$w_{MN} = \sum_1^M \sum_1^N a_{mn}\, \xi_m(x)\, \eta_n(y)$$

in das Integral J (§ 1) einzusetzen und erhalten

$$(40) \qquad J_{MN} = \int\!\!\int_R \left[\frac{1}{2} (\Delta w_{MN})^2 - f(x, y)\, w_{MN} \right] dx\, dy.$$

Diese Funktion zweiten Grades der a_{mn} haben wir zu einem Minimum zu machen. Es ist also

$$o = \frac{\partial J_{MN}}{\partial a_{\mu\nu}} = \int\!\!\int [\Delta w_{MN}\, \Delta(\xi_\mu \eta_\nu) - f \xi_\mu \eta_\nu]\, dx\, dy$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, M;\ \nu = 1, 2, \ldots, N),$$

oder

$$(41) \qquad o = \int\!\!\int (\Delta\Delta w_{MN} - f)\, \xi_\mu \eta_\nu\, dx\, dy.$$

Es ist

$$\Delta\Delta w_{MN} = \sum_1^M \sum_1^N a_{mn} \left[\left(\frac{K_m^4}{a^4} + \frac{K_n^4}{b^4} \right) \xi_m \eta_n + 2 \xi_m'' \eta_n'' \right].$$

Sei

$$\sigma_{mn} = a \int_0^a \xi_m \xi_n''\, dx,$$

so gilt, wenn man die Gleichung

$$\frac{d^4 \xi_m}{dx^4} = \frac{K_m^4}{a^4} \xi_m$$

berücksichtigt, und partiell integriert, für $m \neq n$

$$\sigma_{mn} = \sigma_{nm} = \frac{a^3}{K_m^4 - K_n^4} (\xi_m''' \xi_n'' - \xi_m'' \xi_n''')_0^a.$$

Sei

$$\alpha_m = \frac{\cos K_m - \operatorname{ch} K_m}{\sin K_m - \operatorname{sh} K_m} \tag{42}$$

$$(\alpha_1 = 0,982\,50;\ \alpha_2 = 1,000\,78;\ \alpha_3 = 0,999\,97;\ \alpha_4 = 1,000\,00,\ \ldots),$$

so wird

$$\sigma_{nm} = \sigma_{mn} = \frac{4 K_m^2 K_n^2}{K_m^4 - K_n^4} [(-1)^{m+n} + 1] (K_m \alpha_m - K_n \alpha_n). \tag{43}$$

Für $m > 2$ und $n > 2$ ist auf $\frac{1}{10000}$ genau

$$\sigma_{mn} = \frac{4\pi \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 (m - n) [(-1)^{m+n} - 1]}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^4 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^4}.$$

Endlich ist

$$\sigma_{mm} = a \int_0^a \xi_m'' \xi_m \, dx = -\alpha_m^2 K_m^2 + 2 K_m \alpha_m \tag{44}$$

$$(\sigma_{11} = 12,302,\ \sigma_{22} = 46,052,\ \sigma_{33} = 98,904)$$

und für grössere m

$$\sigma_{mm} = -\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - (2m - 1)\pi.$$

Es ist offenbar σ_{mn} nur dann von Null verschieden, wenn m, n beide ungerade oder beide gerade sind. Die Gleichungen (41) lassen sich somit schreiben

$$\frac{2}{ab} \sum_1^{M}{}' \sum_1^{N}{}' a_{mn} \sigma_{m\mu} \sigma_{n\nu} + ab\, a_{\mu\nu} \left(\frac{K_\mu^4}{a^4} + \frac{K_\nu^4}{b^4} + \frac{2 \sigma_{\mu\mu} \sigma_{\nu\nu}}{a^2 b^2} \right) = f_{\mu\nu} \tag{45}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, M;\ \nu = 1, 2, \ldots, N),$$

$$f_{\mu\nu} = \int_0^b \int_0^a f \xi_\mu(x) \eta_\nu(y) \, dx \, dy.$$

Der Index $'$ an den Σ zeigt an, dass man die Glieder in $a_{\mu\nu}$ aus der Summe wegzulassen hat.

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems für wachsende Werte von M, N erhält man immer bessere Annäherungen $w_{\mathrm{M,N}}$, $w_{\mathrm{M+1,N}}$, ... an die gesuchte Funktion w. Der Koeffizient irgend eines bestimmten Gliedes, $\xi_p \eta_q$ z. B., wird dabei nach einander die Werte $a_{pq}, a'_{pq}, a''_{pq}, \ldots, a^{(s)}_{pq}$ erhalten, und es lässt sich zeigen, dass mit wachsendem s diese Grössen gegen den Koeffizienten A_{pq} in der Entwickelung der Funktion w

$$(46)\qquad w = \sum_1^\infty \sum_1^\infty \mathrm{A}_{mn} \xi_m \eta_n$$

konvergieren; letztere Reihe aber ist, nach den allgemeinen Sätzen über w, und nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen, absolut und gleichmässig konvergent nebst ihren gliedweise genommenen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung wenigstens. Sei nun

$$\sum_1^{\mathrm{M}} \sum_1^{\mathrm{N}} (a_{mn} - \mathrm{A}_{mn}) \xi_m \eta_n = \alpha_{\mathrm{MN}}(x, y),$$

so bleibt, welches auch x und y sei, α_{MN} kleiner als eine beliebig vorgegebene Grösse ε, sobald M, N genügend gross gewählt sind, da ja $\lim w_{\mathrm{MN}} = w$. Es ist dabei

$$a_{mn} - \mathrm{A}_{mn} = \frac{1}{ab} \int\!\!\int_{\mathrm{R}} \alpha_{\mathrm{MN}} \xi_m \eta_n \, dx \, dy.$$

Da aber ξ_m, η_n nach (35) kleiner als bestimmte, mit 1 vergleichbare Zahlen bleiben, so folgt

$$| a_{mn} - \mathrm{A}_{mn} | < \varepsilon \mathrm{A},$$

wo A eine feste Zahl ist, die von M, N unabhängig ist. Damit ist die Konvergenz der $a^{(s)}_{mn}$ gegen A_{mn} bei wachsenden M, N erwiesen.

Es ist aber wichtig, auf den wesentlichen Unterschied aufmerksam zu machen, der zwischen unsern sukzessiven Approximationen w_{MN} und einer Entwickelung wie (46) besteht. Es ist derselbe wie zwischen einer nach Polynomen fortschreitenden Reihe und einer Potenzreihe : die Art der Konvergenz und ihre Bedingungen sind

wesentlich verschieden. In analoger Weise ist bekannt, dass die Fourier-Reihen im allgemeinen nicht gliedweise differentiiert werden dürfen. Bildet man aber aus ihnen sukzessive Approximationen $S_1, S_2, \ldots$, indem man das Mittel S_n der Summen der n ersten Glieder berechnet, so entsteht eine Reihe trigonometrischer *Summen*, die den w_{MN} analog sind, und es ist von Herrn Fejér [1] gezeigt worden, dass dieselben gegen die gleiche Grenze konvergieren, aber eine gliedweise Differentiation gestatten. Es ist dies ein Umstand, der für die praktische Brauchbarkeit unserer Reihen von Wichtigkeit sein kann, insbesondere wenn nach Fourier-Reihen entwickelt wird. Die Bedingungen des § 7 insbesondere sind daher als hinreichend, nicht aber als notwendig anzusehen.

Setzt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Rechtecks, die Achsen parallel zu den Seiten, so erkennt man leicht, dass ξ_m eine gerade Funktion von x wird, wenn m ungerade; eine ungerade, wenn m gerade. Ebenso für $\eta_n(y)$. Wenn also $f(x, y)$ in x oder y gerade oder ungerade ist, so kommen natürlich in w_M nur die entsprechenden ξ oder η vor; die übrigen a_{mn} sind gleich Null.

§ 12.

Wir führen die numerische Rechnung durch für den Fall einer viereckigen Platte, deren Seiten gleich a sind und auf welche ein gleichförmiger Druck wirkt. Es ist dann

$$f = \text{konst} = c,$$

$$f_{\nu\mu} \quad f_{\mu\nu} = \frac{16\, c a^2 \alpha_\mu \alpha_\nu}{k_\mu k_\nu}$$

für ungerade μ, ν; für gerade μ, ν ist $f_{\mu\nu} = 0$.

Es ist also auch $a_{mn} = a_{nm}$, wir können die Gleichungen (45) dadurch vereinfachen, dass wir dies berücksichtigen, $\mu \leqq \nu$ setzen und die übrigen Gleichungen ($\mu > \nu$) weglassen. Da f gerade ist, hat man nur ungerade m, n zu berücksichtigen. Wir setzen abkürzend $l = 8\, c a^4\, 10^{-4}$.

---

(1) Fejér, *C. R.*, 1901, 1902, passim; Referat in *Fortschr. der Math.*, (33), 1902, p. 276.

Sei zunächst $M = N = 1$, so ergibt sich aus (45), welches sich auf *eine* Gleichung mit der Unbekannten a_{11} reduziert,

$$\frac{1}{l}\,\omega_1(x, y) = 0{,}6620\,\xi_1(x)\,\eta_1(y). \tag{47}$$

Ist ferner $M = N = 2$, so hat man das System zu lösen

$$l\,431{,}5 = 651{,}8\,a_{11} - 239{,}2\,a_{13} + 94{,}7\,a_{33},$$
$$l\,188{,}5 = -119{,}6\,a_{11} + 8867\,a_{13} - 961\,a_{33},$$
$$l\;\;82{,}7 = 94{,}6\,a_{11} - 1922\,a_{13} + 24390\,a_{33}.$$

Statt dieses System durch Determinanten zu lösen, berücksichtigen wir den wichtigen Umstand, dass die Koeffizienten der Diagonalglieder bedeutend grösser sind als die der andern, und dass wir in erster Approximation schon $a_{11} = 0{,}6620\,l$ gefunden haben. Wir setzen daher zunächst

$$a_{11} = 0{,}6620\,l$$

und *berechnen die neu hinzugekommenen Grössen* a_{13}, a_{33} *unter alleiniger Berücksichtigung der Diagonalglieder* auf den rechten Seiten der zwei letzten Gleichungen [1]. Es ergeben sich die Werte

$$a_{13} = 0{,}0302\,l, \qquad a_{33} = 0{,}0008\,l.$$

Die so gewonnenen Zahlen betrachten wir als erste Annäherungen, setzen also

$$a_{11} = 0{,}6620\,l + x\,l, \qquad a_{13} = 0{,}0302\,l + y\,l, \qquad a_{33} = 0{,}0008\,l + z\,l,$$

schaffen die bekannten Grössen auf die linke Seite der Gleichungen und berechnen wieder die Korrektionen x, y, z unter alleiniger Berücksichtigung der Diagonalglieder. Es ist

$$x = 0{,}0110, \qquad y = 0{,}0001, \qquad z = 0{,}0023$$

und endlich, durch erneute Wiederholung des Verfahrens ergeben sich

$$x' = -0{,}0003, \qquad y' = -0{,}0004, \qquad z' = 0{,}0000.$$

---

[1] Wobei in den Gliedern in a_{11} diese Grösse durch ihren Näherungswert ersetzt und die Glieder auf die linke Seite gebracht werden.

also

$$a_{11} = 0{,}6727\,l, \qquad a_{13} = 0{,}0307\,l, \qquad a_{33} = 0{,}0031\,l,$$

$$(48) \qquad \frac{1}{l}\,w_2 = 0{,}6727\,\xi_1\eta_1 + 0{,}0307(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) + 0{,}0031\,\xi_3\eta_3.$$

Der Vorzug dieser Lösungsmethode besteht darin, dass stets nur mit sehr kleinen Zahlen operiert wird, so dass, ausser für die Berechnung von w_1, der Rechenschieber angewandt werden kann und ausserdem nur wesentlich einfachere Operationen durchzuführen sind. Eine direkte Lösung durch Determinanten würde 5 stellige Logarithmentafeln erfordern.

Bei höheren Approximationen ist dieser Umstand noch sehr viel fühlbarer; eine direkte Lösung wäre hier ungleich zeitraubender. Sei $M = N = 3$, so hat man 6 Gleichungen :

$$\begin{aligned}
l\,431{,}5 &= 651{,}8\,a_{11} - 239{,}2\,a_{13} + 94{,}7\,a_{33} - 188\,a_{15} + 148\,a_{35} + 58\,a_{55},\\
l\,188{,}5 &= -119{,}6\,a_{11} + 8867\,a_{13} - 961\,a_{33} - 226\,a_{15} - 515\,a_{35} - 186\,a_{55},\\
l\,82{,}7 &= 94{,}6\,a_{11} - 1922\,a_{13} - 24\,390\,a_{33} + 474\,a_{15} - 4\,820\,a_{35} - 592\,a_{55},\\
l\,120{,}0 &= -93{,}8\,a_{11} - 226\,a_{13} + 237\,a_{33} - 48\,100\,a_{15} - 2\,370\,a_{35} - 2\,015\,a_{55},\\
l\,52{,}5 &= 74{,}3\,a_{11} - 515\,a_{13} - 2\,410\,a_{33} - 2\,370\,a_{15} - 78\,600\,a_{35} - 6\,420\,a_{55},\\
l\,33{,}5 &= 58\,a_{11} + 372\,a_{13} + 592\,a_{33} - 4\,030\,a_{15} - 12\,840\,a_{35} + 158\,500\,a_{55}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten wieder die oben für $M = 2$ gewonnenen Werte von a_{11}, a_{13}, a_{33} als erste Approximationen und berechnen aus den Diagonalgliedern der drei letzten Gleichungen die Näherungswerte

$$a_{15} = 0{,}0039, \qquad a_{35} = 0{,}0003, \qquad a_{55} = -0{,}0001.$$

Die erste Korrektion schon gibt die richtigen Werte, und damit

$$\begin{aligned}
(49) \qquad \frac{1}{l}\,w_3(x, y) = {} & 0{,}6740\,\xi_1\eta_1 + 0{,}0308(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) + 0{,}0032\,\xi_3\eta_3\\
& + 0{,}0040(\xi_1\eta_5 + \xi_5\eta_1) + 0{,}0004(\xi_3\eta_5 + \xi_5\eta_3) - 0{,}0000\,\xi_5\eta_5.
\end{aligned}$$

Die Konvergenz der w_i ist also eine durchaus befriedigende, wie aus dem Vergleich von (47), (48), (49) *hervorgeht.*

Offenbar ist die Geschwindigkeit, mit welcher die $f_{\mu\nu}$ mit wachsenden μ, ν abnehmen, für die Konvergenz des Verfahrens im grossen ganzen massgebend. Da die $f_{\mu\nu}$ im wesentlichen die Koeffizienten der Entwickelung von $f(x, y)$ nach den $\xi_m\,\eta_n$ sind, so lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, dass für grosse μ, ν in unserem Falle ($f =$ konst) der Ausdruck $\mu\nu\, f_{\mu\nu}$ mit wachsenden

μ, ν endlich bleibt. Ist aber $f = 0$ am Rande, so bleibt auch $\mu^2 \nu^2 f_{\mu\nu}$ endlich, und wenn auch noch $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ am Rande verschwinden, so ist nach § 10 sogar $\mu^4 \nu^4 f_{\mu,\nu}$ endlich: wirkt der Druck vorzugsweise auf die Mitte der Platte, so wird eine wesentlich raschere Konvergenz die Folge sein. Das gewählte Beispiel stellt also keinen besonders günstigen Fall dar. Unstetigkeiten von f dagegen sind für die numerische Rechnung weniger günstig.

Der Umstand, dass die Koeffizienten der Diagonalglieder erheblich grösser sind als die der andern Glieder der Gleichungen (45), liegt daran, dass die benutzten $\psi_{mn} = \xi_m \eta_n$, denen ja die sogenannte *Orthogonalitätseigenschaft* zukommt

$$\int_R\int \psi_{mn}\psi_{m'n'}\,dx\,dy = 0, \qquad \text{wenn nicht} \qquad m = m', \qquad n = n' \text{ ist,}$$

diese Eigenschaft auch noch *angenähert* besitzen, wenn man mit ihnen die unter dem Integralzeichen in J vorkommende Operation Δ vornimmt. Sind die transversalen Eigenschwingungen $\varphi_i(x, y)$ einer am Rande festgeklemmten Platte von der betrachteten Gestalt bekannt (was beim Rechteck und Viereck nicht der Fall ist), und setzt man $\varphi_i = \psi_i$, so gilt

$$\Delta\Delta\varphi_i = \lambda_i \varphi_i,$$

$$\int_R\int \Delta\psi_m\,\Delta\psi_n\,dx\,dy = \int\int \Delta\Delta\psi_m\,\psi_n\,dx\,dy = \lambda_m \int\int \psi_m\,\psi_n\,dx\,dy = 0$$

$$\text{für} \qquad m \neq n,$$

so dass die Koeffizienten α_{pq} der allgemeinen Gleichungen (9) verschwinden, sobald $p \neq q$ ist. Die linken Seiten des Gleichungssystems (11), welches die a_i bestimmt, reduzieren sich dann streng auf ihre Diagonalglieder, und *man erhält somit als Spezialfall unserer Methode die bekannten Entwickelungen nach Eigenschwingungen*, welche als Verallgemeinerungen der Fourier-Reihen zu betrachten sind.

Man wird eine solche angenäherte Orthogonalitätseigenschaft in manchen Fällen durch geeignete Wahl der ψ_i besonders für grössere i unschwer herstellen können, wobei dann nach dem angegebenen Rechnungsschema zu verfahren ist, und die Genauigkeit leicht sehr weit getrieben werden kann.

Die Potentialgleichung. — Das Dirichletsche Prinzip.

§ 13.

Wir gehen dazu über, die Anwendbarkeit der neuen Methode auf das bekannte Dirichletsche Problem zu prüfen: gesucht wird eine Funktion $u(x, y)$, welche nebst ihren Ableitungen erster Ordnung innerhalb eines bestimmten Gebiets R endlich und stetig ist, in R der Gleichung

$$(50) \qquad \Delta u = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

genügt, und auf dem Rande L von R gegebene Werte annimmt.

Die für die physikalischen Anwendungen durchaus unwesentlichen Einschränkungen, denen wir die Gestalt von R und die Randwerte unterwerfen, sind :

1°. Wie in § 6 soll die Gleichung der Randkurve auf die Form

$$F(x, y) = 0$$

gebracht werden können, wobei F im Innern nicht verschwindet und nebst seinen Hauptableitungen in R und auf L endlich und stetig ist. Unter *Hauptableitungen* verstehen wir jetzt die Ableitungen

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \, \partial y^n} \qquad \text{für} \qquad m = 0, 1, 2; \; n = 0, 1, 2.$$

Es soll auf dem Rande nicht identisch $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ sein.

Die Randwerte denken wir uns durch die Werte, die eine Funktion $Q(x, y)$ auf L annimmt, gegeben, und setzen voraus, dass Q nebst seinen Ableitungen erster Ordnung in R endlich und stetig bleibe, und dass ΔQ endlich sei. Ist diesen Bedingungen genügt, so ergibt sich die Lösung des Problems in ganz ähnlicher Weise wie im zuerst behandelten Beispiel der Platte.

Sei

$$u - Q = w, \qquad \text{so folgt} \qquad \Delta w + \Delta Q = 0.$$

Die Funktion w ist im Innern nebst ihren Ableitungen erster Ordnung endlich und stetig; sie verschwindet auf L und genügt

im Bereich R der Gleichung

$$\Delta w = f(x, y), \tag{51}$$

wo $f = -\Delta Q$ eine gegebene, endliche Funktion bedeutet.

Das Dirichletsche Integral

$$J = \int_R \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dS,$$

dessen Minimumswert unter den besprochenen Bedingungen der gesuchten Funktion u entspricht, wird nun

$$J = \int \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \right] dS.$$

Durch partielle Integration erhalten die Doppelprodukte die Form $-2 w \Delta Q$ oder $-2 w f$; das Integral der in Q quadratischen Glieder ist eine gegebene, belanglose Konstante; man erhält also

$$J = \int_R \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2 w f(x, y) \right] dS + \text{konst} \tag{52}$$

und zugleich den Satz, dass dieses Integral eine untere Grenze besitzt.

Wir bilden nun, etwa nach den Vorschriften der §§ 7 und 8, eine unendliche Reihe von Funktionen $\psi_i(x, y)$, welche genau denselben Bedingungen genügen, wie sie in § 2 für das erste Problem gestellt wurden, wobei nur die Bedingung $\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0$ wegfällt, und auf die neue Definition der « Hauptableitungen » zu achten ist. Dann bilden wir wieder

$$w_m(x, y) = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \ldots + a_m \psi_m,$$

und fordern, dass die quadratische Funktion der a_i

$$J_m(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \int_R \int \left[\left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 - 2 w_m f \right] dS$$

ein Minimum werde, so dass für die a_i die linearen Gleichungen resultieren

$$\frac{\partial J_m}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial J_m}{\partial a_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial J_m}{\partial a_m} = 0, \tag{53}$$

welche aus denselben Gründen wie die entsprechenden Gleichungen (11) stets in eindeutiger Weise lösbar sind. Diese Gleichungen lassen sich, unter Einführung der willkürlichen Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_m$ und der Funktion

$$(54) \qquad \zeta_m = A_1\psi_1 + A_2\psi_2 + \ldots + A_m\psi_m,$$

wiederum, wie in (12) und (13), zusammenfassen in die eine, für beliebige A_i gültige Gleichung

$$o = \int\int_R \left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\frac{\partial \zeta_m}{\partial x} + \frac{\partial w_m}{\partial y}\frac{\partial \zeta_m}{\partial y} - f\zeta_m\right) dS$$

oder

$$(55) \qquad o = \int\int (w_m \Delta\zeta_m + f\zeta_m)\, dS.$$

Die Minima $J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, \ldots$ bilden wieder eine stets abnehmende, oder doch nie zunehmende *Reihe von Zahlen, die gegen eine untere Grenze* $J^{(0)}$ *konvergieren*, und wie auf Seite 204, Gleichung (16) und (17), lässt sich unter geeigneter Spezialisierung von (55), (diese Gleichung für m und für $m+n$ geschrieben) die Differenz $J_{m+n}^{(0)} - J_m^{(0)}$ auf die Form bringen

$$(56) \quad J_{m+n}^{(0)} - J_m^{(0)} = -\int\int_R \left\{\left[\frac{\partial(w_{m+n} - w_m)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial(w_{m+n} - w_m)}{\partial y}\right]^2\right\} dS.$$

Aus der Konvergenz der $J_m^{(0)}$ folgt, dass dieses Integral für $m > M$ bei beliebigem n kleiner als eine gegebene Grösse η gemacht werden kann, wenn nur M geeignet gewählt wird. Aber aus

$$\int\int_R \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dS < 1$$

folgt, wenn man die Gebiete D, D′ sondert, wo $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \leqq 1$, und diejenigen, wo $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| > 1$ ist,

$$\int\int \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| dS < \int\int_D dS + \int\int_{D'} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dS < S + 1,$$

wo S die Oberfläche von R ist. Da $\frac{\partial|\varphi|}{\partial x} \leqq \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$, so folgt für jedes Teilgebiet von R

$$\int\int \frac{\partial|\varphi|}{\partial x} dS < 1 + S,$$

und die Anwendung auf (56) ergibt

$$\left|\int\int \frac{\partial |w_{m+n} - w_m|}{\partial x} dS\right| < (S + 1)\sqrt{\eta_1},$$

$$\left|\int\int \frac{\partial |w_{m+n} - w_m|}{\partial y} dS\right| < (S + 1)\sqrt{\eta_1}.$$

Daraus lässt sich zwar nicht die Konvergenz von w_m selbst, aber doch die Konvergenz der einfachen Integrale

$$\int w_m\, dy, \qquad \int w_m\, dx$$

genommen längs Parallelen zu den Achsen, wobei der Integrationsweg im Innern liegt, erschliessen. Und zwar ist diese Konvergenz eine *gleichmässige*. Denn setzen wir ausserhalb R die zunächst nur im Innern von R definierten Funktionen ψ_i, w_m gleich Null, wobei, da sie am Rande verschwinden, ihre Stetigkeit gewahrt wird, und legen wir die Koordinatenachsen ausserhalb R, so können wir die eben gefundenen Ungleichungen auf das Rechteck $x = 0$, $x = X$; $y = 0$, $y = Y$ anwenden, wo (X, Y) innerhalb R liegt; da aber

$$\int_0^Y\int_0^X \frac{\partial |w_{m+n} - w_m|}{\partial x} dx\, dy = \int_0^Y \Big[|w_{m+n}(x, y) - w_m(x, y)|\Big]_{x=0}^{x=X} dy$$

und $w_i(0, y) = 0$ ist, so folgt

$$\int_0^Y |w_{m+n} - w_m|\, dy < (S + 1)\sqrt{\eta_1},$$

mithin

$$\left|\int_0^Y w_{m+n}\, dy - \int_0^Y w_m\, dy\right| < (S + 1)\sqrt{\eta_1}.$$

Die Integrale

$$\int_0^Y w_m\, dy, \qquad \int_0^X w_m\, dx$$

konvergieren also innerhalb R *und auf* L *gleichmässig gegen stetige Grenzfunktionen.*

Bildet man ein Bereich aus einem kleinen Kurvenstück l, welches innerhalb R oder auf L liegt, und Parallelen zu den Achsen,

so ergibt die Anwendung der Ungleichungen auf dies Bereich

$$\int_l |w_{m+n} - w_m| \cos(nx)\, ds = \int |w_{m+n} - w_m|\, dy < 2(S+1)\sqrt{\tau}.$$

Es ist n die Normale zu l; die ja willkürlichen Richtungen der Achsen und die Länge von l seien so gewählt, dass $\cos nx$ positiv bleibt. Mithin

$$\left| \int_l w_{m+n} \cos nx\, ds - \int_l w_m \cos nx\, ds \right| < 2(S+1)\sqrt{\tau},$$

d. h. es konvergieren auch die Integrale

$$\int_l w_m \cos(nx)\, ds, \qquad \int_l w_m \cos(ny)\, ds$$

oder, wie man leicht einsieht

$$\int_l w_m\, ds.$$

§ 14.

Der Beweis der Existenz der gesuchten Funktion w gestaltet sich ganz wie früher.

Man setze

$$U_m = \int_0^x \int_0^x \int_0^y \int_0^y w_m\, dx^2\, dy^2,$$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^x \int_0^y \int_0^y f\, dx^2\, dy^2, \qquad \lim_{m=\infty} U_m = U,$$

wobei wieder die Achsen ausserhalb R liegen, und $w_m = 0$, $f = 0$ ausserhalb R zu setzen ist. Die Gleichung (55) lässt sich durch partielle Integration auf die Form bringen

$$0 = \iint_R (\Delta U_m + F) \frac{\partial^4 \zeta_m}{\partial x^2\, \partial y^2}\, dx\, dy - \int_L \Psi\, ds.$$

wo Ψ sowohl wie ΔU_m nur solche Ableitungen von U_m enthalten, von welchen wir wissen, dass sie für $m = \infty$ konvergieren. Ferner kommen darin noch die Hauptableitungen von ζ_m vor. Nach den gemachten Voraussetzungen können wir also, ganz wie in § 4, zur Grenze $m = \infty$ übergehen und das Hilbertsche Lemma anwenden.

Dann ist für jedes Rechteck $\rho\,(\alpha\ldots\alpha';\,\beta\ldots\beta')$ im Innern von R :

$$\Delta U - f(x, y) = X_1(x) + y\,X_2(x) + Y_1(y) + x\,Y_2(y),$$

wo X_1, X_2 endliche stetige Funktionen von x allein, Y_1, Y_2 ebensolche Funktionen von y allein bedeuten.

Sei

$$V = U - \int_\beta^y \int_\beta^y (Y_1 + Y_2 x)\,dy^2 - \int_\alpha^x \int_\alpha^x (X_1 + X_2 y)\,dx^2,$$

so folgt

$$\Delta V = F(x, y).$$

Es ist also V ein nebst seinen Ableitungen erster und zweiter Ordnung endliches und stetiges Integral dieser Gleichung. Daraus folgt aber, wie in § 5, unter Anwendung der bekannten Greenschen Sätze über das logarithmische Potential, dass

$$V(\xi, \eta) = \frac{-1}{2\pi} \int\int_\rho \log r\,F\,dx\,dy + \text{analytische Funktion von } \xi, \eta,$$

wobei die analytische Funktion (ein Randintegral) der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = 0$ genügt. Es ist

$$\frac{\partial^4 V}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2} = -\frac{1}{2\pi} \int\int_\rho \log r\,f\,dx\,dy + \text{analytische Funktion},$$

und diese Funktion, die wir w nennen wollen, bleibt somit nebst ihren Ableitungen erster Ordnung innerhalb ρ endlich und stetig, und genügt der Differentialgleichung

$$\Delta w = f(x, y).$$

Hierbei ist

$$w(x, y) = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{m = \infty} \int_x^{x+\varepsilon} w_m(x, y)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \lim_{m = \infty} \int_y^{y+\varepsilon} w_m(x, y)\,dy.$$

Da diese Eigenschaften für jedes ρ gelten, gelten sie im ganzen Innern von R.

Es ist noch zu zeigen, dass w auch die Randbedingung $w = 0$ erfüllt. Wir wissen, dass

$$\lim_{m = \infty} \int_l w_m \cos(n\,x)\,ds$$

für jedes kleine Kurvenstück l in R existiert, wobei, wenn man die Lage dieses starr gedachten Stückes innerhalb R ändert, die Konvergenz eine gleichmässige bleibt, auch wenn l sich beliebig dem Rande L nähert und schliesslich mit ihm koinzidiert. Daraus folgt, dass für jede innere Lage von l

$$\lim_{m=\infty} \int_l w_m \cos(nx)\, ds = \int_l w \cos(nx)\, ds.$$

Nähert sich l an L und fällt mit einem Teil des Randes L zusammen, so konvergiert die linke Seite gegen Null, da auf L alle $w_m = 0$ sind; die Werte, die w annimmt, wenn l sich L unbegrenzt nähert, genügen also auch, wegen der Gleichmässigkeit der Konvergenz, der Bedingung

$$\int_l w \cos(nx)\, ds = 0,$$

und zwar für jedes beliebige Stück der Randkurve, woraus $w = 0$ folgt.

Die Funktion w ist also die gesuchte Lösung.

Allerdings ist damit nur ein Existenzbeweis, nicht eine wirkliche Berechnung von w erreicht. Aber es ist schon früher bemerkt worden, dass man in den praktisch vorkommenden Fällen tatsächlich kaum mit der Möglichkeit zu rechnen haben dürfte, dass ein Integral wie (56) gegen Null konvergiert, ohne dass der Integrand auch konvergierte. Dann aber existiert nicht nur $\lim\limits_{m=\infty} w_m = w$, sondern auch noch $\lim \frac{\partial w_m}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$, $\lim \frac{\partial w_m}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}$; die erhaltenen Approximationen dürfen sogar gliedweise differentiiert werden. Ob daher die Methode brauchbar oder nicht, entscheidet im einzelnen Falle die numerische Berechnung der Approximationen.

Man erkennt an diesem Beispiel der Potentialgleichung, dass unsere Methode, wie schon betont, ausschliesslich eine speziell bestimmte Fassung des Dirichletschen Minimumprinzips ist, und dass diese Spezialisierung eben den Vorteil eines Konvergenzbeweises und damit eines Beweises des *Dirichletschen Prinzips* mit sich bringt.

Auch das analoge Problem für drei Dimensionen ist unserer Methode zugänglich. Ferner lässt sich die Aufgabe, bei gegebenen

Randwerten von w und $\frac{\partial w}{\partial n}$ eine Lösung von $\Delta\Delta w = 0$ im Innern eines gegebenen Gebiets zu finden, in analoger Weise auf das Problem der Gleichung $\Delta\Delta w = f(x, y)$, $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ zurückführen, welches wir oben gelöst haben.

Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten.

§ 15.

Die Anwendung der Methode ist natürlich keineswegs an so einfache Voraussetzungen über das Integral J, welches ein Minimum werden soll, wie wir sie bisher betrachtet haben, gebunden. Aber auch der Konvergenzbeweis lässt sich unschwer verallgemeinern, und es soll dies am Beispiele *linearer homogener Differentialgleichungen mit einer Variablen und Koeffizienten, die gegebene Funktionen von x sind*, gezeigt werden. Die Erfüllung der Grenzbedingungen und die Auffindung der Funktionen ψ_i vereinfacht sich sehr im Falle einer einzigen Variablen. Zu grösserer Übersichtlichkeit beschränke ich mich auf Gleichungen zweiter Ordnung; doch gelten die Sätze ohne wesentliche Änderungen auch für höhere Ordnungen. Das Integral J lässt sich dann in der Form schreiben

$$J = \int_a^b [f_1(x)y'^2 + 2f_2(x)yy' + f_3(x)y^2]\,dx. \tag{57}$$

Und wir fordern, es solle eine Funktion $y(x)$ gefunden werden, *welche im Intervall ab nebst ihrer Ableitung y' endlich und stetig bleibe, für $x = a$; $x = b$ die gegebenen Werte A, B annehme und J zu einem Minimum mache.* Es ist dies die Dirichletsche Randwertaufgabe, auf einfache Differentialgleichungen übertragen.

Wir setzen voraus, es seien f_1, f_2, f_3 im Gebiet $a\ b$ stetige, endliche Funktionen von x; gleiches gelte von $f'_1 = \frac{df_1}{dx}$ und von f'_2. Endlich fordern wir, dass die quadratische Form

$$f_1 y'^2 + 2f_2 yy' + f_3 y^2$$

im ganzen Gebiet ab *definit* sei, bzw., da es auf das Vorzeichen nicht ankommt, *positiv*.

Dann existieren zwei positive Grössen k, K derart, dass für $a < x < b$

$$K > f_1 > k, \qquad K > f_3 > k, \qquad f_1 f_3 - f_2^2 > k.$$

Sei

$$(58) \qquad y(x) = \frac{x-a}{b-a} B - \frac{x-b}{a-b} A - u(x),$$

so wird $u(a) = u(b) = 0$ sein, und vermittelst einer partiellen Integration erhält man

$$J = \int_a^b (f_1 u'^2 + 2 f_2 u u' + f_3 u^2 + 2 F u)\, dx + \text{konst.},$$

wo

$$F(x) = (f_3 - f_2')\left(\frac{x-a}{b-a} B + \frac{x-b}{a-b} A\right) - f_1' \frac{B-A}{b-a}$$

und die additive, übrigens belanglose Konstante nur von den gegebenen Grössen A, f_1, ... abhängt.

Jede Funktion u, die den vorausgesetzten Stetigkeits- und Randbedingungen genügt, lässt sich im ganzen Intervall ab durch die Fouriersche Reihe

$$(59) \qquad u(x) = \sum_1^\infty a_i \sin \frac{i\pi(x-a)}{b-a}$$

darstellen; die Bedingungen $u(a) = u(b) = 0$ sind hierbei erfüllt, und es kann $u(x)$ einmal gliedweise differentiiert werden, und falls u'' den Dirichletschen Bedingungen genügt, sogar zweimal. Denn setzt man die Funktion u' für $x < a$ als gerade Funktion fort, so gilt

$$u'(x) = \sum A_i \cos \frac{i\pi(x-a)}{b-a}$$

im Intervall $a - b < x < b$, und die gliedweise Integration dieser gleichmässig konvergenten Reihe führt auf die Reihe (59), plus einer additiven Konstante, die wegen der Grenzbedingungen sich zu Null ergibt.

Ähnlich findet sich, falls u'' entwickelbar ist, durch zweimalige Integration die Reihe (59) plus einer linearen Funktion von x, die wieder wegen $u(a) = u(b) = 0$ verschwindet.

Wir können also $\psi_m = \sin \dfrac{m\pi(x-a)}{b-a}$ setzen, und führen die Funktion

$$u_m = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m$$

an Stelle von u in das Integral J ein. Dieses wird wieder eine quadratische Funktion $J_m(a_1, \ldots, a_m)$ der a_i und wir bestimmen letztere so, dass J_m ein Minimum wird, d. h. wir lösen das System linearer Gleichungen

$$\frac{\partial J_m}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial J_m}{\partial a_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial J_m}{\partial a_m} = 0.$$

Da der quadratische Teil von J_m nach den gemachten Voraussetzungen nur dann verschwindet, wenn u_m identisch gleich Null, und somit $a_1 = a_2 = \ldots a_m = 0$, so ist auch in diesem Falle die Lösung eindeutig bestimmt. Da J nach seinem Ausdruck (57) nicht negativ sein kann, so folgt wieder die Konvergenz der sukzessiven Minima $J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, J_3^{(0)}, \ldots$ gegen eine Grenze. Man setze wiederum

$$\zeta_m = \sum_1^m A_i \sin \frac{i\pi(x-a)}{b-a}, \tag{60}$$

so fordert die Gleichung $J_m = \min$, dass für beliebige A_i sei

$$0 = \int_a^b dx[(f_1 u'_m + f_2 u_m)\zeta'_m + (f_2 u'_m + f_3 u_m)\zeta_m + F\zeta_m] \tag{61}$$

und die Differenz $J_{m+n}^{(0)} - J_m^{(0)}$ lässt sich, durch geeignete Spezialisierung dieser Gleichung (wie in § 2), auf die Form bringen

$$J_{m+n}^{0} - J_m^{0} = -\int_a^b [f_1(u'_{m+n} - u'_m)^2 + 2f_2(u'_{m+n} - u'_m) \times (u_{m+n} - u_m) + f_3(u_{m+n} - u_m)^2]\, dx.$$

Wieder kann das Integral für genügend grosse m kleiner als die gegebene Grösse η gemacht werden. Da aber der Integrand positiv und grösser [1] als $(u'_{m+n} - u'_m)^2 \dfrac{f_1 f_3 - f_2^2}{f_3}$, somit auch als

$$(u_{m+n} - u'_m)^2 \frac{k}{K}$$

---

[1] Es ist

$$f_1\varphi'^2 + 2f_2\varphi\varphi' + f_3\varphi^2 = \frac{1}{f_3}[f_3\varphi + f_2\varphi']^2 + \varphi'^2 \frac{f_1 f_3 - f_2^2}{f_3}.$$

ist, gilt die Ungleichung

$$\int_a^b (u'_{m+n} - u'_m)^2 \, dx < \frac{\tau_1 K}{k},$$

woraus wir wie in § 13 schliessen

$$\left| \int_a^x \frac{d \, | u_{m+n} - u_m |}{dx} \, dx \right| < (1 + b - a) \sqrt{\frac{\tau_1 K}{k}}.$$

Daraus folgt, *dass u_m im ganzen Gebiet $a\,b$ gleichmässig gegen eine stetige Grenzfunktion u konvergiert*, wenn m unbegrenzt zunimmt.

Um die Existenz der Ableitungen von u zu beweisen, setzen wir

$$P_m = \int_a^x \int_a^x (F - u_m f_3 - u_m f'_2) \, dx^2 + \int_a^x f'_1 u_m \, dx$$

und es konvergieren für $m = \infty$, P_m und P'_m gegen Grenzfunktionen P und P'.

Dann wird (61)

$$0 = \int_a^b (u_m f_1 - P_m) \frac{d^2 \zeta_m}{dx^2} \, dx - \zeta'_m(b) \, P_m(b).$$

Wie wir gesehen haben, lassen sich die Koeffizienten A_i von ζ_m so bestimmen, dass $\lim \zeta_m = \zeta$, $\lim \dfrac{d\zeta_m}{dx} = \dfrac{d\zeta}{dx}$, $\lim \dfrac{d^2\zeta_m}{dx^2} = \dfrac{d^2\zeta}{dx^2}$, falls ζ eine Funktion ist, die nebst $\dfrac{d\zeta}{dx}$ in a und b verschwindet, im Intervall $a\,b$ nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig und endlich, und im übrigen willkürlich ist. Bei dieser Bestimmung der ζ_m kann man also zur Grenze übergehen; das Glied in $\zeta'_m(b)$ konvergiert gegen Null, es bleibt

$$\int_a^b (u f_1 - P) \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \, dx = 0$$

für jedes ζ. Auf dieses Integral lässt sich nun das Hilbertsche Lemma anwenden und ergibt

$$u f_1 - P = c_1 + c_2 x, \tag{62}$$

wo c_1, c_2 Konstanten sind. Es ist also

$$u = \frac{c_1 + c_2 x + P}{f_1},$$

und da die Ableitung der rechten Seite existiert und stetig und endlich ist, gilt Gleiches von $\frac{du}{dx}$.

Durch Differentiation von (62) ergibt sich aber

$$u' f_1 - \int_a^x [F + u(f_3 - f'_2)]\, dx = c_2,$$

so dass auch u'' existiert und die Gleichung

$$u'' f_1 + u' f'_1 + u(f'_2 - f_3) - F = 0 \tag{63}$$

erfüllt ist, welche man direkt durch Variation von J erhalten würde. Das Problem ist damit gelöst.

Für nicht homogene lineare Gleichungen bleibt die Methode unverändert, nur dass $F(x)$ eine allgemeinere Form annimmt. Zum Beweise der Konvergenz ist es notwendig, die Existenz einer unteren Grenze des zu variierenden Integrals J zu zeigen. Man kann zu diesem Ende die Existenz eines partikulären Integrals y_1 der nicht homogenen Gleichung, sei es auf Grund der im Vorigen ausgeführten Lösung der homogenen Gleichung, sei es auch direkt aus den Cauchyschen Existenzsätzen, postulieren, und $y = y_1 + u$ setzen; dann nimmt J eine Form an, aus welcher die Existenz einer unteren Grenze ohne weiteres folgt. Es ist dies im wesentlichen die Methode, die wir in § 1 angewendet haben. Bei der wirklichen Lösung des Problems wird man allerdings diese Transformation nicht ausführen, ebensowenig wie man das postulierte partikuläre Integral zu kennen braucht.

Die schwingende Saite.

§ 16.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen lassen sich nicht mehr anwenden, wenn der Integrand aufhört, eine *definite* Form zu sein. Es ist bekannt, dass die Natur der Lösungen in diesem

Falle eine wesentlich andere ist, und dass die Eindeutigkeit der Lösung insbesondere, ebenso wie ihre Existenz, nicht mehr allgemein behauptet werden kann. Beispiele hierfür bieten die Eigenschwingungen elastischer Körper : wir wollen für den Fall der schwingenden Saite zeigen, dass, wenn auch der theoretische Konvergenzbeweis, wenigstens in der im Obigen dargestellten Form, versagt, die Methode nichtsdestoweniger anwendbar bleibt und *zu numerisch sehr brauchbaren Resultaten führt.*

Sei k^2 eine zunächst willkürliche Konstante, so sind die Gleichungen des Problems bekanntlich

$$(64) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0, \qquad y(-1) = 0, \qquad y(+1) = 0,$$

wobei die Saite in den Punkten $x = \pm 1$ festgehalten wird. Wegen der Homogenität kann man noch die Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} y^2\,dx = 1$$

vorschreiben. Die Lösungen sind :

Fundamentalton : $y = \cos\frac{\pi x}{2}$, $k = \frac{\pi}{2}$; erster Oberton : $y = \sin \pi x$, $k = \pi$; zweiter Oberton $y = \cos\frac{3\pi x}{2}$, $k = \frac{3\pi}{2}$, usw.

Diese Lösungen wollen wir nach unserer Methode durch Polynome zu approximieren suchen, wobei wir uns auf die in x geraden Lösungen beschränken.

Das allgemeinste, in x gerade Polynom, welches den Bedingungen $y(\pm 1) = 0$ genügt, ist

$$(65) \qquad y_n = (1 - x^2)(a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_n x^{2n}).$$

Die Gleichung (64) entsteht durch die Forderung, es solle $\int_{-1}^{+1} y'^2\,dx$ unter der Bedingung $\int_{-1}^{+1} y^2\,dx = 1$ ein Minimum werden.

Führen wir hier y_n an Stelle von y ein und setzen

$$J_n = \int_{-1}^{+1} (y_n'^2 - k_n^2 y_n^2)\,dx,$$

so haben wir die a_i so zu bestimmen, dass J_n ein Minimum wird,

oder, besser gesagt, dass

$$(66) \qquad \frac{\partial J_n}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_n} = 0$$

ist. Soll dieses System linearer Gleichungen eine Lösung besitzen, so muss seine Determinante verschwinden, woraus sich eine Gleichung $n + 1^{ten}$ Grades für k_n^2 ergibt, deren Wurzeln

$$k_1^{n} < k_2^{n} < \ldots k_{n+1}^{n}$$

sein mögen. Jeder dieser Wurzeln entspricht ein bestimmtes y_n, und man findet leicht, dass die kleinste dem Minimum von

$$\frac{\int_{-1}^{+1} y_n'^2 \, dx}{\int_{-1}^{+1} y_n^2 \, dx}$$

entspricht, für geeignete Wahl der a_n.

Nimmt n zu, so wird $k_1^{(n)}$ abnehmen und gegen eine Grenze konvergieren, welche $k = \frac{\pi}{2}$ entspricht (Fundamentalton). Auf die Konvergenz der y_n lässt sich daraus aber nicht in der bisherigen Weise schliessen.

Die Koeffizienten der Gleichungen (66), die die a_i bestimmen, sind linear in k^2 und enthalten, wegen

$$\int_{-1}^{+1} x^{2p} \, dx = \frac{2}{2p+1}$$

nur rationale Zahlen. Für $n = 1$ (erste Approximation) wird

$$0 = a_0\left(1 - \frac{2k^2}{5}\right) - a_1\left(-\frac{1}{5} - \frac{2k^2}{35}\right), \quad 0 = \left(1 - \frac{2k^2}{7}\right) - a_1\left(-\frac{11}{7} - \frac{2k^2}{21}\right),$$

woraus

$$k^4 - 28k^2 + 63 = 0; \qquad 2k_1^2 = 4{,}93488; \qquad 2k_2^2 = 51{,}0.$$

Aus den exakten Lösungen hätte sich ergeben

$$2k_1^2 = \frac{\pi^2}{2} = 4{,}934802200, \qquad 2k_2^2 = \frac{9\pi^2}{2} = 44{,}414.$$

so dass schon in erster Annäherung die Tonhöhe des Fundamentaltons auf $\frac{2}{100000}$ richtig ist, während, wie ja zu erwarten, die des zweiten Obertons nur auf 10 % genau sich findet.

In *zweiter Approximation* ($n = 2$) wird, falls $2k^2 = \lambda$ gesetzt wird,

$$\lambda^3 - 225\lambda^2 + 8910\lambda - 38610 = 0.$$

Wir benutzen die schon gefundenen Näherungswerte $\lambda = 2k_1^2$, $\lambda = 2k_2^2$ und erhalten die neuen Werte

$$2k_1^2 = 4{,}934802217; \qquad 2k_2^2 = 44{,}602.$$

Der Fehler des Fundamentaltons in zweiter Annäherung beträgt 4 Milliardstel, der des zweiten Obertons $\frac{1}{2}$ %; der vierte Oberton wird nur roh angenähert erhalten (dritte Wurzel der Gleichung).

Die Konvergenz ist also eine ungewöhnlich gute. Man bemerke, dass sich hieraus sukzessive Approximationen von π durch algebraische Zahlen ergeben.

Berechnet man nun in zweiter Approximation a_0, a_1 und a_2, so findet sich als angenäherte Darstellung von $\cos\frac{\pi x}{2}$:

$$y_2(x) = (1 - x^2)(1 - 0{,}23430x^2 - 0{,}01896x^4)$$

und für die Werte $x = 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots,\ 0{,}9$ von x erhält man für $\log\cos\frac{\pi x}{2}$ und $\log y_n$ die Tabelle

$x =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\log\cos\frac{\pi x}{2} =$	994620	978206	949881	907958	849485
$\log y_n =$	994621	978212	949889	907952	849493

$x =$	0,6	0,7	0,8	0,9
$\log\cos\frac{\pi x}{2} =$	769219	657047	489982	194332
$\log y_n =$	769221	657043	489978	194345

wobei nur die Mantissen der Logarithmen geschrieben sind; für $x = -1$ und $x = 1$ ist übereinstimmend $y_n = \cos\frac{\pi x}{2} = 0$. *Die*

Annäherung ist also im ganzen Gebiet — 1 *bis* + 1 *eine sehr befriedigende* (¹).

Für den Oberton ist es vor allem wichtig, die Stellung der zwei Knoten (theoretisch $x = \pm \frac{1}{3}$) zu berechnen. Es wird

$$y_2^2(x) = (1 - x^2)(-1 + 9.335x^2 - 6.219x^4)$$

und die Klammer verschwindet für $x = 0.3408$: die Stellung des Knoten ist also auf 2 % genau angegeben.

Man wird aus diesem Beispiel schliessen, dass unsere Methode für die Berechnung der Schwingungszahl des Fundamentaltons einer Saite, Membran oder Platte besonders vorteilhaft ist, und dass je höher der Oberton ist, mit dem man es zu tun hat, um so grösser die Anzahl Konstanten a_i sein wird, die man zu berechnen hat, um eine gegebene Genauigkeit zu erreichen. Auch auf die Untersuchung der Chladnischen *Klangfiguren* ist die Methode somit anwendbar: bei transversal schwingenden Platten ist das Problem bis jetzt, im Fall eines freien Randes, erst für den Kreis gelöst. Aber auch bei ringsum eingespannten rechteckigen Platten ist die Lösung noch unbekannt : es lässt sich leicht zeigen, dass die Eckpunkte singulär sind, und in ihrer Umgebung eine Entwickelung nach Potenzreihen nicht möglich ist. Hier ist der Umstand von grossem Vorteil, dass unsere Methode, z. B. bei Anwendung von Polynomen, auch in solchen singulären Punkten anwendbar bleibt, sofern nur die Stetigkeitsbedingungen nicht verletzt werden. Auf diese Anwendung der neuen Methode auf transversale Schwingungen ebener rechteckiger Platten werde ich an anderer Stelle zurückkommen.

Nach dem vorliegenden Beispiel dürfte jedenfalls der Physiker bei der Anwendung des neuen Rechnungsverfahrens auch in Fällen, wo der theoretische Konvergenzbeweis zunächst noch fehlt, sich durch diesen Mangel nicht allzusehr beunruhigt fühlen.

(¹) Im vorliegenden Falle kann man auch durch Potenzreihen integrieren. Beschränkt man sich, wie in y_2, auf Potenzen von x die $\leqq 6$ sind, so wird die Annäherung an $y(x)$ eine ungefähr ebensogute, der Fehler des Fundamentaltons dagegen ist 10000 mal grösser als hier.

XVI.

ÜBER EINE NEUE METHODE ZUR LÖSUNG GEWISSER RANDWERTAUFGABEN [1].

(*Göttinger Nachrichten, math.-physik. Klasse*, 1908, S. 236-248.)

Bei den Randwertaufgaben der mathematischen Physik besteht in vielen Fällen die Forderung, eine bei bestimmten Stetigkeits- und Randbedingungen durch ein Minimalprinzip definierte Funktion innerhalb eines gegebenen, endlichen Bereichs darzustellen. Zu diesem Zweck eignen sich bekanntlich Potenzreihen nur ausnahmsweise, während es immer möglich ist, die Funktion nebst einigen ihrer Ableitungen durch ein Polynom von genügend hohem Grade, durch die ersten Glieder einer Fourier-Reihe oder ähnliche Ausdrücke innerhalb des ganzen Bereichs mit beliebig vorgeschriebener Genauigkeit darzustellen. Die Berechnung der Koeffizienten bietet keine Schwierigkeit falls die Funktion numerisch gegeben ist, und es wird in den in der Praxis vorkommenden Fällen meist ein Polynom von niedrigem Grade die Funktion mit genügender Annäherung darstellen. In dieser Form werden häufig die Resultate der Beobachtung zusammengefasst; soll das Ergebnis mit der Theorie verglichen werden, so erhebt sich die Forderung, *die Koeffizienten a_i eines Polynoms oder allgemeiner eines Ausdrucks der Form*

$$(1) \qquad w_m = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m$$

wo die ψ_i geeignete analytische Funktionen sind, *aus den Randbedingungen und der Differentialgleichung so zu bestimmen*,

[1] Vorgelegt von Herrn C. Runge in der Sitzung vom 16. Mai 1908.

dass sie, bei gegebenem m, von der gesuchten Lösung möglichst wenig abweichen; wobei der Fehler mit wachsendem m verschwinden muss.

Bei vielen Variationsproblemen lässt sich nun ein zur numerischen Rechnung geeignetes Verfahren angeben, welches in engster Beziehung zum *Dirichletschen Prinzip* steht, und, da es einen einfachen Konvergenzbeweis zulässt, dieses Prinzip (für das betreffende Problem) *streng zu begründen erlaubt*, wenn man noch die von D. Hilbert zu ähnlichen Zwecken entwickelte neue Methode der Variationsrechnung heranzieht. Dies Verfahren soll im Folgenden am Problem des *Gleichgewichts ringsum eingespannter, elastischer Platten* entwickelt werden. Die Verallgemeinerung und die numerische Durchführung einzelner Fälle, die sich übrigens von selbst ergibt, sei einer ausführlicheren Mitteilung vorbehalten.

Sei w die (sehr kleine) Verschiebung eines Punktes der Platte aus seiner ursprünglichen Lage, senkrecht zur Ebene der Platte, so ist die zu approximierende Funktion $w(x, y)$ durch folgende Bedingungen definiert :

1. sie ist eindeutig, endlich und stetig nebst ihren Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung innerhalb der Platte R;

2. auf dem Rande L der Platte erfüllt sie die Bedingungen

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \qquad \text{also auch } \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

3. sie genügt im Innern der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \Delta\Delta w = f(x, y), \tag{2}$$

wo f eine dem auf die Platte ausgeübten Normaldruck proportionale, endlich, stetige Funktion ist, die numerisch gegeben sei. Diese Forderung ist äquivalent mit der andern; es möge das Integral

$$\mathrm{J} = \int\int_{\mathrm{R}} \left[\frac{1}{2}(\Delta w)^2 - wf\right] dx\, dy \tag{3}$$

(welches im Wesentlichen die potentielle Energie der deformierten Platte darstellt, nebst der Arbeit des Druckes) für w ein Minimum werden.

Dass dieses Integral jedenfalls eine untere Grenze besitzt, wenn sie auch vielleicht nicht erreicht wird, erkennt man leicht durch Einführung des partikulären Integrals von (2)

$$w_1(x, y) = -\frac{1}{8\pi}\int\int r^2 \log r f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Für alle w, die den Bedingungen 1. und 2. genügen, lässt sich dann J in der Form schreiben

$$J = \frac{1}{2}\int\int [\Delta(w - w_1)]\, dx\, dy + K,$$

wo K die numerisch bestimmte Grösse

$$K = \int_R\int \left[\frac{1}{2}(\Delta w_1)^2 - f w_1\right] dx\, dy - \int_L \left(w_1 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_1}{\partial n}\Delta w_1\right) ds$$

bedeutet.

Man setze $\psi_0 = 0$ und wähle die ψ_i so, dass sie den Bedingungen 1. und 2. genügen, und dass zwischen ihnen keine identische lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehe; dann erfüllt w_m die Bedingungen 1. und 2. für jedes System der a_i und verschwindet identisch nur wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$. Wir suchen nun die Koeffizienten a_i des Ausdrucks

$$w_m(x, y) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m$$

so zu bestimmen, dass w_m bei gegebenem m eine *möglichst gute Approximation* von w darstelle; die fundamentale Wichtigkeit der Energie für den gesamten physikalischen Vorgang legt es nahe, *die Abweichung der Gesamtenergie von ihrem theoretischen Wert als Maasstab des* (bisher noch nicht definierten) *Gesamtfehlers* zu nehmen und diese Abweichung möglichst klein zu machen. Mit andern Worten, *wir haben die a_i so zu wählen, dass die der Deformation w_m entsprechende Energie bzw. das Resultat der Einführung von w_m statt w unter das Integralzeichen*

$$J_m = \int_R\int \left[\frac{1}{2}(\Delta w_m)^2 - f w_m\right] dx\, dy$$

möglichst klein werde. Da nun J_m eine quadratische Funktion der a_i allein ist und x und y gar nicht enthält, handelt es sich hier um

ein gewöhnliches Maximum und Minimum Problem, welches durch das System der in den Unbekannten a_i linearen Gleichungen

$$(5)\qquad \frac{\partial J_m}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J_m}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J_m}{\partial a_m} = 0$$

gelöst wird. Setzt man

$$(6)\qquad \alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \int\int_R \Delta\psi_p \Delta\psi_q \,dx\,dy, \qquad \alpha_p = \int\int_R f\psi_p \,dx\,dy,$$

so lautet das Gleichungssystem

$$(5a)\qquad \sum_{p=1}^{m} \alpha_{pq} a_p = \alpha_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Lösung von (5) und (5a) ist immer möglich und eindeutig bestimmt, weil die quadratische Form

$$\sum_1^m \sum_1^m \alpha_{pq} a_p a_q = \frac{1}{2}\int\int_R (\Delta w_m)^2 \,dx\,dy$$

stets positiv ist und nur verschwindet, wenn identisch $\Delta w_m = 0$ ist, was, da $w_m = 0$ am Rande ist, die Identitat $w_m \equiv 0$, und somit $a_1 = a_2 = \ldots a_m = 0$ erfordert. Die Determinante des Systems verschwindet also nicht.

Es muss hervorgehoben werden, dass die α_i durch *rein numerische Quadratur*, wobei *keinerlei veränderlicher Parameter vorkommt*, definiert sind : die praktische Durchführung dieser Quadraturen bei gegebener Genauigkeit bietet also keine Schwierigkeit.

Ich beweise nun, dass $\lim_{m=\infty} w_m$ existiert und die gesuchte Lösung ist (bei geeigneter Wahl der ψ_i).

Sind A_i willkürliche Zahlen und

$$(7)\qquad \zeta_m(x, y) = A_1\psi_1 + \ldots + A_m\psi_m,$$

so lassen sich die Gleichungen (5) dahin zusammenfassen, es müsse für jedes Wertesystem der A_i die Gleichung bestehen

$$(8)\qquad \int\int (\Delta w_m \Delta\zeta_m - f\zeta_m)\,dx\,dy = 0.$$

Für einen neuen Index $m+n>m$ erhält man in analoger Weise eine neue Approximation w_{m+n} mit anderen Koeffizienten a_i, und es soll nun gezeigt werden, dass diese Approximationen gleichmässig konvergieren. Wir setzen $\varphi = w_{m+n} - w_m$ und bilden die Differenz der Minimalwerte von J

$$J_{m+n}^{0} - J_m^0 = \int\!\!\int \left[\frac{1}{2}(\Delta w_m + \Delta\varphi)^2 - f(w_m+\varphi)\right] dx\,dy$$

$$-\int\!\!\int \left[\frac{1}{2}(\Delta w_m)^2 - f w_m\right] dx\,dy$$

$$= \int\!\!\int (\Delta w_m \Delta\varphi - f\varphi)\,dx\,dy - \frac{1}{2}\int\!\!\int (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy$$

und schreiben (8) für den Index $m+n$ in der Form

$$\int\!\!\int [(\Delta w_m - \Delta x)\Delta\zeta_{m+n} - f\zeta_{m+n}]\,dx\,dy = 0.$$

Setzt man insbesondere $\zeta_{m+n} = \varphi$, was erlaubt ist, so wird

$$\int\!\!\int [\Delta w_m \Delta\varphi + (\Delta\varphi)^2 - f\varphi]\,dx\,dy = 0$$

und somit

$$(9)\qquad J_{m+n}^{0} - J_m^{0} = -\frac{1}{2}\int\!\!\int (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy \qquad (\varphi = w_{m+n} - w_m).$$

Die $J_m^{(0)}$ bilden also, wie vorauszusehen war, eine stets abnehmende Reihe von Zahlen, die aber, wie oben gezeigt, grösser als eine bestimmte untere Schranke bleiben. Sie konvergieren also, und es lässt sich bei gegebenem ε ein $m = M$ so bestimmen, dass für jedes $m > M$ und beliebige n die Ungleichung

$$(10)\qquad \int\!\!\int_R (\Delta\varphi)^2\,dx\,dy < \varepsilon$$

bestehe. Hieraus folgt zwar nicht, dass $\Delta\varphi$, wohl aber dass φ gegen Null konvergiert. Denn, wegen $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ am Rande ist identisch im Innern von R

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_R \log r\,\Delta\varphi\,d\xi\,d\eta; \qquad [r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2].$$

Sei D das Gebiet, wo (bei gegebenem x, y) $|\Delta\varphi| > \log r\sqrt{\varepsilon}$, und D

das Gebiet, wo $|\Delta\varphi| < \log r \sqrt{\varepsilon}$ ist. Dann ist

$$2\pi|\varphi(x,y)| < \int\!\!\int_{D} \frac{(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\varepsilon}}\, d\xi\, d\eta + \int\!\!\int_{D'} \log^2 r \sqrt{\varepsilon}\, d\xi\, d\eta$$

$$< \int\!\!\int_{R} \frac{(\Delta\varphi)^2}{\sqrt{\varepsilon}}\, d\xi\, d\eta + \sqrt{\varepsilon} \int\!\!\int_{R} \log^2 r\, d\xi\, d\eta.$$

Das zweite Integral ist konvergent, wie man etwa durch Einführung von Polarkoordinaten sieht: sei K sein grösster Wert innerhalb R, dann folgt nach (10)

$$2\pi|\varphi(x,y)| < \sqrt{\varepsilon}(1-K).$$

Die rechte Seite ist von x, y und n unabhängig; bei gegebenem ε' kann man immer für jedes x, y u. n die Grösse $|\varphi| = |w_{m+n} - w_m|$ kleiner als ε' machen, sobald m einen bestimmten Wert übersteigt; man hat bloss die willkürliche Zahl ε und dementsprechend M so zu wählen, dass

$$\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{1-K}\right)^2 \varepsilon'^2$$

sei.

Die Approximationen w_m konvergieren also im ganzen Gebiet R gleichmässig gegen eine endliche, stetige Grenzfunktion $w(x, y)$.

Gleiches lässt sich in analoger Weise von den Ausdrücken

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{\partial w_m}{\partial x}\, dx, \qquad \int_{\beta}^{y} \frac{\partial w_m}{\partial x}\, dy, \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial w_m}{\partial n}\, ds$$

zeigen, wo die geraden Linienstücke $\alpha \ldots x$, bzw. $\beta \ldots y$, bzw. die Kurve $\alpha \ldots \beta$ ganz innerhalb R liegen und n die Normale zur Kurve bedeutet.

Unsere Wahl der Annäherungsfunktionen w_m, welche das Integral J immer kleiner machen, bedingt also die Konvergenz in allen Fällen. Soll aber w die Lösung des Problems sein, d. h. soll der Grenzpunkt der J''_m mit dem Grenzwert von J für *irgendwelche* den Bedingungen 1., 2. genügende Funktionen w sicher zusammenfallen, so müssen die ψ_i der weiteren Bedingung unterworfen werden, dass jede solche Funktion w nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ beliebig angenähert durch einen Ausdruck

der Form $a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m$ und seine entsprechenden Ableitungen darstellbar sei. Wenn ferner die ψ_i derart gewählt wären, dass aus dem Unendlichkleinwerden des Integrals $\int\int[\Delta(w_{m+n} - w_m)]^2\,dx\,dy$ auf das des Integranden geschlossen werden dürfte [ein Fall, der wohl praktisch der allein in Betracht kommende ist ([1]), besonders wenn man nur eine bestimmte Approximation verlangt], so würde man auch auf die Konvergenz von $\Delta w_m, \frac{\partial w_m}{\partial x}, \frac{\partial w_m}{\partial y}$, schliessen können, und es wäre $w = \lim w_m$ die gesuchte Funktion.

Über die Singularitäten, die unter den vorliegenden Umständen (z. B. bei Entwickelungen nach Polynomen) möglich sind, ist jedoch wenig bekannt, so dass eine weitere Verschärfung der Bedingungen, welchen die ψ_i zu unterwerfen sind, zur Durchführung des Beweises nötig wird.

Wir nennen abkürzend *Hauptableitungen* einer Funktion die Ableitungen $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x_m\,\partial y_n}$, $m = 0, 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2, 3$. Die ψ_i haben nun die Bedingungen zu erfüllen :

1. sie sind, nebst ihren Hauptableitungen, in R und auf L endlich und stetig;

2. auf L ist $\psi_i = 0$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = 0$, somit $\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial y} = 0$ für jedes i;

3. es besteht keine Identität der Form

$$b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \ldots + b_m\psi_m \equiv 0,$$

wenn nicht alle b verschwinden;

4. sei $\zeta(x, y)$ eine abteilungsweise analytische Funktion, die nebst ihren Hauptableitungen endlich und stetig ist, und nur innerhalb eines ganz in R gelegenen Rechtecks ρ von Null verschieden ist, wobei Grösse und Lage von ρ willkürlich bleiben. Wir setzen voraus, dass es möglich sei, die Koeffizienten A_i und den Index m des Ausdruckes

$$\zeta_m = A_1\psi_1 + A_2\psi_2 + \ldots + A_m\psi_m$$

so zu bestimmen, dass $\zeta - \zeta_m$ und seine Hauptableitungen in R kleiner als eine vorgegebene Grösse bleiben, wie auch im übrigen

---

([1]) Im entgegengesetzten Fall muss nämlich die Fläche $z = \Delta w_m$ bei genügend grossem m Singularitäten « haarförmiger Art » aufweisen.

ζ gewählt sei (also $\lim \zeta_m = \zeta$ usw., wobei die Konvergenz eine gleichmässige sei.

Es ist leicht, Funktionen ψ_i zu bilden, die diese *interpolatorischen* Eigenschaften besitzen. Die Gleichung der Randkurve L lässt sich immer auf die Form bringen

$$F(x, y) = 0,$$

wo $\frac{\partial F}{\partial n}$ nicht identisch verschwindet und F im Innern von R von Null verschieden ist, im übrigen nebst seinen Hauptableitungen stetig und endlich bleibt. Für eine stetig gekrümmte Berandung wird die Gleichung oft von vornherein in dieser Form erscheinen: für ein konvexes Polygon mit den Seiten $\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$ kann man setzen

$$F = \Pi(\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i).$$

Für andere Polygone und zusammengesetzte Kurven ist F auch meist leicht zu bilden, was hier nicht ausgeführt werden soll.

Die Funktion $\frac{\zeta}{F^2}$ ist dann nur innerhalb ρ von Null verschieden und nebst ihren Hauptableitungen stetig und endlich. Wir legen den Koordinatenursprung in eine Ecke eines R enthaltenden Vierecks. Welches im übrigen auch ζ und ρ seien, lässt sich eine solche Funktion nebst ihren Hauptableitungen in der Form

$$\frac{\zeta}{F^2} = \sum\sum A_{mn} P_m\left(\frac{x}{a}\right) P_n\left(\frac{y}{a}\right) = \sum\sum B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a} \text{ usw.},$$

wo P_m, P_n Legendresche Polygone, a die Seite des Vierecks bedeuten, darstellen, wie durch Integration der entsprechenden gleichmässig konvergenten Reihen für $\frac{\partial^6 \frac{\zeta}{F^2}}{\partial x^3\, \partial y^3}$ unter Berücksichtigung des identischen Verschwindens von ζ ausserhalb R ohne weiteres folgt [1]. Setzt man also

$$(11)\qquad \psi_{mn} = F^2 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}, \qquad \text{oder } \psi'_{mn} = F^2 P_m\left(\frac{x}{a}\right) P_n\left(\frac{y}{a}\right),$$

---

[1] Auf dem Rande und auf den Kurvenstücken, auf denen F verschwindet und die ausserhalb R, aber innerhalb des Quadrats gelegen sind, hat $\frac{\zeta}{F^2}$ zunächst die Form $\frac{0}{0}$; die Entwickelungen ergeben hier bekanntlich den aus der Stetigkeit folgenden Wert, also 0.

so wird

$$\sum_{m,n=1}^{M} A_{mn}\psi_{mn}, \quad \text{bzw.} \sum_{m,n=1}^{M} B_{mn}\psi'_{mn}$$

gleichmässig gegen ζ konvergieren, und gleiches gilt von den Hauptableitungen; es ist z. B.

$$\lim_{M=\infty}\sum^{M} A_{mn}\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial x} = \lim_{M=\infty}\left[\frac{\partial(F^2)}{\partial x}\sum^{M} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\right.$$
$$\left. + F^2\sum^{M} A_{mn}\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\right].$$

Der Limes der Klammer ist aber gleich $\frac{\zeta}{F^2}\frac{\partial F^2}{\partial x} + F^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta}{F^2}\right) = \frac{\partial\zeta}{\partial x}$.

Da ferner auch auf L ausser $\psi_{mn} = 0$ noch gilt

$$\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial x} = 2F\left(\frac{\partial F}{\partial x}2\sin\frac{m\pi x}{a} + F\frac{m\pi}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\frac{n\pi y}{a} = 0,$$

und ebenso $\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial y} = 0$, so erfüllen die ψ_{mn} alle vorgeschriebenen Bedingungen.

Bei konvexen Polygonen wird man den Ansatz ψ'_{mn} bevorzugen, da F selbst ein Polynom ist; die Quadraturen lassen sich dann in *terminis finitis* ausführen.

Dass man auch auf manche andere Weise, insbesondere durch Einführung neuer Variabelen geeignete Funktionen ψ_i bilden kann, ist selbstverständlich und soll hier nicht näher ausgeführt werden.

Um nun bei diesen Voraussetzungen über die ψ_i zu zeigen, dass $w = \lim_{m=\infty} w_m$ wirklich das Integral J zu einem Minimum macht und somit die gesuchte Lösung ist, benutzen wir eine im wesentlichen von Herrn Hilbert [1] gegebene Methode.

Wir setzen zunächst die nur innerhalb R definierten Funktionen ψ_i und f ausserhalb dieses Bereichs gleich Null, wobei für ψ_i, $\frac{\partial\psi_i}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi_i}{\partial y}$ wegen der Randbedingungen die Stetigkeit nicht verletzt

---

(1) D. HILBERT, *Über das Dirichletsche Prinzip* (*Festschrift der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-physik. Klasse*), Berlin, 1901.

wird; ferner legen wir die Koordinatenachsen in der Weise, dass sie keinen Punkt mit R gemein haben. Sei dann

$$U_m(x, y) = \int_0^y \int_0^y \int_0^y \int_0^x \int_0^x \int_0^x w_m \, dx^3 \, dy^3;$$

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^y \int_0^y \int_0^x \int_0^x \int_0^x f(x, y) \, dx^3 \, dy^3,$$

so konvergieren, wie oben bewiesen wurde, U_m und seine Ableitungen bis zur vierten Ordnung, ferner

$$\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^4 \partial y^2} = \int_0^y \frac{\partial w_m}{\partial x} dy, \qquad \frac{\partial^6 U_m}{\partial y^4 \partial x^2}, \qquad \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^4 \partial y}, \qquad \frac{\partial^5 U_m}{\partial y^4 \partial x},$$

gleichmässig gegen eine Funktion U und ihre entsprechenden Ableitungen; ferner sind

$$\frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4 \partial y^3} = \frac{\partial w_m}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^7 U_m}{\partial y^4 \partial x^3} = \frac{\partial w_m}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3 \partial y^3} = w_m$$

auf L gleich Null. Durch partielle Integrationen lässt sich dann die Gleichung (8) in die Form bringen

$$o = \int\int_R (\Delta\Delta U_m - F) \frac{\partial^6 \zeta_m}{\partial x^3 \partial y^3} dx \, dx + \int_L \Psi \, ds,$$

wobei im Randintegral alle Glieder in U_m, die nicht verschwinden, konvergent sind, und nur die Hauptableitungen von ζ_m vorkommen. Endlich konvergieren auch die im Doppelintegral auftretenden Ableitungen $\frac{\partial^4 U_m}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 U_m}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 U_m}{\partial x^4}$. Die noch willkürlichen Koeffizienten A_i, die in ζ_m eingehen, wählen wir so, dass gleichmässig $\lim \zeta_m = \zeta$, wobei ζ irgend eine Funktion der oben definierten Art sei; gleiches kann, nach Voraussetzung, auch für die Hauptableitungen angenommen werden. Unter diesen Umständen können wir zum Limes übergehen, und da ζ nur innerhalb ρ von Null verschieden ist, verschwindet das Linienintegral, und es wird für jedes solche ζ

$$(12) \qquad o = \int\int_\rho (\Delta\Delta U - F) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3} dx \, dy.$$

Nun beweist aber Herr Hilbert a. a. O. folgendes Lemma:

Sei ζ eine innerhalb des Rechtecks einschliesslich dessen Seiten mit ihren Hauptableitungen endliche, stetige, abteilungsweise analytische Funktion, die auf den Seiten $x = a$, $x = a'$ des Recht-

ecks den Bedingungen $\zeta = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$ genügt; auf den Seiten $y = b$, $y = b'$, den Bedingungen $\zeta = 0$, $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0$. Wenn dann für jedes solche ζ das Integral

$$\int\int_{\rho} \Phi(x, y) \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3} dx\, dy$$

verschwindet, wo Φ eine in ρ einschliesslich der Seiten stetig verlaufende Funktion ist, so ist notwendig Φ von der Form

$$\Phi = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2,$$

wo X_0, X_1, X_2 stetige Funktionen von x allein, Y_0, Y_1, Y_2 solche von y allein sind.

Dieser Hilfsatz ist auf (12) anwendbar; denn aus der Hilbertschen Bedingung $\zeta = 0$ für $x = a$ folgt auch $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0$, ..., ebenso folgt aus $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ für $x = a$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x\, \partial y^2} = 0$, u. s. w., so dass sämtliche Hauptableitungen von ζ, mit Ausnahme von $\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3}$, auf den Rändern des Rechtecks verschwinden müssen; da ferner die spezielle Gestalt von ζ, die Herr Hilbert zu seinem Beweise benutzt, auch die Bedingung $\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3} = 0$ am Rande erfüllt, kann auch diese Bedingung ζ auferlegt werden: es schliessen sich also, mit andern Worten, die Werte von ζ und dessen Hauptableitungen stetig am Rande an die äussern Werte, nämlich Null an. Die von Herrn Hilbert gestellten Bedingungen sind also äquivalent den oben sub (4°) über ζ gemachten Voraussetzungen. Es folgt somit

$$\Delta\Delta U - F = X_0 + X_1 y + X_2 y^2 + Y_0 + Y_1 x + Y_2 x^2 \tag{13}$$

im Innern des Rechtecks ρ. Setzt man endlich, unter (α, β) die Koordinaten einer Ecke von ρ verstanden,

$$\begin{aligned} V = U &- \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\alpha^x dx^4 (X_0 + y X_1 + y^2 X_2) \\ &- \int_\beta^y \int_\beta^y \int_\beta^y \int_\beta^y dy^4 (Y_0 + x Y_1 + x^2 Y_2) \\ &+ 2 \int_\alpha^x dx^6 X_2 + 2 \int_\beta^y dy^6 Y_2, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\Delta\Delta V = F(x, y), \tag{14}$$

wo V und seine Ableitungen bis zur 4. Ordnung stetig sind. Nach Mathieu ist aber bei dieser Gleichung der Ausdruck des Greenschen Satzes der folgende :

$$V(x, y) = -\frac{1}{8\pi}\int\int_\rho r^2 \log r\, F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + T, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

wo T ein über den Rand von ρ genommenes Linienintegral ist, welches im Innern eine analytische, der Gleichung $\Delta\Delta T = 0$ genügende Funktion darstellt.

Aus diesem Satze, welcher nur als Ausdruck der Stetigkeitseigenschaften der Integrale partieller Differentialgleichungen uns wichtig ist, folgt zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{1}{8\pi}\int\int_\rho \frac{\partial}{\partial x}(r^2 \log r)\, F\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial T}{\partial x} \\
&= +\frac{1}{8\pi}\int\int_\rho \frac{\partial}{\partial \xi}(r^2 \log r)\, F\, d\xi\, d\eta + \frac{\partial T}{\partial x} \\
&= -\frac{1}{8\pi}\int\int_\rho r^2 \log r\, \frac{\partial F}{\partial \xi}\, d\xi\, d\eta + T',
\end{aligned}$$

wo T′ dieselben Eigenschaften hat wie T. Man erhält durch Wiederholung derselben Operation, und wegen $\frac{\partial^6 F(\xi, \eta)}{\partial \xi^3\, \partial \eta^3} = f(\xi, \eta)$

$$\frac{\partial^6 V}{\partial x^3\, \partial y^3} = \frac{\partial^6 U}{\partial x^3\, \partial y^3} = w = -\frac{1}{8\pi}\int\int_\rho r^2 \log r\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + T'',$$

woraus folgt :

Die Funktion $w = \lim\limits_{m=\infty} w_m$ *besitzt im ganzen Rechteck* ρ *endliche, stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung und genügt der Gleichung*

$$\Delta\Delta w = f(x, y), \tag{16}$$

und da die Lage und Grösse von ρ willkürlich sind, *gilt dieser Satz im Innern der ganzen elastischen Platte* R.

Aus $w = \lim\limits_{m=\infty} w_m$ folgt ferner, dass w am Rande verschwindet,

und gleiches gilt von $\frac{\partial w}{\partial n}$, wie sich aus dem Satze

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial w_m}{\partial n} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

leicht folgen lässt.

Es ist also w die gesuchte Lösung, die wir somit im engsten Anschluss an das Dirichletsche Prinzip konstruiert haben; womit gleichzeitig bewiesen ist, dass das Minimum des Integrals auch wirklich erreicht wird.

Dass sich diese Methode ohne Schwierigkeit auf andere Probleme ähnlicher Art, insbesondere auf das klassische Problem von Dirichlet, ausdehnen lässt, soll an anderer Stelle ausgeführt werden. Hier möge noch an einem Beispiel gezeigt werden, dass sie sich auch, und zwar mit Vorteil, auf die *Eigenschwingungen elasticher Körper* anwenden lässt.

Die Gleichung der Eigenschwingungen einer Saite lässt sich in der Form schreiben :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda^2 y = 0, \qquad \text{mit } y(+1) = 0, \qquad y(-1) = \text{an den Enden},$$

eine Forderung, die aus dem Minimumwerden des Integrals

$$J = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

mit der Bedingung

$$\int_{-1}^{+1} y^2 \, dx = 1$$

sich ergibt. Wir suchen die Lösung, die in diesem speziellen Falle durch trigonometrische Funktionen gegeben ist, nach der allgemeinen Methode durch Polynome zu approximieren. Das allgemeinste Polynom, welches den Symmetrie- und Randbedingungen der Fundamentallösung genügt, ist

$$y_n = (x^2 - 1)(a_1 - a_2 x^2 + a_3 x^4 + a_n x^n).$$

Ist also λ_n ein Lagrangescher Faktor, so haben wir die a_i so zu wählen, dass

$$\int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 - \lambda_n y_n^2\right] dx = \text{Min}, \qquad \text{mit} \int_{-1}^{+1} y_n^2 \, dx = 1.$$

Dies gibt ein System linearer, homogener Gleichungen für die a_i, dessen Determinante verschwinden muss, wodurch sich λ_n bestimmt als kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades. Dieses λ_n konvergiert rapide gegen das $\varkappa^2 = \frac{\pi^2}{4}$ der Fundamentallösung $y = \cos\frac{\pi x}{2}$. Für $n = 1$ ist $2\lambda_1 = 5$; für $n = 2$ ergibt sich $2\lambda_2 = 4.93488\ldots$; für $n = 3$, $2\lambda_3 = 4.934802217\ldots$ während $2\varkappa^2 = \frac{\pi^2}{2} = 4.934802200\ldots$ ist. Der Fehler ist also bei der dritten Approximation drei Milliardstel. Bei den Obertönen (grössere Wurzeln der algebraischen Gleichungen in λ_n) ist er wesentlich grösser. Es weicht ferner y_n von y in dritter Approximation nur in der sechsten Stelle ab. Da aus den Gleichungen folgt

$$\lambda_n = \text{Min}\left[\int_{-1}^{+1}\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx\right],$$

so ergibt sich von vornherein, dass die Schwingungszahl des Fundamentaltons das durch die Methode am genauesten gegebene Element ist.

XVII.

THEORIE DER TRANSVERSALSCHWINGUNGEN

EINER QUADRATISCHEN PLATTE MIT FREIEN RÄNDERN.

(*Annalen der Physik.* Vierte Folge. Band XXVIII, 1909. S. 737-786.)

Einleitung. — Zusammenfassung der Resultate.

Die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die transversalen Schwingungen ebener, elastischer Platten mit *freien* Rändern sind bekanntlich zuerst in teilweise unrichtiger Form von Sophie Germain und Poisson, in definitiver Gestalt aber von Kirchhoff im Jahre 1850 gegeben worden. Angeregt wurden diese Untersuchungen durch die schönen von Chladni 1787 entdeckten Figuren, die sich bilden, wenn auf eine schwingende Glas- oder Metallplatte etwas Sand gestreut wird; später wurde die Bezeichnung Chladnischer Klangfiguren auch bei den Schwingungen von Membranen angewandt.

Die von Kirchhoff erhaltene partielle Differentialgleichung ist vierter Ordnung, und es müssen am Rande zwei Differentialausdrücke dritter und zweiter Ordnung verschwinden, die von einer Elastizitätskonstante abhängen. Die grosse hieraus sich ergebende Komplikation des Problems erklärt es hinreichend, dass die Lösung bis jetzt nur im Falle des Kreises (Kirchhoff) gefunden wurde, wobei sich ein sehr befriedigender Anschluss an die Erfahrung ergab (1). Die Klangfiguren bestehen hier nur aus kon-

(1) Im Falle einer rechteckigen Platte, von der zwei gegenüberliegende Kanten *gestützt*, die beiden andern frei sind, lässt sich, wie W. Voigt (*Gött. Nachr.*, 1893, p. 225) gezeigt hat, die Integration elementar durchführen. Gleiches gilt von ringsum *gestützten* rechteckigen Platten.

zentrischen Kreisen und aus Radien, mehrfache Töne sind ausgeschlossen. Die Mannigfaltigkeit der Figuren ist somit viel kleiner als in den Fällen des Dreiecks, Vierecks usw.

Im folgenden entwickle ich am Beispiel der quadratischen Platten mit freien Rändern eine neue Integrationsmethode [1], die ohne wesentliche Änderungen auch auf rechteckige Platten angewandt werden kann, sei es mit freien, sei es auch mit teilweise oder ganz eingespannten oder gestützten Rändern. Theoretisch ist die Lösung in ähnlicher Weise sogar für eine beliebige Gestalt der Platte möglich; eine genaue Berechnung einer grösseren Anzahl von Klangfiguren, wie sie im folgenden für den klassischen Fall der quadratischen Scheibe durchgeführt ist, wird aber nur bei geeigneter Wahl der Grundfunktionen, nach welchen entwickelt wird, praktisch ausführbar. Für den Grundton, sofern grosse Genauigkeit nicht gefordert wird, führt das Verfahren für die meisten Platten durch den Ansatz von Polynomen zum Ziel.

Das Wesentliche der neuen Methode besteht darin, dass nicht von den Differentialgleichungen und Randbedingungen des Problems, sondern *direkt vom Prinzip der kleinsten Wirkung* ausgegangen wird, aus welchem ja durch Variation jene Gleichungen und Bedingungen gewonnen werden können. Dieses Variationsproblem wird nun durch ein gewöhnliches Maximum- und Minimumproblem für eine endliche Anzahl Parameter ersetzt, dessen Lösung elementar gelingt, womit dann eine erste Approximation gegeben ist. Dieselbe lässt sich *unbegrenzt* verbessern durch Vermehrung der Zahl der Parameter, und ergibt somit ein konvergentes Verfahren zur Integration. Dass die mathematische Form der ersten Approximationen willkürlich gewählt werden kann, ist hierbei ein wesentlicher Vorteil. Denn es ist leicht, eine experimentell bekannte Funktion durch eine genügende Anzahl Konstanten in einer geeigneten mathematischen Form beliebig genau darzustellen; unsere Methode erlaubt es nun, die Konstanten *a priori* aus der Theorie zu bestimmen, so dass die Ergebnisse der Erfahrung, in bezug auf die angenäherte Form der gesuchten Lösung, zur praktischen Durchführung der Integration benutzt wer-

(1) Vgl. die Abhandl. des Verf. : *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik* (*Œuvres*, XV, p. 192).

den können. Der Umstand, dass das Prinzip der kleinsten Aktion, welches die kürzeste Zusammenfassung der Gesetze der meisten physikalischen Erscheinungen gibt, auch in vielen Fällen den direktesten Weg zu deren mathematischen Behandlung und numerischen Berechnung weist, dürfte nicht ohne Bedeutung sein.

Für die Berechnung der Schwingungen einer quadratischen Platte mit ringsum freiem Rande führt man zweckmässigerweise die bekannten Funktionen $u_n(x)$ ein, welche die Amplitude des n^{ten} Obertones eines freischwingenden Stabes, dessen Länge gleich ist der Quadratseite, angeben. Die Koordinatenachsen seien durch den Mittelpunkt parallel zu den Seiten des Quadrates gelegt. Aus unten zu erörternden Gründen müssen die Funktionen $u_0(x) = \text{const.}$; $u_1(x) = x.\text{const.}$ eingeführt werden, die als Grundschwingungen des Stabes mit der Schwingungszahl Null aufzufassen sind; $u_2(x)$ ist also die Grundschwingung im gewöhnlichen Sinne, mit zwei Knotenpunkten; $u_m(x)$ besitzt m Knotenpunkte. Dann ergeben sich aus der Untersuchung folgende *Resultate* :

1. Sämtliche Eigentöne der Platte lassen sich bis auf einige Prozent darstellen durch die Formeln :

$$(1)\quad \begin{cases} w_{mn} = u_m(x)\,u_n(y) + u_m(y)\,u_n(x), \\ w'_{mn} = u_m(x)\,u_n(y) - u_m(y)\,u_n(x). \end{cases}$$

Den Indizes 00, 01, 10 entspricht die Schwingungszahl Null, die Platte bleibt eben.

2. Es existieren nur Doppeltöne, keine mehrfachen Töne. Die Doppeltöne entsprechen dem Falle, wo von den Indizes mn der eine gerade, der andere ungerade ist. Es ergeben dann w_{mn} und w'_{mn} dieselbe Tonhöhe; jede lineare Verbindung dieser zwei Funktionen entspricht einer möglichen Lösung. Die hierbei auftretende Schar von Klangfiguren hat die Eigenschaft, dass die Kurven sämtlich durch gewisse feste Punkte, von Strehlke Pole genannt, gehen, nämlich die Wurzeln des Gleichungssystems $w_{mn}(x,y) = 0$, $w'_{mn}(x,y) = 0$. In erster Annäherung sind dies die Wurzeln von $u_m(x) = 0$, $u_m(y) = 0$, bzw. $u_n(x) = 0$, $u_n(y) = 0$; die Abstände der Pole von den Seiten sind also

(bis auf 1-2 Proz.) gleich den Abständen der Knoten frei schwingender Stäbe von deren Enden.

3. Die Eigentöne lassen sich mit beliebiger Genauigkeit durch Summen von Ausdrücken der Form (1) darstellen mit Koeffizienten, die sich aus der Theorie bestimmen. Im folgenden ist die Rechnung bis auf $\frac{1}{1000}$ durchgeführt für m und n kleiner als 4. Die so berechneten Klangfiguren stimmen in sehr befriedigender Weise mit den genauen Beobachtungen von Strehlke überein. Die Korrektionen gegen (1) bleiben stets relativ klein.

4. Die Klangfiguren und Tonhöhen sämtlicher 35 Obertöne, für welche m und n kleiner als 7 sind, werden unten angegeben; für m und n kleiner als 4 sind sie nach den exakten Formeln berechnet, für grössere Indizes nach (1), wobei jedoch der Fehler beim Masstab der Zeichnung kaum wahrzunehmen wäre. Dies schien mir deshalb wünschenswert, weil über diese schönen Figuren durch ungenaue Beobachtung und theoretische Fehlschlüsse eine grosse Anzahl unrichtiger Ansichten in die Lehrbücher und Zeitschriften übergegangen ist, so dass selbst über die am leichtesten zu beobachtenden Fundamentaltöne Unsicherheit herrscht. In Chladnis Akustik erscheinen manche Eigenschwingungen als Doppeltöne, die es nur durch Inhomogenität des Materials und Mängel der Beobachtungsmethode sind. Die entsprechenden 46 Klangfiguren sind von Chladni grösstenteils erhalten und, wenn auch nur in rohen Umrissen, gezeichnet worden. Da sich die zum Hervorbringen einer bestimmten Figur nötige Unterstützung der Platte aus den unten gegebenen, genauen Figuren entnehmen lässt, wird deren experimentelle Herstellung erheblich erleichtert, während bisher über das Zustandekommen irgend einer Figur, besonders bei den höheren Obertönen, im wesentlichen der Zufall entschied.

5. Die vielumstrittene Frage, ob die scheinbar geraden Linien, die in vielen Figuren auftreten, auch wirklich gerade seien, ist dahin zu beantworten, dass dies nur für die Diagonalen und Seitenhalbierenden, wo schon Symmetriegründe es erfordern, gilt. Ausserdem ergeben sich aus (1) (angenähert) gerade Linien nur bei Doppeltönen und wenn $m = n$ ist. Die Resultate der Messungen Strehlkes, die vielfach angefochten wurden, stimmen

hierin mit der Rechnung genau überein; die geringen Abweichungen dagegen, die Strehlke auch bei den Diagonalen und Seitenhalbierenden gefunden hat, beruhen auf einem unten zu erörternden systematischen Fehler bei der Herstellung von Sandfiguren.

6. Die Tonhöhen der 35 Obertöne stimmen mit den von Chladni gegebenen innerhalb der zu erwartenden Fehler überein. Sie umfassen sechs Oktaven. In roher Annäherung sind die Tonhöhen gegeben durch die Formel

$$\nu = \mathrm{A}\sqrt{m^4 + n^4 + 2(1-\mu)\, m^2 n^2},$$

wo m, n ganze Zahlen, A, μ Konstanten der Platte sind.

7. Die bei Membranen gültigen Sätze : « Wo eine Knotenlinie den Rand trifft, steht sie auf demselben senkrecht; schneiden sich zwei oder mehr Knotenlinien im Innern der Platte, so bilden sie gleiche Winkel miteinander », gelten bei Platten nur ausnahmsweise oder angenähert.

8. In den Ecken ist die Lösung eine im allgemeinen *nicht analytische Funktion*, womit die Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Methoden bei diesem Problem genügend erklärt ist. Da die Lösung jedoch innerhalb der Platte endlich und stetig bleibt, wenn sie auch nicht in eine Potenzreihe entwickelbar ist, so bleiben analytische Darstellungen durch Polynome, Fourierreihen, nach den Funktionen w_{mn} fortschreitende Reihen usw., wie sie unsere Methode bringt, dennoch möglich und praktisch anwendbar.

9. Parallele zu den Seiten schneiden jede Figur in einer Anzahl Punkte, die *höchstens* gleich ist dem grösseren der beiden Indizes m und n und *mindestens* gleich dem kleineren. Andere, analoge Gesetze gestatten es, zu einer gegebenen Klangfigur die entsprechende Formel zu finden. Sind z. B. beide Diagonalen Knotenlinien, so hat man es mit w'_{mn} zu tun, wobei m, n beide gerade oder ungerade sind. Ist nur eine Diagonale vorhanden, so liegt wieder w'_{mn} mit m und n von ungleicher Parität (Doppelton) vor. Gehören die Seitenhalbierenden zur Figur, so ist einer oder sind beide Indizes ungerade usw.

10. Schliesslich wird die Methode, unter Anwendung von Polynomen, auf die schon von Kirchhoff berechnete Grundschwingung eines Kreises angewendet. Formeln mit zwei Konstanten genügen, um die Schwingungszahl desselben auf $\frac{1}{2}$ Proz. zu erhalten, d. h. mit derjenigen Genauigkeit, die für solche Versuche überhaupt in Betracht kommt. Der Rechnungsaufwand ist viel geringer wie bei der Kirchhoffschen Methode, und sämtliche Operationen durchaus elementar. In der oben zitierten Arbeit habe ich auch die Anwendbarkeit der Methode auf die Schwingungen von Saiten, unter Benutzung von Polynomen zur angenäherten Darstellung der Lösung, untersucht : bei Benutzung von nur drei Gliedern *ergibt sich der Fundamentalton der Saite auf drei Milliardstel genau.*

Die empirischen Formeln.

Nach diesen Ergebnissen der Theorie lässt sich leicht übersehen, in welchem Umfange und warum gewisse empirische Formeln, die zur Darstellung der Klangfiguren in mehr oder weniger roher Annäherung herangezogen worden sind, ihren Zweck erreichen. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass, wie unten gezeigt wird, $u_m(x)$ durch einen Cosinus bzw. einen Sinus angenähert darstellbar ist, ausgenommen in der Nähe des Randes. Ist die Quadratseite gleich 2, so sind, bis auf willkürliche Faktoren, die Lösungen :

$$u_{2m} = \cos\left(m - \frac{1}{4}\right)\pi x; \qquad u_{2m-1} = \sin\left(m - \frac{1}{4}\right)\pi x.$$

Ersetzt man dies noch durch $\cos m\pi x$ und $\sin(m + \frac{1}{2})\pi x$, so hat man die Funktionen, aus welchen durch Superposition Wheatstone [1] Klangfiguren ableiten wollte, wobei geradlinig begrenzte Figuren sich ergaben. Solche Lösungen entsprechen, roh angenähert, den Gleichungen (1) für m oder n gleich Null. Der Umstand, dass nur den Ausdrücken

$$\cos\pi x - \cos\pi y, \qquad \cos\pi x - \cos\pi y$$

beobachtete Figuren ungefähr entsprechen, nicht aber $\cos\pi x$, $\cos\pi y$ einzeln, wie es nach diesem Superpositionsprinzip sein

---

[1] Ch. Wheatstone, *Phil. Trans.*, 1833. — Vgl. Lord Rayleigh, *Sound*, § 227.

sollte, lässt genügend erkennen, dass es sich hier nur um einen in besonderen Fällen anwendbaren Kunstgriff handelt. Um so merkwürdiger ist es, dass auf Grund dieses unhaltbaren Prinzips bis in die neueste Zeit die exakten Versuche Strehlkes von experimenteller und theoretischer Seite her als ganz unrichtig bezeichnet wurden. Insbesondere glaubt R. König [1] aus ganz unzulänglichen experimentellen Ergebnissen die Geradlinigkeit der den Seiten parallelen Knotenlinien behaupten zu können, wie es das Superpositionsprinzip verlangt. Indem er die Grundgleichung für einen solchen durch geradlinige Knotenlinien begrenzten Bereich (also mit der Randbedingung : Verschiebung gleich o) integriert, glaubt S. Tanaka [2] allgemeinere und strengere Formeln zu erhalten. Dies ist aber schon deswegen nicht der Fall, weil übersehen ist, dass *eine* Randbedingung die Lösung gar nicht bestimmt, so dass Hr. Tanaka aus der unendlichen Reihe möglicher Lösungen eine *unrichtige* herausgewählt hat, wie es die Wahrscheinlichkeit ja verlangt, hätte er statt Produkten von Cosinus und Sinus, Produkte der Form $u_m(x)\,u_n(y)$ angesetzt, so hätte die Lösung eine wesentlich höhere Approximation dargestellt (wenigstens bei Doppeltönen und für $m = n$).

In seiner « Theory of Sound », § 226 ff., hat Lord Rayleigh die Wheatstonesche Untersuchung weitergeführt. Er geht aus von der Bemerkung, dass, wenn das Verhältnis μ der Querkontraktion zur Längsdilatation gleich Null ist (was allerdings bei keinem bekannten Körper zutrifft), partikuläre Lösungen des Problems existieren, die von einer Koordinate unabhängig sind, und einfach den Schwingungen elastischer Stäbe von gleicher Länge wie die Quadratseite entsprechen, also den Funktionen $u_m(x)$. Dabei ergeben $u_m(x)$ und $u_m(y)$ natürlich dieselbe Tonhöhe; sie können zu den Ausdrücken

$$u_m(x) + u_m(y), \qquad u_m(x) - u_m(y)$$

verbunden werden, welche in der Tat eine Reihe von Klangfiguren auf 1-2 Proz. genau darstellen. Allerdings ist die Forderung der Theorie, dass diese zwei Schwingungen gleiche Tonhöhe

---

(1) R. König (Paris), *Pogg. Ann.*, t. CXXII, 1864, p. 238.

(2) S. Tanaka, *Wied. Ann.*, t. XXXII, 1887, p. 670.

haben sollten, tatsächlich *nicht* erfüllt, und es existieren die einzelnen Schwingungen $u_m(x)$, bzw. $u_m(y)$, nur im irrealisierbaren Falle $\mu = 0$. In Wirklichkeit liegt hier jener Spezialfall der Formeln (1) vor, wo der eine Index gleich Null ist. Der Grundton der Platte ($m = n = 1$) wird hierdurch nicht dargestellt. Lord Rayleigh setzt dafür den angenäherten Ausdruck xy, der in der Tat mit (1) übereinstimmt, und, wie sich zeigen wird, von der richtigen Lösung nur wenig abweicht.

Das Variationsproblem und die Grundgleichungen.

Sei, wie oben, μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation, welches nach Poisson $\frac{1}{4}$, nach Wertheim $\frac{1}{3}$ sein soll, und jedenfalls zwischen 0 und 1 liegt; sei ferner E der Elastizitätsmodul [1], $2h$ die Dicke der Platte, dann ist nach Kirchhoff die potentielle Energie der Platte, vorausgesetzt, dass die Verschiebung $u\,(xy)$ senkrecht zur Ebene der Platte klein bleibe :

$$(1)\quad W = \frac{E h^3}{3(1-\mu^2)} \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy.$$

Die kinetische Energie wird, wenn ρ die Dichte bedeutet,

$$(2)\quad \rho h \int\!\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\,dy,$$

woraus sich durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergibt

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{E h^3}{3(1-\mu^2)} \Delta\Delta u = 0, \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Hat man es mit Eigenschwingungen zu tun, so ist

$$u = \sin 2\pi\nu(t - t_0)\, w(x, y)$$

zu setzen; dann ergibt sich die Differentialgleichung

$$(3)\quad \Delta\Delta w = \lambda w,$$

---

(1) In Kirchhoffs Bezeichnung ist $\mu = \frac{\theta}{1+2\theta}$, $E = 2K\frac{1+3\theta}{1+\theta}$.

wo

$$(4) \qquad \lambda = \frac{12\pi^2\nu^2(1-\mu^2)\rho}{E h^2}.$$

λ wird durch die Integration bestimmt; die Gleichung (4) ergibt dann die Anzahl Schwingungen pro Sekunde ν. Die Randbedingungen selbst findet man durch die Variation von ν. Den Faktor $\sin 2\pi\nu(t-t_0)$ kann man natürlich abwerfen und erhält für eine Seite des Quadrats senkrecht zur x-Achse

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

und ähnlich für die Seiten senkrecht zur y-Achse, durch Vertauschung von x und y.

Bei den hierbei nötigen Umformungen und partiellen Integrationen *längs des Randes* tritt an den Ecken desselben, wie H. Lamb (¹) zuerst bemerkt hat, ein Glied der Form $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\delta w$ auf, aus welchem die weitere *von Kirchhoff nicht bemerkte Bedingung* sich ergibt

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 0 \text{ in den Ecken.}$$

Der Stabilität der Platte entspricht es, dass der Jntegrand von (1) eine *stets positive* Form ist (²).

Ähnlich wie bei den Schwingungen von Membranen lassen sich diese Gleichungen ohne weiteres zu der Forderung zusammenfassen, *es soll das Integral*

$$(7) \quad J = \iint\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

unter der Bedingung

$$(8) \qquad \iint w^2\,dx\,dy = a = \text{gegebene Grösse}$$

(¹) H. Lamb, *Lond. Math. Soc. Proc.*, t. XXI, 1890, p. 70.

(²) Nämlich als Funktion von

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = u \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = v$$

betrachtet; die Diskriminante der Form $u^2 + v^2 + 2\mu uv$ ist gleich $4(1-\mu)$ und somit positiv für $\mu < 1$.

möglichst klein werden. Denn nach bekannten Sätzen der Variationsrechnung hat man letzteres Integral, mit einem konstanten Faktor $-\lambda$ multipliziert, zu (7) zu addieren, und nunmehr bei willkürlichem δw zu variieren, woraus sich ohne weiteres die Gleichungen (3), (5) und (6) ergeben. Aus dem Verschwinden der ersten Variation

$$(9) \qquad \int\int\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\ldots-2\lambda w\,\delta w\right)dx\,dy = 0$$

folgt, wenn man insbesondere $\delta w = \varepsilon w$ setzt, wo ε ein unendlich kleiner konstanter Faktor ist, die Gleichung

$$\int\int\left[2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\ldots-2\lambda w^2\right]dx\,dy = 0 \text{ für } w = \text{gesuchte Lösung},$$

also

$$(10) \qquad \lambda = \frac{\text{Minim. von J}}{a} = \frac{\text{J}(w)}{a}$$

ganz ähnlich wie bei den Membranen [1].

Ein wirkliches Minimum liegt nur vor beim Grundton w_0, welcher dem kleinsten Wert von λ entspricht. Will man für den nächsten Oberton w_1, dem der Wert λ_1 entsprechen möge, ein wirkliches Minimum erhalten, so hat man die weitere Bedingung

$$(11) \qquad \int\int w_0 w_1\,dx\,dy = 0$$

hinzuzufügen. Man hat dann zum Integranden von (9) noch ein Glied $\lambda' w_0\,\delta w_1$ zu addieren; für $\delta w_1 = \varepsilon w_1$ verschwindet dasselbe nach Voraussetzung, und es bleibt wieder die Gleichung (10), diesmal für λ_1 gültig [2].

Der Ansatz $\delta w_1 = \varepsilon w_0$ ergibt für λ' den Wert

$$\lambda' = -\int\int\left(2\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\ldots\right)dx\,dy,$$

und dieser Ausdruck ist gleich Null. Dies folgt aus der Variationsgleichung (9) für w_0, wenn $\delta w = \varepsilon w_1$, $w = w_0$ gesetzt wird

(1) Vgl. z. B. RIEMANN-WEBER, *Die partiellen Differentialgleichungen der Physik*, t. II, § 116 ff.; Braunschweig, 1901.

(2) Vgl. Lord RAYLEIGH, *Theory of Sound*, § 217.

und (11) berücksichtigt wird. Die Gleichungen (3), (5), (6) bleiben also ungeändert.

Für den Oberton w_n gelten ebenso die « Orthogonalitätsbedingungen »

$$\int\int w_n^2\,dx\,dy = a, \qquad \int\int w_n w_0\,dx\,dy = 0,$$
$$\int\int w_n w_1\,dx\,dy = 0, \qquad \ldots, \qquad \int\int w_n w_{n-1}\,dx\,dy = 0,$$

wobei, falls mehrfache Töne vorliegen, jede der linear unabhängigen Schwingungen w_i, die zu dem Ton gehören, zu berücksichtigen sind. Für irgend zwei Schwingungen w_m, w_n, die zu verschiedenen λ gehören, gilt also die Orthogonalitätsbedingung :

$$\int\int w_m w_n\,dx\,dy = 0.$$

Die Minimumsforderung (7) und (8), mit der wir es im folgenden zu tun haben werden, ist ersichtlich nur eine abgeänderte Form des Hamiltonschen Prinzips.

Die Integrationsmethode.

Die neue Methode zur Lösung von Variationsproblemen, die wir nun anwenden wollen, geht aus von folgendem *Interpolationsproblem :*

Seien $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)\ldots$, $\psi_n(x,y)\ldots$ eine Reihe von Funktionen, die wir (was hier zu selbstverständlich ist, um betont zu werden) als stetig (nebst den 1., 2., 3. und 4. Differentialquotienten) innerhalb der Platte annehmen. Wir bilden den Ausdruck :

$$w_n = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n \tag{12}$$

und fordern, es sollen die a_n so bestimmt werden bei gegebenem n, dass w_n möglichst wenig von einer der gesuchten Funktionen w, die das System (3), (5), (6) *befriedigen, innerhalb der Platte abweiche.* Wäre w numerisch gegeben, so läge hier ein gewöhnliches Interpolationsproblem vor.

Dasselbe ist insofern unbestimmt, als man eine « möglichst gute Annäherung » in verschiedenem Sinne auffassen kann. Eine genaue

Definition des « Gesamtfehlers », welcher möglichst klein werden soll, ist daher nötig.

Es liegt nahe, als Maasstab des Gesamtfehlers die Abweichung der potentiellen Energie von ihrem exakten Wert beim wirklichen Vorgang zu wählen; dies kommt aber auf die Forderung hinaus : *es sind die a_i so zu wählen, dass der Ausdruck*

$$(13)\quad J_n(a_1\ldots a_n)=\int\int\left[\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.-2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

unter der Bedingung

$$(14)\qquad U_n=\int\int w_n^2\,dx\,dy=a$$

möglichst klein werde. Da aber J_n eine quadratische Funktion der a_i ist, so liegt hier ein gewöhnliches Maximum- und Minimumproblem vor, welches, unter Einführung eines Faktors λ_n, durch das System homogener linearer Gleichungen gelöst wird

$$(15)\qquad \frac{\partial J_n}{\partial a_1}-\lambda_n\frac{\partial U_n}{\partial a_1}=0,\quad\ldots\quad \frac{\partial J_n}{\partial a_n}-\lambda_n\frac{\partial U_n}{\partial a_n}=0.$$

Mit andern Worten : *es ist der Ausdruck* (12) *an Stelle der unbekannten Funktion w im Variationsproblem einzusetzen, und die a_i so zu wählen, dass das Integral möglichst klein werde. Gleiches gilt allgemeiner für jeden Vorgang, der durch das Hamiltonsche Prinzip gegeben ist*, ja für die Lösung beliebiger Variationsprobleme, vorausgesetzt, dass sie gewissen, hier nicht zu erörternden Bedingungen genügen.

Unter Einführung der (bekannten) Konstanten

$$(16)\quad \alpha_{nm}=\alpha_{mn}=\int\int\left[\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2}\right.$$
$$+\frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi_m}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_m}{\partial y^2}$$
$$\left.+\mu\frac{\partial^2\psi_n}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x^2}+2(1-\mu)\frac{\partial^2\psi_n}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x\,\partial y}\right]dx\,dy,$$

$$(17)\quad \beta_{nm}=\beta_{mn}=\int\int\psi_m\psi_n\,dx\,dy$$

lässt sich (15) schreiben :

$$(18) \qquad \sum_{p=1}^{n} (\alpha_{pq} - \lambda_n \beta_{pq}) a_p = 0 \qquad \text{für} \qquad q = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Determinante dieses Systems von n homogenen, linearen Gleichungen für die a_i muss verschwinden, woraus sich λ_n als eine der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades ergibt, und die a_i bis auf einen zunächst willkürlichen, nachher aus (14) zu bestimmenden Faktor bestimmt werden. Jeder Wurzel $\lambda_n^{(i)}$ entspricht ein System der a_i. Bei einer nächst höheren Approximation w_{n+1} sind die a_i *neu* zu bestimmen.

Es zeigt sich nun, dass, wenn man die ψ_i geeignet wählt, der so erhaltene Ausdruck (12) *in der Tat eine Annäherung an die gesuchte Lösung darstellt, welche mit wachsendem n sich unbegrenzt verbessert*, so dass sich ein konvergentes Verfahren ergibt.

Wir betrachten zunächst den Grundton und wählen dementsprechend bei jeder Approximation die kleinste der Wurzeln der Determinantengleichung. Bezeichnen wir mit $d'w_n$ das totale Differential von w_n in bezug auf die a_i

$$d'w_n = \psi_1\, da_1 + \psi_2\, da_2 + \ldots + \psi_n\, da_n,$$

so muss $d'J_n - \lambda_n d'U_n = 0$ sein, d. h.

$$(19) \qquad \int\int \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} d' \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \ldots - \lambda_n w_n\, d'w_n \right) dx\, dy = 0.$$

Hier sind aber genau dieselben Schlüsse möglich, wie wir sie im vorigen Paragraphen für die Variation gemacht haben; es ist nur w durch w_n, λ durch λ_n, δ durch d' zu ersetzen. Wieder ist λ_n der kleinste Wert von J_n/a, und wenn n wächst, nimmt dieser kleinste Wert fortwährend ab, oder wenigstens niemals zu. Da nun aber J und J_n, wie oben bemerkt, positiv sind, so haben die λ_n eine untere Grenze λ, der sie beliebig nahe kommen. *Soll nun diese Grenze mit dem λ des Grundtones zusammenfallen, so müssen wir offenbar die ψ_i so wählen, dass durch einen Ausdruck der Form $A_1\psi_1 + \ldots + A_n\psi_n$ jede beliebige, den Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion w, nebst ihren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, innerhalb der*

Platte beliebig genau darstellbar sei: eine Forderung, die durch Polynome, Fourierreihen usw. befriedigt wird. Dann kann $\lim_{n=\infty} \lambda_n$ von dem kleinsten Wert von J/a für beliebige w nicht verschieden sein, und wir erhalten eine Reihe von Funktionen w_1, w_2, w_3, ... für die J gegen seinen Grenzwert konvergiert. Daraus folgt nach den Untersuchungen von D. Hilbert (¹) und B. Levi (²), *dass die w_i gegen die gesuchte Grenzfunktion konvergieren*, von gewissen Punkten vielleicht abgesehen, die hier ohne Interesse sind (³).

Nimmt man, statt der ersten, stets die *zweite* Wurzel der Determinantengleichungen, so gelangt man zum *ersten Oberton* usw.

Die Randbedingungen (5) und (6) sind um so genauer erfüllt, je näher λ_n seinem Grenzwert liegt. Gleiches gilt von der Differentialgleichung. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die Entwickelungen nach Polynomen, Fourierreihen usw. stets nur eine bestimmte Anzahl gliedweiser Differentiationen zulassen, so dass (was auch wirklich der Fall ist für die unten zu betrachtenden Entwickelungen nach den $u_m(x)\, u_n(y)$), sie möglicherweise gar nicht drei- und viermal gliedweise differentiierbar sind, und daher durch Einsetzen in (3) und (5) *nicht verifiziert* werden können. Es ist eine allgemeine Eigentümlichkeit interpolatorischer Funktionen, dass sie um die darzustellende Funktion hin- und herschwanken, und ihre sukzessiven Differentialquotienten bei gegebener Gliederzahl eine immer schlechter werdende Approximation geben, die bald ganz unbrauchbar wird, was dann der Divergenz der Reihen entspricht. So stellt der Ansatz I, p. 267 zwar die Amplituden w, nicht aber deren zweite Differentialquotienten befriedigend dar.

Entwickelungen nach Polynomen genügen stets den gestellten Anforderungen; man kann *also bei jeder Form der Platte* für ψ_i den Ausdruck $x^m y^n$ setzen. Denn da jede beliebige Funktion

(¹) D. Hilbert, *Math. Annalen*, t. LIX, 1902.

(²) B. Levi, *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. XXII, 1906.

(³) Diese Punkte können überall dicht liegen, aber nur so, dass sie bei einer Integration der Funktion über jedes beliebige Bereich ohne Einfluss bleiben. Bei den Fourierreihen und andern für die ψ_i in Betracht kommenden interpolatorischen Funktionen sind die Koeffizienten aber durch Integrale gegeben, auf welche die singulären Stellen somit ohne Einfluss bleiben; die Reihen nehmen daher in solchen Stellen den aus der Stetigkeit folgenden Wert an, d. h. Funktionen mit solchen Singularitäten sind als Grenzwerte ausgeschlossen.

durch Polynome stets beliebig angenähert darstellbar ist, so gilt dies insbesondere für den zweiten Differentialquotienten einer gegebenen Funktion $f(x)$; es ist, wenn nur $d^2 f/dx^2$ den sogenannten Dirichletschen Bedingungen genügt,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \varepsilon_n(x),$$

wo $|\varepsilon_n|$ kleiner als jede beliebige Zahl gemacht werden kann für genügend grosse n. Somit folgt

$$f(x) = f(o) + x f'(o) + \frac{a_0 x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+2}}{n(n+1)} + y_n(x),$$

wo von y_n gleiches wie von ε_n gilt; hier haben wir also einen angenäherten Polynomialausdruck von $f(x)$, der zweimal differentiierbar ist. Ob er es auch dreimal ist, hängt von der Natur von f''', aber auch vom gewählten Interpolationsmodus ab. Dies lässt sich ohne weiteres auf Funktionen mehrerer Variabeln ausdehnen.

Ob und wie oft Fourierreihen differentiierbar sind, hängt von analogen Umständen ab, wie sie unten bei den Entwickelungen nach den $u_m(x)$, $u_n(y)$ zu besprechen sein werden.

Ist die Variation δw selbst gewissen Bedingungen unterworfen (was bei eingespannten Platten der Fall ist, wo am Rande

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \qquad \delta w = 0, \qquad \frac{\partial \delta w}{\partial n} = 0$$

sein muss), so müssen alle ψ_i diese Bedingungen erfüllen. Diesen Fall habe ich in der eingangs zitierten Arbeit eingehend besprochen.

Dass die vorliegende Methode auch auf viele andere Probleme, insbesondere auf Gleichgewichtsprobleme, die ja stets aus einer Minimumsforderung ableitbar sind, angewendet werden kann, braucht kaum erwähnt zu werden. Es ist nun zu zeigen, dass sie auch wirklich, bei geeigneter Wahl der ψ_i, numerisch brauchbar ist.

Entwickelungen nach den Eigenschwingungen von Stäben mit freien Enden.

Die Amplitude $u(x)$ eines an beiden Enden freien Stabes genügt bekanntlich [1] der Gleichung

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = k^4 u, \tag{20}$$

und an beiden Enden den Bedingungen

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0, \tag{21}$$

woraus sich u als eine Summe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ergibt, während k Wurzel einer bekannten transzendenten Gleichung ist. Jeder Wurzel k_m derselben entspricht ein Eigenton $u_m(x)$, und es gilt die *Orthogonalitätsbedingung*

$$\int u_m u_n \, dx = 0 \qquad \text{für} \qquad m \neq n, \tag{22}$$

das Integral über die Länge des Stabes erstreckt. Um die Symmetrieverhältnisse gehörig hervortreten zu lassen, wähle man als Anfangspunkt $z = 0$, die Mitte des Stabes; ferner bestimme man den willkürlichen, konstanten Faktor, mit dem jede Lösung noch multipliziert werden kann, durch die Bedingung

$$\int u_m^2 \, dx = 1, \tag{23}$$

und setze endlich der Einfachheit halber als Längeneinheit die halbe Stablänge an, so dass $x = \pm 1$ die Koordinaten der Endpunkte sind. Dann ergeben sich für die u_m, wie man leicht findet, die Ausdrücke:

---

[1] Zur Theorie der Schwingungen freier Stäbe vgl. man z. B. Lord RAYLEIGH, *Sound*, § 160 b.

Für gerade m:

$$u_m = \frac{\mathrm{ch}\,k_m \cos k_m x - \cos k_m\,\mathrm{ch}\,k_m x}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 k_m + \cos^2 k_m}}, \tag{24}$$

wobei $\mathrm{tang}\,k_m + \mathfrak{tang}\,k_m = 0$.

Für ungerade m:

$$u_m = \frac{\mathrm{sh}\,k_m \sin k_m x + \sin k_m\,\mathrm{sh}\,k_m x}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 k_m - \sin^2 k_m}}, \tag{25}$$

wobei $\mathrm{tang}\,k_m - \mathfrak{tang}\,k_m = 0$.

Beide Gleichungen lassen die Wurzel $k = 0$ als erste zu: in der Tat erfüllen auch die Funktionen

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathrm{const.}, \qquad (k_0 = 0), \tag{26}$$

$$u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,x, \qquad (k_1 = 0) \tag{27}$$

alle Bedingungen (20) bis (23), und sind als Eigenschwingungen mit der Schwingungszahl Null einzuführen, bei welchen der Stab geradlinig bleibt. Die Notwendigkeit dieser Einführung wird sich unten zeigen.

Bei dieser Festsetzung entspricht $m = 2$ dem gewöhnlichen Grundton mit zwei Knotenpunkten; allgemein gibt jedesmal der Index m die Anzahl der Knotenpunkte der entsprechenden Schwingung an. Die Schwingung ist eine gerade Funktion von x für gerade m, eine ungerade für ungerade m.

Die Wurzeln k_2, k_4, k_6, ... von $\mathrm{tang}\,k_m + \mathfrak{tang}\,k_m = 0$ unterscheiden sich wenig von $m\pi/2 - \pi/4$; es ist $k_2 = 2{,}3650$; k_4 ist von $(2 - \frac{1}{4})\pi$ nur in der 6ten Stelle verschieden, k_6 noch weniger von $(3 - \frac{1}{4})\pi$.

Die Wurzeln k_3, k_5, k_7, ... von $\mathrm{tang}\,k_m - \mathfrak{tang}\,k_m = 0$ sind

$$k_3 = 3{,}92660, \qquad k_5 = \left(2 + \frac{1}{4}\right)\pi, \qquad k_7 = \left(3 - \frac{1}{4}\right)\pi, \qquad \ldots$$

Allgemein ist für $m > 2$ auf fünf Stellen genau

$$k_m = \left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}. \tag{27 a}$$

Für $m > 2$ ist auf vier Stellen genau

$$(28)\qquad u_m(x) = \cos\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi}$$

für gerade m, und

$$(29)\qquad u_m(x) = \sin\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi x}{\sqrt{2}\operatorname{sh}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi}$$

für ungerade m.

Die hyperbolischen Teile sind für kleine x um so kleiner, als m grösser ist; für qualitative Betrachtungen kommen sie nur in der Nähe der Endpunkte in Betracht, und es reduzieren sich die u_m auf

$$\cos\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{2} \quad \text{und} \quad \sin\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{2}.$$

Infolge von (22) und (23) lassen sich, wie bekannt, die Koeffizienten einer Entwickelung

$$(30)\qquad f(x) = A_0 u_0 + A_1 u_1 + \ldots + A_m u_m(x) + \ldots$$

durch Multiplikation mit u_m und Integration, wie bei den Fourierreihen, bestimmen; es ist

$$(31)\qquad A_m = \int_{-1}^{+1} f(x)\, u_m(x)\, dx.$$

Schreibt man dies

$$A_m = \frac{1}{k_m^4}\int_{-1}^{+1} f(x)\frac{d^4 u_m}{dx^4}\, dx$$

und integriert partiell, so wird, da

$$\frac{d^3 u_m}{dx^3} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 u_m}{dx^2} \quad \text{für} \quad x = \pm 1$$

verschwinden,

$$(32)\qquad A_m = \frac{1}{k_m^4}\int_{-1}^{+1} f''(x)\, u''_m\, dx,$$

und weiter

$$A_m = \frac{1}{k_m^4}\left[f''\frac{du_m}{dx}\right]_{-1}^{+1} - \frac{1}{k_m^4}\int_{-1}^{+1} f'''\frac{du_m}{dx}\, dx.$$

Da $\frac{1}{k_m}\frac{du_m}{dx}$ mit 1 vergleichbar bleibt für jedes m, und f'', f''' endlich und stetig sein sollen, so ergibt sich, dass für beliebige m, $A_m k_m^3$ unter einer festen Zahl bleibt; oder, da $k_m = (m - \frac{1}{2})\pi/2$, *dass die A_m wie $1/m^3$ abnehmen.* Die Reihe (30) konvergiert also absolut und gleichmässig, nebst ihrer ersten, gliedweise genommenen Ableitung. Die zweite Ableitung konvergiert nur noch wie $1/m$. Da (Lord Rayleigh, *loc. cit.*) die u''_m die Eigenfunktionen von an beiden Enden eingespannten Stäben sind, so entspricht die Formel

$$f''(x) = A_0 u''_0 + A_1 u''_1 + \ldots + A_m u''_m(x) + \ldots$$

der Entwickelung nach solchen Eigenfunktionen, wie sich auch aus dem Ausdruck (32) der A_i ergibt. Dass diese Entwickelung, wenn auch nicht absolut, so doch in der Art einer Fourierreihe konvergiere, darf wohl vorausgesetzt werden. Daraus folgt dann die zweimalige gliedweise Differentiierbarkeit der Reihe (30).

Nun sind aber die Formeln (31) und die folgenden Betrachtungen ebensogut anwendbar, wenn man einige der u_i weglässt; soll die Reihe gegen $f(x)$ und nicht gegen eine andere Funktion konvergieren, so ist es wichtig, festzustellen, dass das Orthogonalsystem der u_i ein *vollständiges ist*, d. h. dass nicht etwa weitere Funktionen U_i existieren, die den Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} U_m u_n \, dx = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} U_m U_n \, dx = 0 \qquad \text{für} \qquad m \neq n$$

genügen. Dass die gewöhnlich nicht betrachteten Funktionen $u = \text{const.}$, $u = x\,\text{const.}$ hierher gehören, ist schon bemerkt worden, und wir haben sie als u_0 und u_1 bereits eingeführt. *Ohne diese Einführung aber konvergiert $\sum A_i u_i(x)$ gar nicht gegen $f(x)$, sondern gegen*

$$f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 = f(x) - \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{\sqrt{2}}\,dt - x\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, f(t)\, t\, dt.$$

Dies scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein [1]; da der Ausdruck xy nahezu dem Grundton einer quadratischen Platte

[1] Insbesondere nicht von Lord Rayleigh, *Sound*, Art. 168.

entspricht, erkennt man wie *praktisch* wichtig diese Einführung ist.

Dass damit aber die u_i wirklich zu einem vollständigen Orthogonalsystem ergänzt sind, lässt sich nach einer Methode von Liouville zeigen, und ist in letzter Instanz darauf zurückzuführen, dass nun jeder Ausdruck [1]

$$A_0 u_0 + A_1 u_1 + \ldots + A_m u_m \tag{33}$$

höchstens m Wurzeln besitzt, über die man offenbar willkürlich verfügen kann, durch geeignete Wahl des A_i; dies war *vor* der Adjunktion von u_0, u_1 (mit keiner bzw. einer Wurzel) nicht der Fall: bei den Entwickelungen nach den Eigenfunktionen eingespannter Stäbe ist keine Adjunktion notwendig (und möglich), weil der Grundton im Innern *keine* Wurzel, der erste Oberton nur eine usw. hat.

In einem analogen Fall bemerkt nun Liouville, dass, wenn man $f(x)$ durch (33) darstellen will und der Methode der kleinsten Quadrate entsprechend die A_i so wählt, dass das Integral des Fehlerquadrates

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \ldots]^2 \, dx \tag{34}$$

ein Minimum wird, man für die A_i eben die Formel (31) erhält. Ist $(a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m)\varepsilon$ das totale Differential von (33) nach den A_i (ε = unendlich klein, die a_i willkürliche Zahlen), so ergibt die Forderung des Minimums:

$$\varepsilon \int_{-1}^{+1} [f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \ldots - A_m u_m] \times [a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m] \, dx = 0$$

für beliebige a_i. Daraus folgt, dass $f(x)$ durch $A_0 u_0 + \ldots$ mindestens $m+1$ mal geschnitten wird, sonst könnte man über die Wurzeln von $a_0 u_0 + \ldots$ so verfügen, dass sie mit den Wurzeln des ersteren Ausdruckes zusammenfallen, und das Integral wäre positiv und nicht $= 0$. (Mehrfache Wurzeln sind als Grenzfälle zu betrachten.) Lässt man nun m unbeschränkt wachsen, so

[1] Der Beweis dieses Satzes von Sturm lässt sich genau wie bei Riemann-Weber, *Part.-Differentialgl.*, t. II, p. 69 führen.

schneidet $A_0 u_0 + \ldots + A_m u_m$ die Funktion $f(x)$ in einer unbeschränkt wachsenden Zahl von Punkten; die angenäherte Funktion *oszilliert* um die exakte hin und her. Schliesslich verwandelt sich $A_0 u_0 + \ldots$ in eine gleichmässig konvergente Reihe, und $f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \ldots$ ist eine stetige Funktion mit unendlich vielen Nullpunkten. Sind dieselben gleichmässig verteilt, so ist sie Null; besitzen sie q einzelne Häufungsstellen, so bleibt sie in kleinen Bereichen um dieselben $< \varepsilon$, und hat ausserhalb nur eine endliche Anzahl p von Nullstellen. Dies ist aber nicht möglich: man könnte, sobald $m > p + q$ ist, die Kurve

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m$$

so legen, dass sie überall gleiches Vorzeichen hat wie

$$f(x) - A_0 u_0 - A_1 u_1 - \ldots.$$

und das Integral wieder positiv bliebe (da die kleinen Bereiche auf das Vorzeichen ohne Einfluss bleiben). *Somit konvergiert* $\sum A_m u_m$ *wirklich gegen* $f(x)$.

In ganz entsprechender Weise lässt sich eine geeigneten Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion zweier Variabeln $f(x, y)$ innerhalb des Vierecks $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe

$$(35)\quad f(x, y) = A_{00} u_0(x) u_0(y) + A_{10} u_1(x) u_0(y) + A_{01} u_0(x) u_1(y) + A_{11} u_1(x) u_1(y) + A_{02} u_0(x) u_2(y) + \ldots$$

entwickeln mit

$$(36)\qquad A_{mn} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y)\, u_m(x)\, u_n(y)\, dx\, dy,$$

die zweimal gliedweise nach x und y differentiiert werden darf, und wie $\sum \sum 1/(m^3 n^3)$ konvergiert. *Dies ist die Entwickelung, die wir für unser Problem anwenden wollen.* Wir setzen also

$$(36a)\qquad \psi_{mn}(x, y) = u_m(x)\, u_n(y)$$

und es genügen diese Ausdrücke den oben S. 275 und 277 für die ψ_i gestellten Forderungen. Gleichzeitig erkennt man, dass (35) im allgemeinen nicht 3- oder 4mal differentiiert werden darf, wie schon oben hervorgehoben wurde, d. h. dass zur Berechnung dieser

Differentialquotienten, bzw. zum direkten Einsetzen der Lösung in die Grundgleichung und Randbedingung, unsere Ausdrücke sich nicht eignen werden. *Durch diesen Verzicht wird aber gerade die Darstellung der Lösung selbst wesentlich vereinfacht.*

Bevor wir zur wirklichen Berechnung des A_{mn} übergehen, ist es nötig, uns von den allgemeinen Eigenschaften der Lösung $w(x, y)$ ein Bild zu machen.

Allgemeine Eigenschaften der Lösung.

Sei $w(x, y)$ irgend eine Funktion, die den Gleichungen (3), (5), (6) genügt, und λ der durch (10) gegebene zugehörige Eigenwert. Die Symmetrie dieser Gleichungen und der Ränder lässt ohne weiteres die Richtigkeit folgender Sätze erkennen:

Ist $w(x, y)$ eine Lösung, so ist auch $w(-x, +y)$ eine zu demselben λ gehörige Lösung. Falls also w einem einfachen Ton entspricht, sind diese zwei Ausdrücke höchstens durch das Vorzeichen verschieden (welches durch die Bedingung (8) nicht festgelegt ist), d. h.:

Einfache Töne entsprechen Funktionen, die in bezug auf jede der beiden durch den Mittelpunkt des Quadrates gehenden zu den Seiten parallelen Achsen entweder gerade oder ungerade sind.

Mehrfache Töne können stets aus ebensolchen Funktionen linear zusammengesetzt werden.

Führt man ebenso die Substitution $x = y'$; $y = x'$; $w(x, y) = w'(x', y')$ aus, so ist in bezug auf die neuen Variabeln die Form der Gleichungen ungeändert geblieben; $w'(x', y')$ muss ebenfalls eine Lösung sein, die zu demselben λ wie $w(x, y)$ gehört, und sich bei einfachen Tönen von $w(x, y)$ nur um das Vorzeichen unterscheiden kann.

Einfache Töne entsprechen also entweder in x und y symmetrischen oder in x und y antisymmetrischen Lösungen: d. h. im ersteren Fall ändert sich w nicht bei Vertauschung von x und y; im zweiten ändert es sein Vorzeichen.

Mehrfache Töne entsprechen Summen solcher Lösungen.

Dies bedingt, dass wir bei den Entwickelungen nach den $u_m(x)u_n(y)$ uns darauf beschränken können, die diesen verschiedenen Symmetriebedingungen genügenden Lösungen einzeln zu berücksichtigen. Ist w gerade in x und in y, so werden nur gerade $u_m(x)$, $u_n(y)$, d. h. gerade m, n auftreten. Ist es ausserdem symmetrisch, so wird $A_{mn} = A_{nm}$; im andern Falle $A_{mn} = -A_{nm}$. *So werden wir zu den anfangs besprochenen Entwickelungen nach den Aggregaten* $u_m(x)\,u_n(y) \pm u_n(x)\,u_m(y)$ *geführt.*

Über den Verlauf der Knotenlinien lässt sich folgendes feststellen :

1. wenn sich zwei oder mehr Knotenlinien im Innern schneiden, so bilden sie nicht notwendig gleiche Winkel untereinander, wie man nach Analogie der Schwingungen von Membranen erwarten könnte ;

2. ebensowenig steht eine den Rand schneidende Knotenlinie immer senkrecht auf ihm.

Zum Beweis entwickle man in der Nähe des betreffenden Schnittpunktes w nach Potenzen von x und y. Für den Fall zweier in $x = 0$, $y = 0$ sich schneidender Knotenlinien ist ausser $w = 0$ auch $\partial w/\partial x = 0$, $\partial w/\partial y = 0$ für $x = 0$, $y = 0$ zu setzen ; also $w = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + a'x^3 + \ldots$ Bei Membranen ist nun die Gleichung $\Delta w + k^2 w = 0$ identisch zu erfüllen, woraus für die Glieder niedrigster Ordnung folgt $a + b = 0$; dies ist aber die Bedingung, damit die zwei durch $ax^2 + 2\,bxy + cy^2 = 0$ definierten Geraden sich rechtwinklig schneiden. Bei Platten dagegen bringt die Gleichung $\Delta\Delta w = k^2 w$ die Glieder m^{ter} Ordnung mit den Gliedern $m - 4^{\text{ter}}$ Ordnung in Zusammenhang ; insbesondere bleiben die Glieder zweiter und dritter Ordnung ganz willkürlich ; die Knotenlinien können sich unter beliebigen Winkeln schneiden. Wenn die Winkel, wenigstens bei Rechtecken, dennoch meist $90°$ betragen, so liegt dies in manchen Fällen an Symmetriegründen, öfter aber auch daran, dass, wie schon hervorgehoben, im Innern eines Quadrates für w die angenäherten Ausdrücke

$$\cos k_m x \cos k_n y \pm \cos k_n x \cos k_m y,$$
$$\cos k_m x \sin k_n x \pm \cos k_n x \sin k_m y, \quad \text{usw.}$$

gelten, welche der Gleichung $\Delta w + (k_m^2 + k_n^2)\,w = 0$ genügen,

und somit die Eigenschaften von Membranenschwingungen haben.

Am Rande ergeben die Bedingungen für die Glieder erster Ordnung in w gar nichts, für die Glieder $ax^2 + 2bxy + cy^2$ die Gleichung $a + \mu c = 0$, aus der über den Winkel der Knotenlinie gegen den Rand nichts geschlossen werden kann.

Interessanter sind die Ergebnisse an einer Ecke. Hier muss $(\partial^2 w / \partial x \partial y) = 0$ sein. Ferner ist

$$(37) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$(38) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0$$

nebst den Ableitungen dieses Ausdruckes nach y,

$$(39) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$(40) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = 0$$

nebst den Ableitungen dieses Ausdruckes nach x,

endlich

$$(41) \qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda w$$

eine Gleichung, die beliebig oft nach x und y differentiiert werden darf. Wir legen die Koordinatenachsen in die zwei sich in der Ecke schneidenden Seiten und suchen die Koeffizienten der Taylorschen Entwickelung

$$w = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

wo u_m ein homogenes Polynom m^{ten} Grades in x und y ist, zu bestimmen. Aus (37) und (39) und $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ folgt zunächst, dass u_2 identisch verschwindet, wenn $\mu \neq 1$ ist, was wir annehmen. Ebenso ergeben (38) und (40), nebst den Differentialquotienten von (37) nach y, (39) nach x, dass $u_3 \equiv 0$ ist. Danach weicht w von dem linearen Ausdruck $u_0 + u_1 = a + bx + cy$ nur in den Gliedern vierter Ordnung ab, was zuerst von Lamb (*loc. cit.*) bemerkt worden ist. *An den Ecken wird die Platte nicht merklich deformiert.*

Für die fünf Koeffizienten der Glieder vierter Ordnung ergeben

sich durch Differentiation von (37) bis (40) für

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{x=0,\, y=0}, \quad \text{usw.}$$

vier Gleichungen, aus (41) eine fünfte; die Koeffizienten derselben sind also sämtlich bestimmt und proportional a:

$$u_4 = \frac{\lambda a}{48(1-\mu)}(x^4 + y^4 - 6\mu x^2 y^2).$$

Ebenso sind die Glieder fünfter Ordnung linear in b, c; diejenigen sechster und siebenter Ordnung verschwinden usw. Für die Glieder m^{ter} Ordnung ergeben sich durch $m - 2$ fache Differentiation von (37) nach y, (39) nach x; durch $m - 3$ fache von (38) nach y, (40) nach x vier Gleichungen; die Bildung der $m - 3$ Differentialquotienten von (41) vervollständigt die Zahl der $m + 1$ Gleichungen, durch welche alle Koeffizienten von u_m durch solche von u_{m-4}, also schliesslich durch a, b, c und λ ausgedrückt werden können.

Die Entwickelung von w in einer Ecke hängt also nur ab von den vier Konstanten a, b, c, λ. Da wir aber über den weiteren Verlauf des Randes in einiger Entfernung und über die daselbst zu erfüllenden Bedingungen hierbei nichts vorausgesetzt haben, so müsste die Entwickelung von w eine unendliche Anzahl Konstanten enthalten; *der von diesen Konstanten abhängige Teil von w ist an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ nicht nach Potenzreihen entwickelbar, die Lösung ist in den Ecken nicht analytisch.* Nur sehr ausnahmsweise, z. B. in dem oben zitierten, von Lord Rayleigh bemerkten Spezialfall $\mu = 0$ sind *einige* der Lösungen analytisch, weil es dann gelingt, mit den drei zur Verfügung stehenden Konstanten den Bedingungen an den andern Rändern zu genügen.

Es ist wahrscheinlich, dass um die Ecken herum die Lösung mehrdeutig ist, so dass die analytische Fortsetzung von $w(x, y)$ über den einen Rand hinaus, um die Ecke herum bis zum andern Rand und ins Innere, hier nicht die Ausgangswerte von w ergibt.

Für den Fall eingespannter Platten ist ein entwickelbarer Bestandteil überhaupt nicht vorhanden, wie man leicht findet.

Berechnung der Koeffizienten.

Es seien die Koordinatenachsen durch den Mittelpunkt des Quadrates parallel zu den Seiten gelegt *und als Längeneinheit die halbe Quadratseite* gewählt, so dass für $u_m(x)$, $u_n(y)$ die Ausdrücke (24), (25) gelten.

Man hat nunmehr einen Ausdruck der Form

$$w_s = \sum_0^s \sum_0^s A_{mn} u_m(x) u_n(y) \tag{42}$$

in das Integral

$$V(A_{mn}) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \, \partial y} \right)^2 - \lambda_s w_s^2 \right] dx\, dy \tag{43}$$

einzutragen und die Koeffizienten von A_{mn}^2, $A_{mn} A_{pq}$ zu berechnen. Dies führt zur Berechnung der Grössen:

$$\omega_{mn} = \int_{-1}^{+1} u''_m(x) u_n(x) dx = \frac{2k_m^4 (u'_m u_n - u_m u'_n)_{x=1}}{k_m^4 - k_n^4}; \tag{44}$$

$$\omega_{0m} = \omega_{1m} = 0;$$

$$\alpha_{mn} = \alpha_{nm} = \int_{-1}^{+1} u'_m u'_n \, dx = \frac{2(k_m^4 u_m u'_n - k_n^4 u_n u'_m)_{x=1}}{k_m^4 - k_n^4}; \tag{45}$$

$$\alpha_{0n} = \alpha_{n0} = 0;$$

$$\int_{-1}^{+1} u''_m u''_n \, dx = 0 \qquad (m \neq n); \qquad \int_{-1}^{+1} u''^2_m \, dy = k_m^4.$$

Man erhält diese Formeln durch Berücksichtigung der Differentialgleichung für u_m und u_n und partielle Integration. Für $m = n$ sind sie ungültig; hier ergibt sich

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_{mm} &= \frac{-k_m^2(\mathfrak{ch}^2 k_m - \cos^2 k_m)}{\mathfrak{ch}^2 k_m - \cos^2 k_m} - 2k_m \frac{\cos^2 k_m \, \mathfrak{ch}^2 k_m \, \mathrm{tang}\, k_m}{\mathfrak{ch}^2 k_m + \cos^2 k_m} \\ &\quad \text{für } m \text{ gerade}, \qquad (\omega_{00} = 0), \\ \omega_{mm} &= \frac{-k_m^2(\mathfrak{sh}^2 k_m + \sin^2 k_m)}{\mathfrak{sh}^2 k_m - \sin^2 k_m} + 2k_m \frac{\mathfrak{sh}^2 k_m \sin^2 k_m \, \mathfrak{cot}\, k_m}{\mathfrak{sh}^2 k_m - \sin^2 k_m} \\ &\quad \text{für } m \text{ ungerade}, \qquad (\omega_{11} = 0), \end{aligned} \right. \tag{46}$$

und

$$(47)\quad \begin{cases} \alpha_{mm} = \dfrac{k_m^2(\mathfrak{ch}^2 k_m - \cos^2 k_m)}{\mathfrak{ch}^2 k_m + \cos^2 k_m} + 6k_m \dfrac{\cos^2 k_m \mathfrak{ch}^2 k_m \operatorname{\mathfrak{tang}} k_m}{\mathfrak{ch}^2 k_m - \cos^2 k_m} \\ \qquad \text{für } m \text{ gerade}, \qquad (\alpha_{00} = 0), \\ \alpha_{mm} = \dfrac{k_m^2(\mathfrak{sh}^2 k_m + \sin^2 k_m)}{\mathfrak{sh}^2 k_m - \sin^2 k_m} + 6k_m \dfrac{\sin^2 k_m \mathfrak{sh}^2 k_m \cot k_m}{\mathfrak{sh}^2 k_m - \sin^2 k_m} \\ \qquad \text{für } m \text{ ungerade}, \qquad (\alpha_{11} = 3). \end{cases}$$

Begnügt man sich mit vier genauen Ziffern, so ist

$$\frac{\cos k_m}{\sqrt{\mathfrak{ch}^2 k_m + \cos^2 k_m}} = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{2}}; \qquad \frac{\sin k_m}{\sqrt{\mathfrak{sh}^2 k_m - \sin^2 k_m}} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{für } m > 2,$$

$$\frac{\cos k_2}{\sqrt{\mathfrak{ch}^2 k_2 + \cos^2 k_2}} = \frac{-(1 - 0{,}0173)}{\sqrt{2}},$$

und es folgt für $m > 2$, $n > 2$:

$$(48)\qquad \omega_{mn} = \sigma \frac{4k_m^4(k_m - k_n)}{k_m^4 - k_n^4},$$

wo $\sigma = 0$, wenn m und n verschiedener Parität sind; $= (-1)^{\frac{m+n}{2}}$, wenn m und n gerade; und $= -(-1)^{\frac{m+n}{2}}$, wenn m und n ungerade sind. Es ist $k_m = (m - \frac{1}{2})\pi/2$ zu setzen

$$(49)\qquad \omega_{mm} = -k_m^2 - k_m,$$

$$(50)\qquad \begin{cases} \alpha_{mn} = \sigma \dfrac{4(k_m^4 k_n - k_n^4 k_m)}{k_m^4 - k_n^4}, \\ \alpha_{mm} = +k_m^2 + 3k_m. \end{cases}$$

Mit einer Genauigkeit von mindestens 2 Proz. sind diese Formeln auch für m und n gleich 2 anwendbar, und es ist

$$(50\,a)\quad \begin{cases} \omega_{0n} = 0, \qquad \omega_{n0} = 2k_n(-1)^{\frac{n}{2}} \begin{cases} \text{für } n \text{ gerade}, \\ = 0 \text{ für } n \text{ ungerade}, \end{cases} \\ \alpha_{0n} = \alpha_{n0} = 0, \\ \omega_{1n} = 0, \qquad \omega_{n1} = 2\sqrt{3}(k_n - 1)(-1)^{\frac{n-1}{2}} \\ \alpha_{11} = 3, \qquad \alpha_{1n} = \alpha_{n1} = 2\sqrt{3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases} \begin{cases} \text{für } n \text{ ungerade}, \\ = 0 \text{ für } n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Der Koeffizient von A_{mn}^2 im Integral V wird nun

$$(51)\qquad k_m^4 + k_n^4 + 2\mu\omega_{mm}\omega_{nn} + 2(1-\mu)\alpha_{mm}\alpha_{nn} - \lambda_s = a_{mn}^{mn} - \lambda_s.$$

Der Koeffizient von $2\,A_{mn}A_{pq}$

$$\mu(\omega_{mp}\omega_{qn}+\omega_{pm}\omega_{nq})+2(1-\mu)\alpha_{nq}\alpha_{mp}=a_{mn}^{pq} \tag{52}$$

und es sind die Gleichungen zu lösen

$$\left\{\begin{array}{l} 0=(a_{00}^{00}-\lambda_s)A_{00}+a_{01}^{00}A_{01}+a_{10}^{00}A_{10}+\ldots+a_{ss}^{00}A_{ss}, \\ 0=a_{00}^{01}A_{00}+(a_{01}^{01}-\lambda_s)A_{01}+a_{10}^{(01)}A_{10}+\ldots+a_{ss}^{01}A_{ss}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0=a_{00}^{(ss)}A_{00}+a_{01}^{ss}A_{01}+a_{10}^{ss}A_{10}+\ldots+(a_{ss}^{(ss)}-\lambda_s)A_{ss}. \end{array}\right. \tag{53}$$

Zur Vereinfachung wird man die aus der Symmetrie der Lösung sich ergebenden Beziehungen zwischen den A_{mn} sogleich einführen : bei einer in x und y geraden symmetrischen Lösung kommen nur gerade Indizes in Betracht und es ist $A_{mn}=A_{nm}$; die Zahl der Unbekannten reduziert sich so bei gegebenem s beträchtlich. Ähnliches gilt für die andern Fälle von Symmetrie. Nichtsdestoweniger wäre eine Rechnung auf drei bis vier Stellen für eine grössere Anzahl von Eigenschwingungen undurchführbar, wenn das Gleichungssystem nach dieser Reduktion nicht die Eigenschaft hätte, dass die a_{mn}^{mn} der Diagonalglieder erheblich grösser sind und mit m und n rascher wachsen als die übrigen a_{mn}^{pq}. Infolgedessen lässt sich das System (53) mit einem geringen Aufwand an Rechnung durch sukzessive Approximationen leicht lösen. Wir wollen dies für den Fall in x und y ungerader, aber symmetrischer Schwingungen zeigen, zu welchen der Grundton der Platte gehört. Wir wählen für μ den Wert $\mu=0,225$ (vgl. unten), und entwickeln bis zu den Gliedern in u_5, setzen also $s=5$. Es sei abkürzend $u_m(y)=v_m$ gesetzt und

$$w=A_0u_1v_1+A_1(u_1v_3+v_1u_3)+A_2u_3v_3+A_3(u_1v_5+u_5v_1) \\ +A_4(u_3v_5+u_5v_3)+A_5u_5v_5.$$

Das System (53) wird hier

$$\left\{\begin{array}{l} 0=(13.95-\lambda)A_0-32.08\,A_1+18.60\,A_2+32,08\,A_3-37.20\,A_4+18,60\,A_5, \\ 0=-16,04\,A_0-(411,8-\lambda)A_1-120,0\,A_2-133,6\,A_3+166,8\,A_4+140\,A_5, \\ 0=+18,60\,A_0-240,0\,A_1+(1686-\lambda)A_2-218,0\,A_3-1134\,A_4-330\,A_5, \\ 0=+16.04\,A_0-133.6\,A_1+109,0\,A_2-(2945-\lambda)A_3-424\,A_4+179\,A_5, \\ 0=-18.6\,A_0+166,8\,A_1-567\,A_2-424\,A_3+(6303-\lambda)A_4+1437\,A_5, \\ 0=-18.6\,A_0+280\,A_1-330\,A_2+358\,A_3-2874\,A_4+(13674-\lambda)A_5. \end{array}\right. \tag{54}$$

Würde sich das System wirklich auf seine Diagonalglieder be-

schränken, so wäre die kleinste Wurzel $\lambda = 13,95$, die nächste $411,8$ usw.; für die erste bleibt A_0 willkürlich, die andern A_i sind Null; für die zweite gilt dies für A_1 usw. Da es auf den konstanten Faktor nicht ankommt, setzen wir, um den Grundton zu erhalten, $A_0 = 1$, und in erster Annäherung $\lambda_0 = 13,95$. Dann ergeben die fünf letzten Gleichungen die übrigen A_i. *Wesentlich ist nun, dass diese A_i gegen 1 klein sind,* so dass sie nur mit geringerer Genauigkeit berechnet zu werden brauchen. Beschränkt man sich auf vier Stellen beim Schlussresultat, *so sind sämtliche Operationen, auch schon die Berechnung der ω_{mn} und α_{mn} und ihrer in den $a_{mn}^{(pq)}$ auftretender Produkte, mit dem Rechenschieber ausführbar*, wodurch bei dem Charakter dieser Operationen die Rechnung sich sehr einfach und sicher gestaltet. Direkt mit vier Stellen zu berechnen sind bloss die in den ω_{mn}, α_{mn} und den $a_{mn}^{(mn)}$ auftretenden Potenzen der k_i.

Wir berechnen für die A_i eine erste Approximation, indem wir alle Glieder rechts vernachlässigen neben den Diagonalgliedern, es wird also

$$A_1 = \frac{+16,04}{411,8 - 13,95}, \qquad A_2 = \frac{-18,60}{1686 - 13,95}, \qquad A_3 = \ldots.$$

Diese A_i sind ersichtlich sämtlich klein. Aus der ersten Gleichung folgt eine kleine Korrektion für λ:

$$\delta\lambda = -32,08\,A_1 + 18,60\,A_2 + 32,08\,A_3 - 37,20\,A_4 + 18,60\,A_5.$$

Diese Werte der A_i und $\lambda + \delta\lambda$ setzen wir in (54) ein; das Ergebnis wird in den einzelnen Gleichungen nicht Null sein, aber doch eine kleine Zahl. Die Korrektionen der A_i, die dadurch nötig werden, berechne man wieder unter alleiniger Berücksichtigung der Diagonalglieder; eine oder zwei sukzessive Korrektionen genügen meist, um die vierte Stelle bis auf wenige Einheiten festzustellen.

Hat man eine erste Approximation schon berechnet, unter Berücksichtigung einer kleineren Anzahl Glieder der Entwickelung, so wird man sie bei der Berechnung der erweiterten Formel vorteilhaft benutzen können. Im vorliegenden Falle ist es z. B. zweckmässig, zuerst das System

$$(55)\qquad \begin{cases} (13,95 - \lambda)A_0 - 32,08\,A_1 = 0 \\ -16,04\,A_1 + (411,8 - \lambda)A_1 = 0 \end{cases}$$

zu lösen, welches dem Ansatz

$$w = A_0 u_1 v_1 + A_1 (u_1 v_3 - v_1 u_3)$$

entspricht; diese Werte trägt man in das vollständigere System (54), und berechnet nun die Korrektionen δA_0, δA_1 und $A_2 \ldots A_5$ in der angegebenen Weise ([1]).

Die Korrektion, die λ erfährt, ist *stets negativ*, weil λ das Minimum des oben besprochenen Integrals ist, welches bei der Anwendung von mehr Konstanten notwendig abnehmen muss.

Nimmt man $A_1 = 1$, $\lambda = 411,8$ und berechnet ebenso die Korrektionen, so erhält man den nächsten Oberton, der dieselbe Symmetrie besitzt. Wieder ist die Korrektion von λ negativ; dies tritt jedoch erst ein für das System (54), nicht schon für die erste Approximation (55). Der Grund liegt darin, dass das neue λ einem Minimumwert des Integrals nur entspricht, wenn die Bedingung

$$\int\int w_0 w \, dx \, dy = 0 \qquad (w_0 = \text{Grundton})$$

hinzugefügt wird, welcher durch den Ansatz (55) nur roh genügt wird, während (54) sie innerhalb der Genauigkeit der Rechnung erfüllt. In dieser Bedingung liegt auch, wenn mehrere Oberschwingungen mittels (54) berechnet worden sind, eine einfache Kontrolle der Rechnung. Denn ist $w = A_0 u_1 v_1 + \ldots$ die eine derselben, $w' = A'_0 u_1 v + \ldots$ irgend eine andere, so ist

$$\int\int w w' \, dx \, dy = A_0 A'_0 + 2 A_1 A'_1 + A_2 A'_2 + 2 A_3 A'_3 + 2 A_4 A'_4 + A_5 A'_5.$$

und dieser Ausdruck muss einen Betrag haben, der zu vernachlässigen ist.

Der Umstand, dass die Diagonalglieder grösser sind und rascher wachsen als die übrigen, gilt auch für höhere Approximationen, und folgt daraus, dass die ω_{mn}, α_{mn} $(m \neq n)$, die in die andern

---

([1]) Die erste Annäherung gibt, wenn $A_0 = 1$ ist:

$A_1 = 0,0403$; $A_2 = -0,0053$; $A_3 = -0,0036$; $A_4 = +0,0019$; $A_5 = -0,0022$.

Exakt ist:

$A_1 = 0,0394$; $A_2 = -0,0040$; $A_3 = -0,0034$; $A_4 = -0,0011$; $A_5 = -0,0019$;

und $\lambda = 12,43$ statt $13,95$.

Glieder eingehen, nach (48), (49) und (50) wesentlich langsamer wachsen als die ω_{mm} und $\varkappa_{nn}$, k_m^+ und k_n^+ der Diagonalglieder. Für höhere Obertöne, die komplizierten Funktionen entsprechen, ist natürlich die Entwickelung weniger rasch konvergent; immerhin bleibt auch hier der Fehler, der bei Beschränkung auf das Hauptglied $u_m v_n \pm v_m u_n$ entsteht, von der Ordnung $\frac{1}{10}$, und dies bedingt, wegen des raschen Oszillierens der u, v für grössere m, für die Klangfiguren nur Fehler von etwa 1 Proz.; für die λ von 5-10 Proz.

Die Aggregate $u_0 v_0$; $u_0 v_1 \pm u_1 v_0$, die linearen Funktionen von x und y entsprechen, ergeben $\lambda = 0$: dies ist selbstverständlich, da die Platte eben bleibt. Aus dem Ausdruck von J verschwinden sie und können daher bei allen Rechnungen weggelassen werden. *Bei Entwickelungen nach den Eigenfunktionen w_s der Platte aber müssen sie beibehalten werden, ebenso wie u_0 und u_1 für den Stab.*

Im folgenden sind die höheren Approximationen für diejenigen Töne angegeben, die in erster Annäherung den Formeln

$$u_m v_n \pm v_m u_n$$

entsprechen, mit $m < 4$, $n < 4$; es sind die Glieder bis zu $m = n = 5$ beibehalten, womit die dritte Stelle bis auf 1-2 Einh. sichergestellt ist. Dies bedingt für die Klangfiguren eine noch geringere Unsicherheit, die ganz innerhalb der Beobachtungsfehler liegt.

Dem Aggregat $u_m v_n + v_m u_n$ entspricht stets ein etwas grösseres λ, also ein höherer Ton, als dem Aggregat $u_m v_n - v_m u_n$, wenn m und n beide gerade oder ungerade sind. In dem andern Falle liegt ein Doppelton vor, und es sind die Schwingungen $w = u_m v_n$, $w = v_m u_n$ auch einzeln möglich, ferner jede lineare Verbindung der Form $A u_m v_n + B v_m u_n$.

Zur Berechnung der *Klangfiguren*, d. h. der Linien, in welchen w verschwindet, wird man zweckmässig die beobachteten Werte als erste Approximation benutzen [1]. Bei der Berechnung der

---

[1] Tabellen für u_2, u_3 gibt Lord Rayleigh, *Sound*, § 178; für vier Stellen sind die zweiten Differenzen bei der Interpolation zu berücksichtigen. Zur direkten Berechnung auch der u_4, u_5, ... benutzt man mit Vorteil die *Tafeln der Funktionen cos und sin* (Kreis- und Hyperbelfunktionen) von Dr. Carl Burrau, Berlin, 1907.

Korrektionen, die stets sehr klein sind, genügt die Berücksichtigung des Hauptgliedes der Formel. Von m und $n = 4$ an bis m und $n = 7$ sind die Klangfiguren auf Grund der vereinfachten Formel $u_m v_n \pm u_n v_m$ berechnet, da hier genaue Beobachtungen nicht vorliegen und auch schwer möglich sind.

Die Tonhöhen.

Aus einem bekannten λ ergibt sich nach (4) die Anzahl Schwingungen pro Sekunde

$$(56) \qquad \nu = \frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{E\lambda}{3\rho(1-\mu^2)}}.$$

Genaue Beobachtungen über die *absoluten* Tonhöhen unter genauer Angabe der Elastizitätskonstanten, des Verhältnisses $2h$ der Dicke zur halben Seite der Platte und der Dichte ρ des betreffenden Materials sind mir nicht bekannt. Die *relativen* Tonhöhen der verschiedenen Obertöne gegen den Grundton, wenn für diesen der Ton G gesetzt wird, hat Chladni [1] angegeben. Es ist die gleichmässig temperierte Skala vorausgesetzt; ein + bedeutet, dass der wahrgenommene Ton etwas höher war, ein — dass er tiefer war. Leider ist von Chladni nicht angegeben, ob er Metall oder Glas benutzt habe, wodurch der Wert von μ erheblich unsicher wird; vielleicht hat er Platten aus beiderlei Material in einzelnen Fällen gebraucht, im allgemeinen jedoch zeigt die Übereinstimmung mit unserer für Glas ausgeführten Rechnung, dass er Glasplatten benutzt hat. Durch den Übergang zu Metall wird die Tonhöhe leicht um eine Sekunde verändert, wie dies beim Kreis schon die Berechnungen von Kirchhoff gezeigt haben.

Die Tonhöhen, die auf Grund exakterer Formeln (unter Berücksichtigung höherer Approximationen) berechnet sind, stimmen *genau* mit Chladnis Angaben überein. Es sind dies die Hauptschwingungen, in der Tabelle mit * bezeichnet. Die übrigen, nach dem einfachen Ansatz $w = u_m v_n \pm v_m u_n$ berechneten, sind teilweise um $\frac{1}{2}$ Ton zu hoch. Dies wird uns nicht wundern, da ja die entsprechenden λ, wie oben bemerkt, stets zu gross sind, und zwar

(1) E.-F.-F. CHLADNI, *Akustik*, Leipzig, 1802, p. 138.

sind sie bei den Hauptschwingungen, wie sich gezeigt hat, meist um 5-10 Proz. zu gross, was einem viertel bis einem halben Tone entspricht. So ist λ aus dem Ansatz $u_1 v_1$ gleich 13,74; bei genauer Berechnung dagegen 12,43 (vgl. oben). Würde man die höheren λ auf den Grundton beziehen, wie er in erster Approximation gegeben ist, so würden die Töne um $\frac{1}{2}$ Ton zu erniedrigen sein, und die Übereinstimmung wäre so gut wie sie überhaupt, bei der oben erwähnten Unsicherheit, erwartet werden kann.

In der folgenden Tabelle sind die Schwingungen nach ihren Tonhöhen geordnet, und jedesmal die charakteristischen Hauptglieder $u_m v_n \pm v_m u_n$ angegeben, nebst den zugehörigen λ. Das Zeichen $\pm$ deutet einen Doppelton an.

Tabelle der Tonhöhen ($\mu = 0,225$).

HAUPTGLIEDER	λ	BER.	BEOB.	HAUPTGLIEDER	λ	BER.	BEOB.
$u_1 v_1$	12,43	G*	G	$u_3 v_4 \pm u_4 v_3$	3240	g_3 +	fis_3
$u_0 v_2 - v_0 u_2$	26,40	d^*	d	$u_5 v_2 \pm u_2 v_5$	3927	a_3 +	gis_3 +
$u_0 v_2 + v_0 u_2$	35,73	e^*	e	$u_4 v_4$	5480	ais_3 +	ais_3
$u_1 v_2 \pm u_2 v_1$	80,8	h^*	h	$u_0 v_6 - u_6 v_0$	5500	c_4 —	— (²)
$u_0 v_3 \pm u_3 v_0$	237,1	gis_1^* +	gis_1 +	$u_3 v_5 - u_5 v_3$	5570	c_4 —	ais_3 —
$u_1 v_1$	266,0	ais_1^* —	ais_1^* —	$u_0 v_6 + u_6 v_0$	5640	c_4 —	— (²)
$u_1 v_3 - u_3 v_1$	316,1	h_1^*	h_1	$u_1 v_6 \pm v_1 u_6$	6036	c_4 +	c_4 —
$u_1 v_3 + u_3 v_1$	378	cis_2^*	cis_2	$u_3 v_5 + u_5 v_3$	6303	cis_4	c_4 —
$u_2 v_3 \pm u_3 v_2$	746	fis_2^* +	fis_2	$u_2 v_6 - u_6 v_2$	7310	d_4 +	cis_4 +
$u_0 v_4 - v_0 u_4$	886	gis_2	gis_2	$u_2 v_6 + u_6 v_2$	7840	dis_4 —	d_4 —
$u_0 v_4 + v_0 u_4$	941	gis_2 +	gis_2 +	$u_5 v_4 \pm u_4 v_5$	9030	e_4	dis_4
$u_1 v_4 \pm u_4 v_1$	1131	ais_2	ais_2 —	$u_6 v_3 \pm u_3 v_6$	10380	f_4	e_4
$u_3 v_3$	1554	c_3 +	c_3	$u_5 v_5$	13670	g_4 +	fis_4 +
$u_2 v_4 - u_4 v_2$	1702	d_3 —	cis_3	$u_6 v_4 - u_4 v_6$	13840	g_4 +	g_4 +
$u_2 v_4 + u_4 v_2$	2020	dis_3	d_3	$u_6 v_4 + u_4 v_6$	15120	gis_4 +	g_4 +
$u_0 v_5 \pm v_0 u_5$	2500	f_3 —	f_3 —	$u_6 v_5 \pm u_5 v_6$	20400	h_4	ais_4 —
$u_1 v_5 - v_1 u_5$	2713	fis_3	fis_3 —	$u_6 v_6$	28740	d_5	— (²)
$u_1 v_5 + v_1 u_5$	2945	fis_3 +	fis_3 (¹)				

Dabei ist, um daran zu erinnern, $u_m = u_m(x)$, $v_n = u_n(y)$ gesetzt.

(¹) Von Chladni von dem vorigen Ton nicht getrennt.
(²) Von Chladni nicht beobachtet.

Die Übereinstimmung der mit * bezeichneten Schwingungen mit Chladnis Beobachtung ist eine vollkommene, während nach Kirchhoffs Rechnungen für den Kreis Abweichungen sich zeigen, die für $\mu = \frac{1}{4}$ (Poisson) kleiner sind als für $\mu = \frac{1}{3}$ (Wertheim). Dies zeigt, dass Chladni auch hier mit Glasscheiben operiert hat, und dass für Glas μ jedenfalls kleiner als $\frac{1}{4}$ ist, und von dem hier benutzten Wert 0,225 nur wenig abweicht.

Benutzt man für eine Schwingung den angenäherten Ausdruck $w_{mn} = u_m(x)\,u_n(y) \pm u_n(x)\,u_m(y)$, so berechnet sich, wie schon hervorgehoben, das zugehörige angenäherte λ aus der Formel

$$\lambda = \frac{J}{a},$$

wo J_{mn} das für $w = w_{mn}$ gebildete Integral (7) ist, während

$$a = \int\int w_{mn}^2\,dx\,dy.$$

Setzt man hierin die für u_m (p. 281) gegebenen Ausdrücke ein, so wird

$$(57)\qquad \lambda = k_m^4 + k_n^4 + \mu(2\omega_{mm}\omega_{nn} \pm \omega_{mn}^2 \pm \omega_{nm}^2) - 2(1-\mu)(\alpha_{mm}\alpha_{nm} \pm \alpha_{mn}^2) \qquad m \neq n,$$

$$(58)\qquad \lambda = 2k_m^4 - 2\mu\omega_{mm}^2 - 2(1-\mu)\alpha_{mm}^2 \qquad \text{für} \qquad m = n.$$

Bei $m = n$ kommt das untere Vorzeichen natürlich nicht in Betracht; bei den Doppeltönen verschwinden in λ die Glieder mit den doppelten Vorzeichen, so dass beide Vorzeichen dasselbe λ ergeben.

Nach den Gleichungen (48) bis (50 a) sind die ω_{mm}, α_{mm} zweiten Grades in den k_i; die α_{mn} und ω_{mn} für $m \neq n$ dagegen ersten Grades. Zur Aufstellung einer *angenäherten Formel für* λ beschränken wir uns auf die Glieder vierten und dritten Grades; dann können wir die $\pm$ Glieder in λ gegen die übrigen vernachlässigen (wodurch je zwei benachbarte Töne in einem vereinigt werden). Für die ω_{mm}, α_{mm} benutzen wir die Ausdrücke (49), (50), (50 a), dann ergibt sich angenähert

$$(59)\qquad \lambda = (k_m^2 + k_n^2)^2 - 2\mu k_m^2 k_n^2 + (6 - 8\mu)k_m k_n(k_m + k_n).$$

wobei

$$k_m = \frac{\pi}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)$$

ist; für $m = 0$ und $m = 1$ ist dagegen $k_0 = k_1 = 0$ zu setzen.

Ist $n = 0$, so schwingt die Fläche angenähert wie ein Stab, und es stimmen, wie bei einem solchen, die Tonhöhen mit den Quadraten der ungeraden Zahlen angenähert überein, wie schon Chladni bemerkte. Für $n = 1$ ergibt sich dasselbe Resultat; nach der Formel (57) sind die entsprechenden Töne aber in Wirklichkeit etwas verschieden, die Abweichung ist bei den Grundtönen relativ am bedeutendsten. Sind endlich m und n genügend gross, so ergibt sich das *asymptotische Gesetz der* λ

$$\lambda = [m^4 + n^4 + 2(1-\mu)m^2n^2]\left(\frac{\pi}{2}\right)^4. \tag{60}$$

Die Schwingungszahlen sind der Wurzel aus λ proportional.

Die systematischen Fehler bei der Beobachtung Chladnischer Klangfiguren.

Für eine Anzahl von Klangfiguren hat Strehlke [1] sehr genaue Messungen an verschiedenen sorgfältig gearbeiteten quadratischen und kreisförmigen Platten aus Spiegelglas angestellt. Insbesondere hat er drei quadratische Platten benutzt, deren Dicke etwa $\frac{1}{70}$, $\frac{1}{65}$ und $\frac{1}{40}$ der Seite war. Die Beobachtungen stimmen für die drei Platten innerhalb 0,001 der Seitenlänge, manchmal noch genauer. Diese Genauigkeit erweist sich jedoch für den Vergleich mit der Theorie als illusorisch und ist durch den Umstand ermöglicht, dass Strehlke die Unterstützung und die Erregung durch den Violinbogen für eine bestimmte Klangfigur bei allen Versuchen genau an dieselben Stellen verlegte. Welcher Art nun bei diesen Versuchen die wichtigste systematische Fehlerquelle ist, ergibt die Diskussion der Messungsergebnisse in folgender Weise :

In einer Klangfigur (vgl. unten Fig. 21), in welcher, der Symmetrie nach, die beiden Diagonalen Knotenlinien sein sollten, fin-

---

[1] F. STREHLKE, *Repertorium der Physik*, von H. W. Dove, t. III, p. 112 ff. Berlin, 1839; vgl. auch *Pogg. Ann.*, t. XCV, 1855, p. 577; t. CXLVI, 1872, p. 319.

det Strehlke an deren Stelle zwei hyperbelartige Kurven, deren Scheitel im Abstand von 0,037 (die Quadratseite als Einheit gesetzt) lagen. Auch Chladni gibt an, dass er dies Verhalten *unter Umständen* beobachtet habe. Theoretisch ist dies ausgeschlossen; denn durch eine Drehung um 90° entsteht bei solcher Dissymmetrie eine neue Figur, die derselben Tonhöhe entsprechen muss; es läge also ein Doppelton vor und eine unendliche Anzahl von Figuren müsste möglich sein; dies widerspricht der Erfahrung, die zweite Figur muss also mit der ersten identisch sein, die Diagonalen sind Knotenlinien. Wie kommt diese Abweichung zustande?

Es ist klar, dass zur Überwindung der Reibung die Schwingungsamplitude ein gewisses, von der Beschaffenheit der Oberfläche und des Sandes abhängiges Minimum $\pm\varepsilon$ überschreiten muss; unterhalb desselben bleibt der Sand unbeweglich. Wo sich die zwei Durchmesser schneiden, ist aber ausser $w = 0$ auch

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Bezogen auf die Durchmesser als Achsen ist der Ausdruck für die Amplitude $w(x, y)$ in erster Annäherung

$$w = Axy \qquad (A = \text{const.}),$$

und der Sand bleibt in indifferentem Gleichgewicht innerhalb eines Gebietes, welches von den zwei Hyperbeln

$$\pm\varepsilon = Axy$$

begrenzt wird. Ob der Sand sich hier gleichmässig verteilt oder gegen die einen oder andern Ränder des Gebietes gedrängt wird (beide Fälle sind beobachtet), hängt von der Stelle ab, wo der Bogen angelegt wird, von welcher aus, neben dem betrachteten Ton, auch Nebentöne von verschiedener, zum Teil beträchtlicher Höhe sich als Wellen ausbreiten und eine Bewegung des Sandes bewirken können. Theoretisch ist der Vorgang nicht zu übersehen wegen der Reflexionen an den Seiten des Quadrates. Bei dem besprochenen Versuch von Strehlke ist der Sand an die Ränder des Gebietes getrieben worden, womit die beträchtliche Abweichung von der Theorie sich erklärt. Allein dieselbe Ursache ist auch in

der ganzen Ausdehnung der Klangfiguren wirksam, wenn auch hier der Anstieg von der Amplitude Null zu $\pm\varepsilon$ rascher erfolgt, der mögliche Fehler also kleiner wird. Aber mehrere Tausendstel der Seitenlänge beträgt er unter allen Umständen, so dass die Übereinstimmung der Versuche Strehlkes auf weniger als $\frac{1}{1000}$ der Seite untereinander, und ihre Abweichung um mehrere Tausendstel, ja um beinahe $\frac{1}{100}$ (in einzelnen Fällen) von der Theorie nichts besagt.

Hierher gehört auch die von Strehlke und schon von Chladni gemachte Beobachtung, dass bei einer Kreisscheibe, wenn drei oder mehr konzentrische Kreise die Klangfigur bilden, der innerste Kreis entweder diffus bleibt, oder eine Ellipse bildet, während die andern Kreise keine messbare Abweichung von der Symmetrie zeigen. Strehlke [1] erblickt den Grund in einer ungenügenden Homogenität der Platte; doch ist kaum begreiflich, warum diese Ursache stets nur den innersten Kreis beeinflussen sollte, und warum die Kreise manchmal einfach diffus bleiben. Dies folgt aber ohne weiteres aus dem Umstand, dass die Amplitude bei drei Kreisen gering ist und vom Rand gegen die Mitte zu im Mittel abnimmt; daraus folgt um den innersten Kreis eine besonders grosse Zone indifferenten Gleichgewichtes für den Sand. Wird nun die Amplitude sehr erhöht, etwa indem man zum Bestreichen der Platte mit dem Bogen ein in die Mitte eingebohrtes kreisförmiges Loch benutzt (Strehlke), so werden die Sandkörner zum Teil an den Rand des Bereiches getrieben, es entsteht eine elliptische Figur, deren Achsenrichtungen von der Streichrichtung abhängen. Bei Strehlke war die eine Achse um 0,003 zu gross, die andere um 0,003 zu klein (Durchmesser der Platte = 1); eine Grössenordnung, wie sie *a priori* zu erwarten war.

Den Wert von μ für seine Platten hat Strehlke nicht angegeben, wodurch der Vergleich mit der Theorie ebenfalls etwas (wenn auch nur wenig) unsicher wird. Für Glas haben verschiedene Beobachter Werte zwischen 0,210 (Voigt) und 0,257 (Caulon).

Den Einfluss der Streichrichtung auf die Knotenlinien hat auch Zeissig [2] direkt beobachtet.

---

(1) F. Strehlke, *Pogg. Ann.*, t. XCV, 1855, p. 594.
(2) J. Zeissig, *Inaug.-Diss.; Wied. Ann.*, t. LXIV, 1898, p. 360.

erhalten; ich habe das Mittel $\mu = 0,225$ gewählt, welches jedenfalls nur um $\frac{1}{10}$ fehlerhaft sein wird; auf die Knotenlinien ist dies ohne merklichen Einfluss; bei den Haupttönen, die in höherer Approximation berechnet werden, ist die Korrektion für

$$\mu = 0,225 + \delta\mu$$

gegeben; genaue Beobachtung der Verhältnisse der Schwingungszahlen können in der Tat dazu dienen, μ zu bestimmen.

Der Einfluss der endlichen Dicke h der Platte dürfte wohl erst in den Gliedern zweiter Ordnung in Betracht kommen. Da Dicke Seite der Platte bei Strehlke $= \frac{1}{70}$ bis $\frac{1}{40}$ war, gibt dies Fehler von der Ordnung 0,0002 bis 0,0006 (Seite $= 1$), die nicht in Betracht kommen.

Durch die Art der Unterstützung, vor allem aber durch das Bestreichen des Plattenrandes mit dem Bogen, wird, wie Lord Rayleigh (*loc. cit.*) hervorhebt, die Bewegung zu einer nicht ganz freien, was sowohl auf die Lage der Knotenlinien wie auch auf die Tonhöhe von Einfluss sein kann. Endlich sind diese Bewegungen stark gedämpft, vor allem durch die Fortleitung des Schalles durch die Luft, zum Teil auch durch innere Reibung; auch hierin liegt eine Abweichung vom theoretischen Ansatz, die aber wohl in entgegengesetztem Sinne wirkt wie der Einfluss des angelegten Bogens, so dass sich beide Fehlerquellen zum Teil kompensieren dürften.

Die Klangfiguren quadratischer Platten mit freien Rändern.

Im folgenden sind die Formeln für die Eigenschwingungen, die sich auf Grund der mitgeteilten Methode ergeben, zusammengestellt und mit den Beobachtungen von Strehlke verglichen [1]. Bei den höheren Eigenschwingungen, wo keine genauen Messungen vorliegen, sind die angenäherten Formeln (I) p. 267 zugrunde gelegt; der Fehler (1-2 Proz.) ist bei dem Maasstab der Figuren bedeutungslos, und bei den mannigfachen Schwierigkeiten und Fehlerquellen der experimentellen Herstellung der Figuren dürften

[1] Die Ausdrücke für w sind auf drei Stellen genau, doch wird die vierte Stelle geführt, um eine Anhäufung von Fehlern zu vermeiden, die die dritte Stelle stark beeinflussen könnten.

die hier gegebenen die Wahl der Unterstützungspunkte und somit die experimentelle Darstellung wesentlich erleichtern.

Die im folgenden mitgeteilten 46 Klangfiguren erschöpfen ungefähr das, was ohne allzugrosse Schwierigkeit experimentell erreicht werden kann; sie sind von Chladni in seiner Akustik zum grössten Teil gegeben worden, jedoch sind die Zeichnungen meist nur ziemlich roh, wie schon der Vergleich mit Strehlke zeigt, und es sind Töne als doppelt und ineinander transformierbar bezeichnet, die es nur durch die Methode der Herstellung geworden sind; dementsprechend sind diese Figuren stark verzerrt.

Für die Doppeltöne wären an und für sich unendlich viele Figuren möglich. Den Ausdrücken $u_m(x)u_n(y) \pm u_n(x)u_m(y)$ entsprechen hier zwei Figuren, die auseinander durch Drehung um 90° entstehen; den einzelnen Schwingungen $u_m(x)u_n(y)$ Linien, die angenähert parallel zu den Seiten verlaufen, und deren Lage den Wurzeln von $u_m(x) = 0$ bzw. $u_n(y) = 0$ entspricht; sie schneiden also jede Parallele zur x-Achse (bzw. zur y-Achse) in Punkten, die genau so liegen wie die n (bzw. m) Knotenpunkte der n^{ten} (bzw. m^{ten}) Schwingung eines Stabes von gleicher Länge mit freien Enden. Für jeden Doppelton wird eine Figur, die

$$u_m(x)u_n(y) - u_m(y)u_n(x) = 0$$

entspricht, und eine solche, die $u_m(x)u_n(y) = 0$ entspricht, gegeben. Wie man die Schar der unsymmetrischen, der allgemeinen Formel

$$A\,u_m(x)u_n(y) - B\,u_n(x)u_m(y) = 0$$

entsprechenden Figuren ihrem ungefähren Verlauf nach daraus herstellen kann, ist oft für den Fall von Membranen usw. beschrieben worden; da für jeden Ton diese Figuren sämtlich durch gewisse feste Punkte, *die Pole* der Figur gehen müssen, wird ihre Konstruktion dadurch auch erleichtert. Diese Pole sind (in erster Annäherung) die Nullstellen der Gleichungssysteme $u_m(x) = 0$, $u_m(y) = 0$ und $u_n(x) = 0$, $u_n(y) = 0$. Ihre Lagen sind also auch mit denen der Knotenpunkte freier Stäbe identisch.

Die Figuren sind zunächst nach den Symmetrien der Schwingung geordnet; innerhalb jeder Abteilung nach der Tonhöhe. Es sind angegeben die Formel für w, der Wert von λ für $\mu = 0{,}225$ (Glas)

und die Korrektion dieses Wertes für $\mu = 0,225 + \delta\mu$ (wo $\delta\mu$ klein ist); letztere allerdings nur bei den genau berechneten λ, wo sie allein einen Sinn hat.

Aus dem schon besprochenen Sturm-Liouvilleschen Satz, dass ein Ausdruck der Form $A\,u_m(x) + B u_n(x)$, wo $m \geqq n$ ist, *höchstens m und mindestens n Wurzeln hat*, folgt, *dass eine Parallele zu einer Seite des Quadrats die durch*

$$u_m(x)\,u_n(y) \pm u_m(y)\,u_n(x) = 0$$

gegebene Figur in höchstens m und mindestens n Punkten schneidet. Die Korrektionen, die die höhere Approximation einführt, sind zu klein, um hieran etwas zu ändern.

Ist (Vorzeichen +) die Diagonale $x = y$ keine Knotenlinie, so wird sie von Knotenlinien (und zwar senkrecht) geschnitten in den Punkten, deren Koordinaten $x = y$ die Wurzeln von $u_m(x) = 0$ und $u_n(x) = 0$ sind, also in $n + m$ Punkten, deren Abszissen und Ordinaten wieder den Knotenpunkten schwingender Stäbe entsprechen. Auf scheinbare Ausnahmen, die durch nahe Koinzidenz zweier Wurzeln entstehen, wird unten hingewiesen.

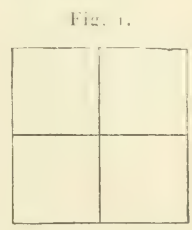
Ist das Vorzeichen — genommen, so gehört stets die Diagonale $x = y$ zur Klangfigur. Sind dann n und m beide gerade oder ungerade, so gilt gleiches von der zweiten Diagonale. Wenn nicht, so liegt ein Doppelton vor, der sich somit durch seine geringere Symmetrie kennzeichnet.

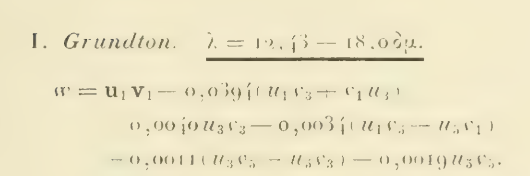
Sind m und n ungerade, so gehören die beiden Koordinatenachsen (Seitenhalbierenden) zur Figur. Diese Sätze liessen sich leicht vermehren; *sie gestatten es, zu einer gegebenen Klangfigur die zugehörigen Indizes m, n zu finden.*

Es ist im folgenden wieder abkürzend $u_m = u_m(x)$, $v_n = u_n(y)$ gesetzt, wo die $u_n(x)$ die durch (24), (25) p. 381 gegebenen Funktionen sind; die x-Achse ist nach rechts gelegt, die y-Achse nach oben, durch den Mittelpunkt des Quadrats parallel den Seiten. *Längeneinheit ist die halbe Seitenlänge.* Wegen der Symmetrien hat man beim Vergleich mit der Erfahrung nur positive x und y zu berücksichtigen.

A. *Lösungen, die in x und y ungerade und symmetrisch sind.*

Fig. 1.

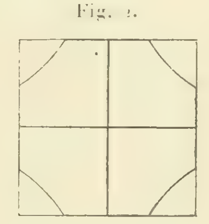




I. *Grundton.* $\lambda = 12,43 - 18,05\mu$.

$$w = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 - 0,0394(u_1v_3 + v_1u_3) \quad 0,0040\,u_3v_3 - 0,0034(u_1v_5 + u_5v_1) - 0,0011(u_3v_5 + u_5v_3) - 0,0019\,u_5v_5.$$

Fig. 2.



II. $\lambda = 378 - 575\mu$.

$$w = -0,075\,u_1v_1 + (\mathbf{u}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{u}_3\mathbf{v}_1) - 0,173\,u_3v_3 - 0,045(u_1v_5 - u_5v_1) - 0,015(u_3v_5 - u_5v_3) - 0,029\,u_5v_5.$$

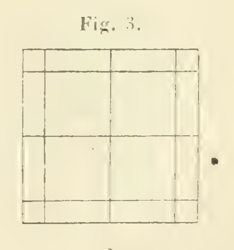
Es ist

y beob.:	0,530	0,578	0,630	0,690	0,752	0,819	0,893
x beob.:	0,9375	0,8750	0,8125	0,7500	0,6875	0,6250	0,5625
x ber. — x beob.:	—0,003	—0,002	0,000	—0,001	—0,0005	0,000	0,000

Nach der Formel $u_1v_3 + u_3v_1 = 0$ ergeben sich die Koordinaten der Punkte, in denen diese Kurven die Diagonalen schneiden, zu $x = y = 0,736$ (beob. 719); die der Randpunkte der Kurven: $x = 1$, $y = 0,533$ (beob. 0,487). Da die Seite gleich 2 ist, würde die angenäherte Formel für die Kurve Fehler von 0,8 bis 2,4 Proz. der Seite geben, was im Masstab der Zeichnung schon kaum zu bemerken wäre, geschweige die nach der genauen Formel erhaltenen Fehler.

III. $\lambda = 1554$.

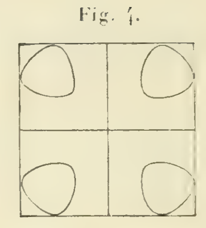
Fig. 3.



$$w = 0,009\,u_1v_1 - 0,075(u_1v_3 + v_1u_3) + \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3 - 0,057(u_1v_5 + u_5v_1) + 0,121(u_3v_5 + u_5v_3) - 0,007\,u_5v_5.$$

Messungen fehlen.

Fig. 4.

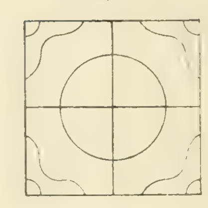


IV. $\underline{\lambda = 2945.}$

$$w = u_1 v_5 + u_5 v_1.$$

Diese Figur fehlt bei Chladni.

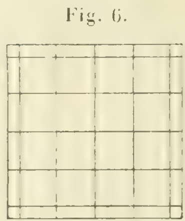
Fig. 5.



V. $\underline{\lambda = 6303.}$

$$w = u_3 v_5 - u_5 v_3.$$

Fig. 6.

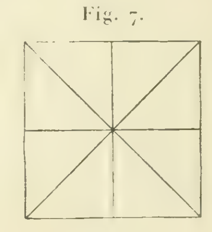


VI. $\underline{\lambda = 13674.}$

$$w = u_5 v_5.$$

B. *Lösungen, die in x und y ungerade und antisymmetrisch sind.*

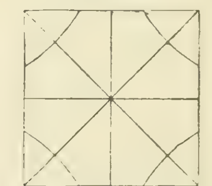
Fig. 7.



I. $\underline{\lambda = 316,1 - 270\,\delta\mu.}$

$$w = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_3 + 0,0002(u_1 v_5 - v_1 u_5) - 0,0033(u_3 v_5 - v_3 u_5).$$

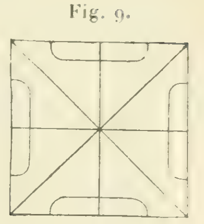
Fig. 8.



II. $\underline{\lambda = 2713.}$

$$w = u_1 v_5 - v_1 u_5.$$

Fig. 9.



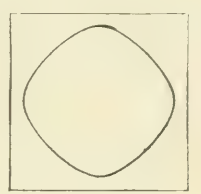
III. $\lambda = 5570$.

$$w = u_3 v_5 - v_3 u_5.$$

C. *Lösungen, die in x und y gerade und symmetrisch sind.*

Die Klangfiguren dieser und der folgenden Abteilung erscheinen besonders leicht und es können besonders viele Obertöne zur experimentellen Darstellung gebracht werden.

Fig. 10.



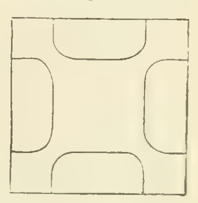
I. $\lambda = 35,73 + 20,8\,\delta\mu$.

$$\begin{aligned} w = \mathbf{u}_0 \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_0 &- 0,0238\, u_2 v_2 \\ &+ 0,0130 (u_0 v_4 + v_0 v_4) \\ &+ 0,0026 (u_2 v_4 + v_2 u_4) \\ &- 0,0016\, u_4 v_4. \end{aligned}$$

x beob. :	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
y beob. :	0,840	0,829	0,796	0,744	0,675	0,589
y ber. — y beob. :	+0,003	+0,003	+0,003	—0,003	+0,003	+0,004

Die Abweichung ist offenbar einem der besprochenen, systematischen Versuchsfehler zuzuschreiben. Die erste Annäherung $u_0 v_2 + v_0 u_2$ ergibt für die Schnittpunkte mit den Achsen die Koordinaten 0,830 (beob. 0,839); mit der Diagonale 0,552 (beob. 0,546).

Fig. 11.



II. $\lambda = 266,0 - 274\,\delta\mu$.

$$\begin{aligned} w = 0,0122 (u_0 v_2 + v_0 u_2) &+ \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2 \\ - 0,0188 (u_0 v_4 - v_0 u_4) & \\ - 0,0880 (u_4 v_2 + v_4 u_2) & \\ - 0,0044\, u_4 v_4. & \end{aligned}$$

x beob. :	0,100	0,200	0,300	0,400
y beob. :	0,533	0,534	0,538	0,546₅
y ber. — y beob. :	—0,003	—0,003	—0,004	—0,005

Für den zweiten Teil jedes der Kurvenstücke ist:

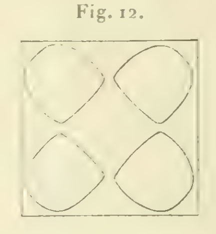
y beob.:	0,600	0,700	0,800	0,900
x beob.:	0,495	0,517	0,524	0,528
x ber. — x beob.:	—0,005	+0,005	—0,004	—0,006

Die berechnete Kurve ist in den fast geradlinigen Teilen weniger gekrümmt als die beobachtete. Aus $w = u_2 v_2$ würden sich Parallele zu den Achsen mit x bzw. $y = 0,551$ ergeben haben. Da in den Punkten der Kurven, wo sie sich sehr nahe kommen, die Amplitude gering bleibt, der Sand also in indifferentem Gleichgewicht sich befindet, wenn nicht sehr sorgfältig operiert wird, so wird meist die Figur als aus vier Geraden bestehend erscheinen, wie auch Chladni sie angibt; an den Schnittpunkten wird sie undeutlich sein. Der Fehler der ersten Annäherung in den geradlinigen Teilen beträgt 1 Proz. der Plattenseite.

III. $\lambda = 941$.

$$w = u_0 v_4 + v_0 u_4.$$

Fig. 12.

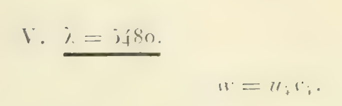


IV. $\lambda = 2020$.

$$w = u_2 v_4 - v_2 u_4$$

Fig. 13.





V. $\lambda = 5480$.

$$w = u_4 v_4.$$

Fig. 14.

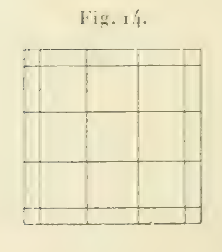
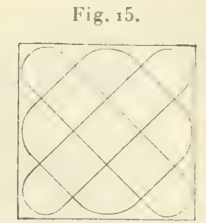


Fig. 15.

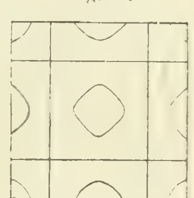


VI. $\lambda = 5640$.

$$w = u_0 v_6 + v_0 u_6$$

(von Chladni nicht beobachtet).

Fig. 16.

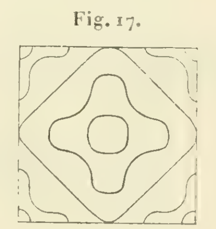


VII. $\lambda = 7840$.

$$w = u_2 v_6 - v_2 u_6.$$

Die nahe Koinzidenz der Wurzeln $x = 0,552$ von $u_2 = 0$ und $x = 0,544$ von $u_6 = 0$ bedingt hier und in Fig. 23 die nahezu geraden Linien, und die scheinbaren Ausnahmen von den p. 304 gegebenen Sätzen.

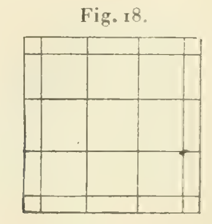
Fig. 17.



VIII. $\lambda = 15120$.

$$w = u_4 v_6 + v_4 u_6.$$

Fig. 18.



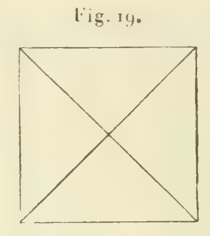
XI. $\lambda = 28740$.

$$w = u_6 v_6$$

(fehlt bei Chladni).

D. *Lösungen, die in x und y gerade und antisymmetrisch sind.*

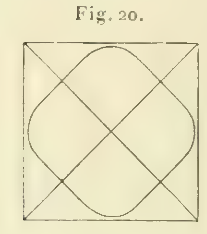
Fig. 19.



I. $\underline{\lambda = 26,40.}$

$$w = \mathbf{u}_0 \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0 \mathbf{u}_2 - 0,0129(u_0 v_4 - v_0 u_4) - 0,0045(u_2 v_4 - v_2 u_4).$$

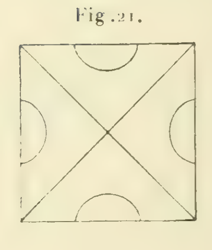
Fig. 20.



II. $\underline{\lambda = 886.}$

$$w = u_0 v_4 - v_0 u_4.$$

Fig. 21.

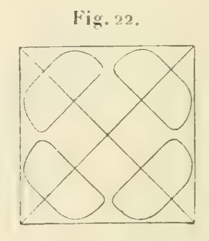


III. $\underline{\lambda = 1702.}$

$$w = u_2 v_4 - v_2 u_4.$$

Die Figur stimmt auf weniger als 1 Proz. mit Strehlkes Messungen.

Fig. 22.

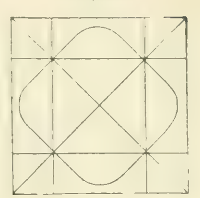


IV. $\underline{\lambda = 5500.}$

$$w = u_0 v_6 - v_0 u_6$$

(fehlt bei Chladni).

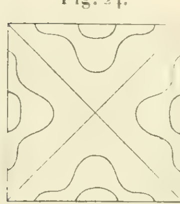
Fig. 23.



V. $\lambda = 7310.$

$$w = u_2 v_6 - v_2 u_6.$$

Fig. 24.

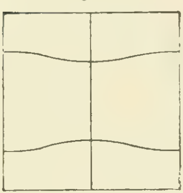


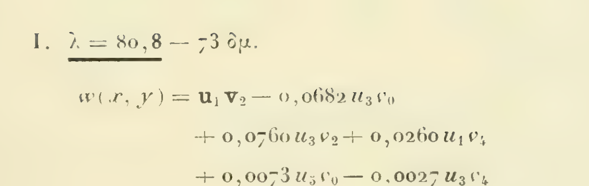
VI. $\lambda = 13840.$

$$w = u_4 v_6 - v_4 u_6.$$

E. *Doppeltöne.*

Fig. 25.

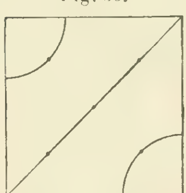




I. $\lambda = 80,8 - 73\,\delta\mu.$

$$\begin{aligned} w(x, y) = {} & \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 - 0,0682\, u_3 v_0 \\ & + 0,0760\, u_3 v_2 + 0,0260\, u_1 v_4 \\ & + 0,0073\, u_5 v_0 - 0,0027\, u_3 v_4 \\ & - 0,0112\, u_5 v_2 + 0,0030\, u_5 v_4. \end{aligned}$$

Fig. 26.

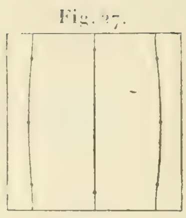


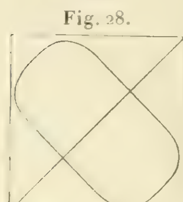
Die allgemeine Formel ergibt sich hieraus (wie bei allen Doppeltönen)

$$A\, w(x, y) + B\, w(x, y).$$

Die erste Figur (25) entspricht $B = 0$; die zweite (26) $B = -A$.

Pole : $x = y = 0$; $\pm x = 0,522 = \pm y$ (beob.); die berechneten Pole liegen auf der Diagonale um 0,001 mehr nach aussen. (Vgl. Fig. 26.)


Fig. 27.


Fig. 28.

II. $\underline{\lambda = 237,1.}$

$$
\begin{aligned}
w(x,y) = & + 0,0678\, u_1 v_2 - \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_0 \\
& - 0,0150\, u_3 v_2 + 0,0355\, u_1 v_4 \\
& + 0,0000\, u_5 v_0 - 0,0100\, u_3 v_4 \\
& - 0,0007\, u_5 v_2 + 0,0016\, u_5 v_4.
\end{aligned}
$$

Für die annähernd parallel den Seiten verlaufenden Kurven in Fig. 27 findet sich

y :	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
x beob. :	0,758	0,753	0,746	0,738	0,730
x ber. $-$ x beob. :	$-0,0045$	$-0,0055$	$-0,0045$	$-0,003$	$-0,0005$

y :	0,600	0,700	0,800	0,900
x beob. :	0,722	0,717	0,716	0,717
x ber. $-$ x beob. :	$-0,0005$	$+0,0005$	$+0,0005$	$+0,0010$

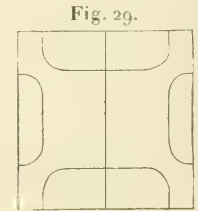
Als Pole sind beobachtet

$$
\begin{aligned}
&y = 0, \quad x = 0,760, \quad \text{ber. } 0,761, \\
&y = x = 0,716, \quad \text{ber. } 0,722,
\end{aligned}
$$

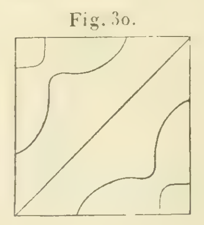
nebst den symmetrischen, in den andern Quadranten gelegenen Punkten. (Vgl. Fig. 27.)

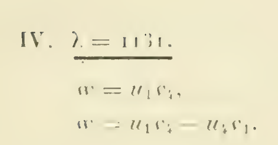
III. $\underline{\lambda = 746.}$

$$
\begin{aligned}
w(x,y) = & - 0,0709\, u_1 v_2 + 0,0214\, u_3 v_0 \\
& + \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_2 - 0,1260\, u_1 v_4 \\
& - 0,0038\, u_5 v_0 + 0,1234\, u_3 v_4 \\
& - 0,0095\, u_5 v_2 - 0,0100\, u_5 v_4.
\end{aligned}
$$


Fig. 29.

Strehlke gibt die Pole an, die jedoch mit dieser Formel nur auf 1 Proz. stimmen, was sich wohl aus dem Umstand erklärt, dass sie in einer Zone nahezu indifferenten Gleichgewichtes liegen (in Fig. 29 dort, wo sich die Kurvenzweige einander nähern).


Fig. 30.



IV. $\lambda = 1131.$

$w = u_1 v_4,$

$w = u_1 v_4 - u_4 v_1.$

Fig. 31.

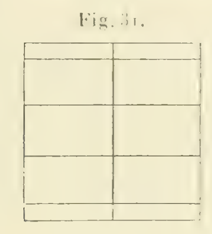
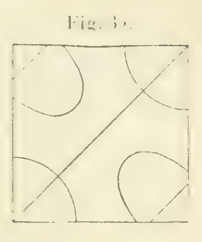


Fig. 32.



V. $\lambda = 2497.$

$w = u_5 v_0.$

$w = u_5 v_0 - u_0 v_5.$

Fig. 33.

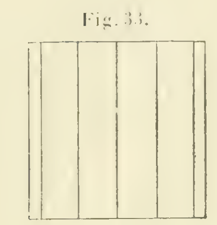
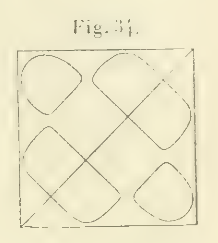


Fig. 34.



VI. $\lambda = 3240.$

$w = u_3 v_4,$

$w = u_3 v_4 - u_4 v_3.$

Fig. 35.

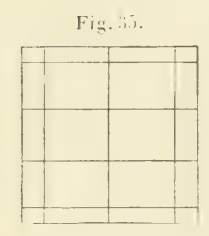
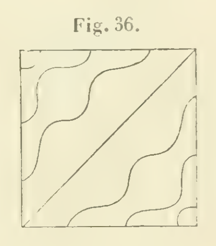
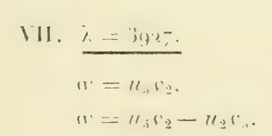


Fig. 36.





VII. $\lambda = 3927.$

$w = u_5 v_2,$

$w = u_5 v_2 - u_2 v_5.$

Fig. 37.

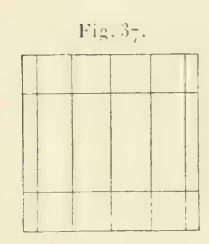
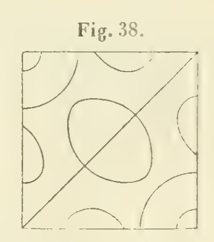
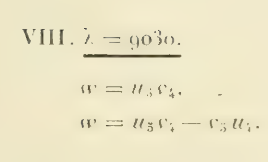


Fig. 38.





VIII. $\lambda = 9030.$

$w = u_5 v_4,$

$w = u_5 v_4 - v_5 u_4.$

Fig. 39.

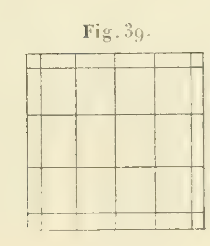
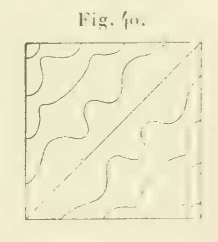


Fig. 40.



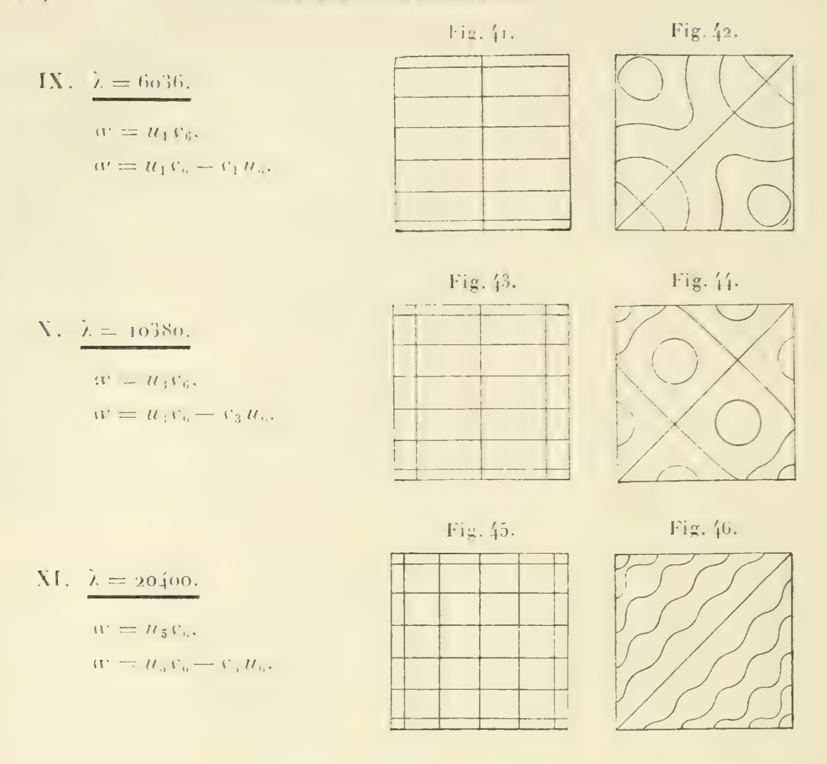


Fig. 41. Fig. 42. Fig. 43. Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46.

Schlussbemerkungen.

Es braucht wohl kaum betont zu werden, dass dieselben Ansätze auch für Rechtecke gelten : sind a, b deren halbe Seiten, so werden sich Lösungen der Form

$$u_m\left(\frac{x}{a}\right) u_n\left(\frac{y}{b}\right) \pm u_n\left(\frac{x}{a}\right) u_m\left(\frac{y}{b}\right)$$

ergeben und das Verfahren bleibt im übrigen ungeändert.

Ist eine Seite des Rechtecks eingespannt, die übrigen frei, so wird man dementsprechend für die Richtung x der zwei freien Seiten diejenigen Funktionen, die einem an einem Ende eingespannten, am andern freien Stabe entsprechen, einführen : für die zweite Richtung bleiben die u_m anwendbar.

Entsprechendes gilt für die ringsum eingespannten Platten usw.

Wie dieselbe Methode Gleichgewichtsprobleme zu behandeln

gestattet, habe ich in der eingangs zitierten Arbeit gezeigt. Wird z. B. eine rechteckige Platte durch an den Rändern angreifende Kräfte gebogen (Maxwell), so ist für die transversale Deformation $w(xy)$ derselbe Ansatz (Entwickelungen nach $u_m(x/a)\,u_n(y/b)$) zu machen, wie wir ihn in dieser Arbeit benutzt haben; die Koeffizienten bestimmen sich daraus, dass die potentielle Energie (sie ist, bis auf einen Faktor, durch unser Integral J gegeben) plus dem die Arbeit der Kräfte für ein kleines w ausdrückenden Randintegral, nach Einführung des Ansatzes, möglichst klein sein soll. Da das Randintegral w nur linear enthält, ergeben sich diesmal lineare, *nicht* homogene Gleichungen für die Koeffizienten. Für eine quadratische Platte und geeignet symmetrische Kräfte erhält man wieder die Gleichungen (54) p. 292, wenn darin $\lambda = 0$ gesetzt wird und die linken Seiten (Null) durch bestimmte Zahlwerte ersetzt werden. Die einmalige Aufstellung des Schemas (54) genügt also, um eine ganze Reihe von Gleichgewichtsproblemen bezüglich quadratischer Platten einfach zu lösen.

Es ist oben bemerkt worden, dass ein Polynom stets, bei jeder Begrenzung, als möglicher Ansatz für w in Betracht kommt, wobei nur fraglich bleibt, ob bei der verlangten Genauigkeit die Rechenarbeit nicht zu gross wird. Da der Eigenwert des Fundamentaltones, λ_0, dem Minimum von J entspricht, so wird im ganzen bei jeder Approximation, wenn es sich um den Grundton handelt, λ das durch die Methode am genauesten gegebene Element sein. Zur Berechnung des Grundtones aus den Konstanten der Platte wird also sehr oft der Ansatz eines Polynoms mit wenigen Gliedern genügen. So entspricht der Symmetrie des Grundtones beim Kreise der allgemeinste Ansatz

$$(\alpha)\qquad w = xy[a + b(x^2+y^2) + cx^2y^2 + d(x^4+y^4) + \ldots],$$

wobei die x- und y-Achse die Knotenlinien der Klangfigur bilden. Trägt man dies in das über den Kreis vom Radius $R = 1$ erstreckte Integral J [Gleichung (7) p. 273] ein, so ergibt unsere Methode ohne weiteres für λ_0 folgende sukzessive Approximationen:

Wenn man Formel (α) mit dem *ersten* Glied abbricht

$$(b = c = d = \ldots = 0):$$

$$\lambda_0 = \frac{48(1-\mu)}{R^4} = 32 \qquad \text{für} \qquad \mu = \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad R = 1.$$

Bei *zwei* Gliedern (λ_0 Wurzel einer Gleichung zweiten Grades

$$\lambda_0 = 27,794,$$

während aus Kirchhoffs Rechnungen sich ergibt

$$\lambda_0 = 27,574.$$

Der Fehler der Tonhöhe, die $\sqrt{\lambda_0}$ proportional ist, ist somit schon in zweiter Annäherung nur $\frac{1}{2}$ Proz., also an der Grenze des Beobachtbaren.

Ebenso elementare Rechnungen ergeben die Grundtöne und selbst die ersten Obertöne des Dreiecks, Fünfecks, Sechsecks usw., und überhaupt irgendwelcher durch gerade Linien und Kreisbögen begrenzter Figuren.

Göttingen, Januar 1909.

XVIII.

RECHERCHES CRITIQUES

SUR

L'ÉLECTRODYNAMIQUE GÉNÉRALE.

Annales de Chimie et de Physique, 8e série, t. XIII, p. 145-275.

INTRODUCTION.

Les phénomènes électriques et électrodynamiques ont acquis dans le cours des dernières années une importance de plus en plus grande ; ils englobent l'Optique, les lois du rayonnement et les phénomènes moléculaires innombrables liés à la présence des centres chargés, ions et électrons ; enfin, avec la notion de masse électromagnétique, c'est la Mécanique elle-même qui semble devoir devenir un chapitre de l'Électrodynamique générale. Sous la forme que lui a donnée M. H.-A. Lorentz, la théorie de Maxwell deviendrait ainsi le pivot d'une conception nouvelle de la nature, où les lois électrodynamiques, considérées comme primordiales, comprendraient les lois du mouvement comme cas particuliers et joueraient dans les théories physiques le rôle fondamental qui, jusqu'ici, revenait à la Mécanique.

Dans ces conditions, il est évidemment désirable qu'une critique rigoureuse des bases de cette théorie leur donne le degré de clarté et de précision que la Mécanique elle-même n'a, après beaucoup de controverses, atteint qu'à une époque toute récente. Il convient de se demander quelles hypothèses sont nécessaires et peuvent se déduire de l'observation, quelles autres sont logiquement inutiles ou peuvent être élaguées sans que l'expérience cesse d'être satisfaite ; enfin quelles sont celles qui, peut-être, doivent être

rejetées, question qui se pose surtout à propos du mouvement absolu.

Dans la première Partie de ses *Leçons sur l'Électricité et l'Optique* [1], M. Poincaré a consacré à la critique des théories plus ou moins distinctes dues à Maxwell lui-même et à Hertz des pages classiques; je ne me suis donc attaché qu'à la forme qu'a prise la théorie entre les mains de M. Lorentz, forme qui présente des avantages bien connus. Quelques résultats peuvent d'ailleurs facilement s'étendre aux autres théories. Ici encore, je n'ai eu souvent qu'à rappeler ou à compléter les idées émises par M. Poincaré et surtout par M. Lorentz, à qui n'ont naturellement pas échappé les aspects divers sous lesquels peut être présentée sa théorie.

J'ai négligé en général les phénomènes d'ordre moléculaire qui dépendent de la théorie corpusculaire de l'électricité : cette conception si féconde est évidemment indépendante, dans une large mesure, des idées qu'on peut se faire sur le mode d'action des charges électriques les unes sur les autres par l'intermédiaire de l'éther, qui fait plus spécialement l'objet des équations électrodynamiques.

Le résultat de ces recherches n'a pas été favorable aux théories actuelles. La discussion des difficultés qu'elles soulèvent montre que celles-ci ont une commune origine intimement liée à la conception même de l'éther, qui est à la base de toutes ces théories. On verra en particulier que :

1° Au point de vue strictement logique, les forces électrique et magnétique, qui, en apparence, jouent dans la théorie un rôle si fondamental, sont des notions qu'on peut entièrement en éliminer; elle ne contient en réalité que des relations d'espace et de temps : on revient ainsi aux anciennes actions élémentaires, avec cette seule différence qu'elles ne sont plus instantanées.

2° La théorie admet une infinité de solutions satisfaisant à toutes les conditions, mais incompatibles avec l'expérience, et conduisant, par exemple, à des *perpetuum mobile*. Pour écarter ces solutions, il faut admettre par hypothèse les formules des potentiels retardés. Ces formules introduisent l'irréversibilité dans l'Électro-

---

[1] H. Poincaré, *Électricité et Optique : La Lumière et les Théories électrodynamiques*; 2e édition, Paris, 1901.

dynamique, alors que les équations générales admettent la réversibilité. Je montre que, contrairement aux idées reçues, elles ne peuvent se déduire d'une spécialisation convenable de l'état initial. Elles constituent une hypothèse nouvelle, et qui rend inutiles les équations aux dérivées partielles ; pour exprimer clairement cette hypothèse, il est nécessaire de distinguer les actions élémentaires, c'est-à-dire de renoncer à l'idée fondamentale de Maxwell qui les rejetait.

3° La notion de localisation de l'énergie dans l'éther est indéterminée et comporte plusieurs solutions simples.

4° L'impossibilité, remarquée par Maxwell, de ramener aux mêmes notions la gravitation, dont l'énergie négative correspondrait à un milieu instable, montre que ces notions ne sont pas d'une application générale aux forces de la nature.

5° L'action et la réaction ne sont pas égales, et cette inégalité, dans la mesure où elle provient de l'introduction des vitesses absolues, est contraire à l'expérience.

6° Les expériences de M. Kaufmann sur la déviabilité électrique et magnétique des rayons β du radium ne démontrent pas que la masse des électrons soit tout entière d'origine électromagnétique et dépende de leur vitesse absolue, parce que, d'une part, rien n'oblige à admettre, comme le veut la théorie de Lorentz, que les forces soient fonctions linéaires de la vitesse (cela pourrait n'être vrai que pour les petites vitesses), et que, d'autre part, une expérience de MM. Trouton et Noble montre que l'expression de la *quantité de mouvement électromagnétique* en fonction de la vitesse, de laquelle M. Abraham a déduit celle de la masse électrodynamique, est certainement inexacte.

7° La théorie de Maxwell et de Lorentz part d'un système de coordonnées absolues, c'est-à-dire indépendant des mouvements de la matière ; pour être en accord avec l'expérience, qui a toujours, en Optique et Électrodynamique comme en Mécanique, confirmé le principe de la relativité des mouvements, on est obligé ensuite d'éliminer ce système absolu par des hypothèses peu vraisemblables, supprimant la notion de corps solide, et celle d'invariabilité des masses pondérables ; il faut, de plus, changer les principes de la Cinématique, considérer la règle du parallélogramme des vitesses comme une première approximation, valable aux faibles vitesses,

et faire du temps et de la simultanéité des notions toutes relatives.

Il serait regrettable, pour l'économie de notre pensée, qu'il fallût admettre de telles complications. Je crois qu'au lieu de toucher à la Cinématique, c'est l'hypothèse de l'éther, et, avec elle, la représentation des phénomènes par des équations aux dérivées partielles, qu'il faut abandonner. La nécessité d'expliquer que les corps ne rencontrent aucune résistance de la part de l'éther qu'ils traversent et ne modifient pas son état, bien d'autres considérations encore, ont d'ailleurs amené à faire de l'éther mécanique de Fresnel un simple *espace physique*, absolument compénétrable à la matière, un *système de coordonnées absolu*; il n'est plus qu'une abstraction mathématique, et sa suppression ne serait que la dernière phase d'une longue évolution.

Cette conclusion, comme je le montrerai, n'entraîne nullement le retour aux actions à distance. Cependant elle heurte de front bien des idées reçues, et je suis le premier à reconnaître qu'une hypothèse qui a rendu de grands services à la Science ne peut pas être condamnée par le seul motif qu'elle soulève, à l'heure qu'il est, des difficultés, paraissant inextricables. On pourra toujours espérer de l'avenir la solution de ces difficultés, ou penser qu'elles sont inhérentes aux choses, et indépendantes de l'image que nous nous en faisons. Il n'en est, heureusement, pas ainsi : c'est ce que j'ai cherché à démontrer dans la seconde Partie de ce travail, mais la théorie que je présenterai n'a nullement la prétention d'être une solution satisfaisante et définitive d'un problème si difficile. Son but est en première ligne de faire voir combien est large la part d'inconnu qui, malgré les progrès récents, subsiste dans ce domaine, et dans quelle mesure, bien plus faible qu'on ne serait tenté de le croire, l'expérience peut être considérée comme une confirmation de la théorie de Maxwell et Lorentz, même lorsqu'on adopte, comme je le ferai, les idées si remarquables de ce dernier savant sur la constitution atomique de l'électricité, la nature du courant de conduction et des diélectriques, en un mot, la *théorie des électrons*. Ces recherches montreront, de plus, qu'il n'est pas nécessaire d'introduire des mouvements absolus, et de bouleverser la Cinématique et la notion de temps : les vitesses relatives seules y interviendront. Il n'y sera pas fait usage de notions sujettes à critique telles que la polarisation, le vecteur électrique, la force

magnétique, etc., mais seulement des notions de temps, d'espace et de charges électriques, ces dernières ne jouant, comme les masses en Mécanique, que le rôle de coefficients convenablement choisis et invariables pour un ion ou un électron déterminé. En un certain sens, c'est donc là une théorie mécanique de l'électricité. Mais je n'ai pas cru devoir faire intervenir ces mécanismes latents, plus ou moins compliqués, qui jouent dans la théorie de Maxwell un rôle si important. Ces hypothèses sont inutiles, et, il faut le dire, bien peu satisfaisantes. Il suffit, en effet, de rappeler que les corps pondérables doivent passer à travers ces mécanismes compliqués sans les déranger, et sans éprouver d'action sensible, même quand leur vitesse atteint celle des corps célestes : l'impénétrabilité, en particulier, n'existe donc pas pour ces théories mécaniques, et c'est là un point qui n'est pas toujours suffisamment mis en évidence. L'expérience a montré que les actions ne sont pas instantanées; elle n'a pas révélé trace d'un corps qui subsisterait dans les espaces matériellement vides. J'ai donc cru pouvoir me borner à donner de la loi de propagation de ces actions une interprétation cinématique très simple empruntée à la théorie émanative de la lumière, et satisfaisant au principe de la relativité du mouvement : des particules fictives sont émises constamment dans tous les sens par les charges électriques; elles continuent indéfiniment à se mouvoir en ligne droite et avec une vitesse constante, même à travers les corps matériels. L'action subie par une charge dépend uniquement de la disposition, vitesse, etc., de ces particules dans l'entourage immédiat de la charge. Les particules sont donc simplement la représentation concrète des données cinématiques et géométriques. Ces hypothèses suffisent pour le but purement critique que je me suis proposé ici. Elles permettent d'étudier en détail la loi de l'action élémentaire entre électrons en mouvement, et font voir en particulier que cette loi, presque entièrement inconnue aux grandes vitesses, comporte, même aux petites vitesses, un paramètre indéterminé K, qui n'est pas sans analogie avec celui qu'Helmholtz a introduit dans sa théorie.

Je tiens toutefois à préciser la portée toute provisoire de ces hypothèses. En effet, lorsque les particules (ou, si l'on veut, les actions ou énergies) émises par un corps électrisé atteignent une autre charge électrique et en modifient le mouvement, le principe

d'action et de réaction exige qu'elles subissent de leur côté une déviation ou un changement, et il est fort remarquable que l'expérience de Fizeau sur l'entraînement des ondes, de même que certains autres faits d'Optique, ne sont pas compatibles avec l'hypothèse admise ici, et exigent une telle réaction. C'est le contraire qui arrive dans l'hypothèse de l'éther, ainsi que l'a mis en évidence M. Poincaré : la théorie de Hertz, qui satisfait au principe d'action et de réaction, est incompatible avec l'expérience de Fizeau ; celle de Lorentz, qui n'y satisfait pas, explique parfaitement l'expérience. Mais M. Poincaré a montré qu'en attribuant à l'énergie rayonnante une quantité de mouvement, tout s'arrange ; or cette hypothèse est naturelle, si cette énergie est projetée, et non propagée, et c'est précisément ce qui permet de sauvegarder le principe dans la nouvelle image que je propose. On peut même entrevoir la possibilité d'obtenir, par ces principes, les termes électrodynamiques dépendant de la vitesse et de l'accélération, par la seule considération de la propagation, problème que Gauss a posé dans sa célèbre lettre à W. Weber, et que la théorie de Maxwell n'a pas résolu, puisqu'elle introduit pour ces termes une quantité spéciale, le potentiel vecteur.

Je reviendrai ailleurs sur ces questions : les remarques qui précèdent suffisent à expliquer pourquoi je n'ai pas fait rentrer l'Optique dans le cadre de cette étude critique.

Sous bien des rapports, la théorie nouvelle ramènera donc le lecteur à des idées classiques destinées, semblait-il, à l'oubli définitif. L'interprétation de certaines expériences en sera nécessairement modifiée. En particulier, une partie ou la totalité de la masse pourra bien être d'origine électromagnétique, mais elle sera constante et ne saurait dépendre d'une vitesse absolue. Ce sont les forces, et non la masse, qui varient : les expériences de M. Kaufmann admettent également cette nouvelle manière de voir.

Les nouvelles formules sont applicables à la gravitation ; elles permettent de supprimer, au moins en grande partie, la divergence la plus sensible qui subsiste à l'heure qu'il est entre le calcul et l'expérience : le mouvement du périhélie de Mercure.

La théorie des électrons a constitué un premier retour partiel des idées de Maxwell à d'autres plus anciennes, et pour ceux-là même qui considèrent comme indispensable une nouvelle évolution dans

le même sens, les hypothèses si fécondes introduites par M. Lorentz conservent toute leur importance, et la forme mathématique qu'il leur a donnée continuera dans bien des cas à être la plus élégante et la plus pratique.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1. Rappel de la théorie de Lorentz (1).

On sait que Maxwell n'avait pas fait d'hypothèses sur la nature du courant électrique. M. Lorentz admet que tout courant de conduction résulte du mouvement de particules électriques, soumises à une sorte de frottement dans les conducteurs, à des forces élastiques dans les diélectriques; et de nombreux faits sont, dans ces dernières années, venus confirmer cette hypothèse. Cette conception a permis à M. Lorentz de ne considérer, dans ses équations fondamentales, que le seul diélectrique éther. Renonçant à une explication purement mécanique et à l'impénétrabilité de la matière, M. Lorentz considère l'éther comme immobile, et présent même à l'intérieur des ions et électrons. Ces derniers le modifient physiquement, et cette modification, qu'il est difficile, à vrai dire, de se représenter sous une forme concrète, est caractérisée par deux vecteurs : le vecteur électrique ou déplacement diélectrique E, dont les composantes sont E_x, E_y, E_z, et le vecteur magnétique H (H_x, H_y, H_z). Les charges électriques sont fixées aux ions considérés comme indéformables. Soient ρ la densité électrique, mesurée en unités électrostatiques, au point xyz, à l'instant t, le système de coordonnées étant lié à l'éther immobile, et v la vitesse de la matière électrique en (x, y, z, t), c la vitesse de la lumière; on a, entre ces grandeurs, le système d'équations

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\rho\dfrac{v_x}{c}, \\[2ex] \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_y}{\partial t} + 4\pi\rho\dfrac{v_y}{c}, \\[2ex] \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi\rho\dfrac{v_z}{c}, \end{cases}$$

(1) H.-A. Lorentz, *Archives néerl.*, t. XXV, 1892; *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leiden, 1895; *Elektronentheorie : Enzyklopädie der math. Wissenschaften*, Bd. V, Heft 1, Leipzig, 1904. — Poincaré, *Électricité et Optique*, Chap. III, p. 422.

et

$$(\text{II})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_z}{\partial t}, \end{cases}$$

$$(\text{III})\quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

$$(\text{IV})\quad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

$$(\text{V})\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0.$$

Le champ ainsi créé dans l'éther par les autres charges présentes exerce sur l'élément de charge $\rho\, d\tau$ la force mécanique représentée en grandeur et en direction par le vecteur $F\rho\, d\tau$, où

$$(\text{VI})\quad \begin{cases} F_x = E_x + \dfrac{1}{c}(v_y H_z - v_z H_y), \\ F_y = E_y + \dfrac{1}{c}(v_z H_x - v_x H_z), \\ F_z = E_z + \dfrac{1}{c}(v_x H_y - v_y H_x). \end{cases}$$

Dans cette théorie, il n'y a pas de magnétisme : l'aimantation provient des courants particulaires d'Ampère.

Moyennant certaines hypothèses sur lesquelles nous aurons à revenir, ce système d'équations s'intègre par l'introduction des *potentiels retardés*. On démontre, en effet, que toute solution du système (I) à (V), où l'on suppose ρ, v_x, v_y, v_z donnés, peut se mettre sous la forme

$$(\text{VII})\quad \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_x}{\partial t}, \\ E_y = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial A_y}{\partial t}, \\ E_z = \ldots, \end{cases}$$

$$(\text{VIII})\quad \begin{cases} H_x = \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}, \\ H_y = \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}, \\ H_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}, \end{cases}$$

les fonctions Φ (potentiel scalaire) et A_x, A_y, A_z (composantes du potentiel vecteur) étant continues avec leurs dérivées premières dans tout l'espace, nulles à l'infini, et satisfaisant aux équations

$$\text{(IX)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 4\pi\rho,$$

$$\text{(X)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - \Delta A_x = \dfrac{4\pi\rho v_x}{c}, \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - \Delta A_y = \dfrac{4\pi\rho v_y}{c}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

et

$$\text{(XI)} \qquad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

M. Lorentz satisfait à ces conditions en posant

$$\text{(XII)} \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, t) = \displaystyle\int\int\int \frac{[\rho']}{r}\,d\tau', \\ r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \end{cases}$$

$$\text{(XIII)} \qquad \begin{cases} A_x = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int\int\int \frac{[\rho' v'_x]}{r}\,d\tau', \\ A_y = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int\int\int \frac{[\rho' v'_y]}{r}\,d\tau', \\ A_z = \dots. \end{cases}$$

Ces expressions ont la forme de potentiels newtoniens, avec cette différence qu'au lieu de prendre la valeur de ρ au point $x'y'z'$ à l'instant t, il faut la prendre à l'instant antérieur $t' = t - \frac{r}{c}$, le temps $\frac{r}{c}$ étant nécessaire à la propagation ; c'est ce qu'avec M. Lorentz nous indiquerons par la notation

$$[\rho'] = \rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right),$$

$$[\rho' v'_x] = \rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right) v_x\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right).$$

Le champ est ainsi complètement déterminé, et, en introduisant les expressions (XII) et (XIII) et dans les formules (VII), (VIII)

et (VI), on obtient pour F_x

$$
\text{(XIV)}\quad
\begin{aligned}
F_x = \iiint d\tau' \Big\{ & -\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\rho']}{r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{[\rho' v'_x]}{r} \\
& + \frac{v_x}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\rho' v'_x]}{r} + \frac{v_y}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\rho' v'_y]}{r} + \frac{v_z}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\rho' v'_z]}{r} \\
& - \frac{v_x}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{[\rho' v'_x]}{r} - \frac{v_y}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{[\rho' v'_x]}{r} - \frac{v_z}{c^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{[\rho' v'_x]}{r} \Big\},
\end{aligned}
$$

et des expressions analogues pour F_y, F_z. En introduisant la dérivée totale

$$
\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},
$$

et posant

$$
\text{(XV)}\quad
\begin{aligned}
& L(x, y, z, t, v_x, v_y, v_z) \\
& = \iiint \frac{[\rho']}{r} \left\{ 1 - \frac{v_x [v'_x] + v_y [v'_y] + v_z [v'_z]}{c^2} \right\} d\tau'.
\end{aligned}
$$

M. Schwarzschild ([1]) a trouvé pour F_x la forme remarquable

$$
\text{(XVI)}\qquad F_x = -\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x}, \qquad F_y = \ldots.
$$

C'est la forme des équations de Lagrange. Les expressions (XIV) et (XVI) donnent *la force subie par un point électrique de charge égale à l'unité, exprimée au moyen d'actions élémentaires* analogues à celles que l'on considérait dans l'ancienne Électrodynamique, à la notion de transmission non instantanée près, qu'on retrouve d'ailleurs chez Gauss et C. Neumann. Une charge e', sensiblement ponctuelle, exerce, sous des conditions très générales, sur une autre charge analogue e, une force

$$
\text{(XVII)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
& ee'\left(-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial v_x}\right), \\
& ee'\left(-\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial v_y}\right), \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

([1]) *Göttinger Nachr., Math.-Phys. Klasse*, 1903, p. 126.

où

$$\xi' = \frac{1}{r\left(1 - \frac{[v_r]}{c}\right)}\left(1 + \frac{v_x[v'_x] + v_y[v'_y] + v_z[v'_z]}{c^2}\right),$$

$$r^2 = \left[x(t) - x'\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 + \left[y(t) - y'\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 + \left[z(t) - z'\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2.$$

Cette expression se réduit, en première approximation, à la loi du carré des distances; on peut donc la nommer *loi de Newton généralisée*. Son expression explicite sera donnée plus loin.

Dans ces formules, la notion de champ n'intervient pas. Il est très remarquable que Clausius, cherchant, comme Weber, à rendre compte des actions électrodynamiques au moyen d'actions à distance dépendant des positions, vitesses et accélérations des points électriques, a été conduit aux mêmes formules (XV) et (XVI), avec cette seule différence que les actions sont instantanées, en sorte qu'il faut prendre les valeurs de φ' et v' à l'instant t, et non à l'instant $t - \frac{r}{c}$.

Ce résultat très remarquable, dû à M. Schwarzschild, montre que la théorie de Lorentz se rapproche beaucoup plus qu'on ne pourrait le croire au premier abord des théories anciennes.

La première forme donnée par M. Lorentz à sa théorie était moins abstraite, en ce sens que, suivant la voie tracée par Maxwell, il partait des équations de Lagrange en y introduisant des variables de deux espèces, déterminant, les unes les positions des particules électrisées, les autres l'état de l'éther; on attribue à ce dernier une énergie cinématique, sans préciser ses mouvements internes; il suffit que ceux-ci existent. Le principe d'Hamilton permet également, en astreignant les variations à certaines conditions, d'obtenir les équations fondamentales (I) à (VI) en considérant l'énergie électrique

$$\frac{1}{8\pi}\int(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\,d\tau$$

comme énergie potentielle, et l'énergie magnétique

$$\frac{1}{8\pi}\int(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2)\,d\tau$$

comme énergie cinétique ([1]). Cette déduction est assez compliquée et peut être faite sous des formes diverses ([2]).

Ces deux aspects de la théorie de Lorentz sont nettement distincts. Le second se rapproche de la théorie de Larmor ([3]), qui, tout en conduisant aux mêmes formules, fait sur les mouvements de l'éther dans un champ électromagnétique des hypothèses précises, empruntées aux conceptions de Lord Kelvin sur l'éther gyrostatique. L'éther est incompressible et se meut dans la direction des lignes de force magnétiques.

On sait que Maxwell et Hertz expliquent les forces mécaniques qu'éprouve la matière dans un champ électromagnétique par des pressions que l'éther est supposé exercer sur la matière, et inversement : l'action de l'un est égale et opposée à la réaction de l'autre en tout point. Ces pressions tendent, comme Helmholtz l'a montré ([4]), à mettre l'éther (supposé incompressible) en mouvement; elles sont, par unité de volume, proportionnelles à la dérivée par rapport au temps du vecteur radiant S de Poynting :

$$
\text{(XVIII)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
S_x &= \frac{1}{4\pi c}(E_y H_z - E_z H_y),\\
S_y &= \frac{1}{4\pi c}(E_z H_x - E_x H_z),\\
S_z &= \frac{1}{4\pi c}(E_x H_y - E_y H_x).
\end{aligned}
\right.
$$

M. Lorentz considère l'éther comme immobile; il est donc amené à abandonner cette théorie des pressions de Maxwell, et, par là, l'égalité de l'action et de la réaction, la force non compensée étant caractérisée par le vecteur $\frac{\partial S}{\partial t}$ ([5]).

Remarquons, en terminant ce rapide exposé, que, si l'on admet pour l'éther des mouvements inconnus, la solution des équations n'est déterminée qu'à des quantités près de l'ordre de la vitesse de l'éther divisée par celle de la lumière.

([1]) LORENTZ, *Proc. Amsterdam Acad.*, 1903, p. 608; *Elektronentheorie*, p. 165 et 170.

([2]) LARMOR, *Aether and Matter*, Cambridge, 1900, Chap. IV. — SCHWARZSCHILD, *Gottinger Nachr.*, 1903, p. 125.

([3]) LARMOR, *Proc. Roy. Soc.*, t. LIV, 1893, p. 438; *Aether and Matter*.

([4]) *Gesammelte Abhandlungen*, t. III, p. 526.

([5]) POINCARÉ, *Électricité et Optique*, p. 448.

§ 2. — Critique des notions de champ électrique et de champ magnétique.

On sait que l'introduction de la notion de force dans les bases mêmes de la Mécanique a fait l'objet de nombreuses critiques. Cette notion fait appel au sens musculaire, alors que les idées d'espace et de temps sont d'origine surtout tactile et visuelle : et la dualité psychologique irréductible introduite par là à la base même de cette Science fondamentale laisse dans l'esprit un certain malaise, d'autant plus justifié qu'en fait il semble bien que la notion s'élimine dans chaque cas particulier. Soit qu'on mesure les forces par des masses et des accélérations, ou par des déformations élastiques, soit qu'on oppose leurs effets à ceux de la gravitation, etc., ce que nous observons et mesurons réellement c'est toujours un déplacement, ou l'absence d'un déplacement : encore, dans ce dernier cas, n'arriverons-nous qu'à définir la différence de deux forces. Dans les équations de la Mécanique appliquées à un exemple particulier quelconque, il ne reste jamais que des relations d'espace et de temps, avec certains coefficients convenablement choisis et invariables qui sont les masses ou d'autres constantes physiques. Au point de vue purement logique, c'est donc avec raison que de nombreux savants ont rejeté l'introduction de la notion de force dans les énoncés fondamentaux comme inutile.

L'Électrodynamique moderne est tout entière basée sur les notions de force électrique et de force magnétique. S'il y avait à cela une nécessité absolue, il faudrait le regretter. Mais il n'en est pas ainsi : *ces notions s'éliminent des équations*, elles sont logiquement inutiles ; la théorie n'énonce, en dernière analyse, que l'existence de certaines relations de temps et d'espace, comme c'est le cas pour la Mécanique. Il sera donc préférable, au point de vue logique, d'exprimer directement ces relations : *on revient ainsi aux actions élémentaires classiques*.

En effet, quelle est exactement la définition des vecteurs ou champs E et H ? Je dis que ces vecteurs sont définis par la théorie elle-même. En effet, sans connaître la signification de ces symboles, on peut tout d'abord, moyennant certaines hypothèses que

nous examinerons au paragraphe suivant, intégrer les équations fondamentales par la méthode des potentiels retardés, et l'on sera conduit aux expressions (XIV) ou (XVI); les équations du mouvement d'un point matériel de charge e, de masse m et de coordonnées x_1, y_1, z_1 seront

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= e\mathrm{F}_x(x_1, y_1, z_1; v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}; t),\\ m\frac{d^2y_1}{dt^2} &= \ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si l'on veut tenir compte de l'action de l'électron sur lui-même, ou de liaisons, c'est le principe de d'Alembert qui doit être appliqué, et l'on a, en étendant l'intégration à tout l'électron, et désignant par δx_1, δy_1, δz_1 des déplacements virtuels compatibles avec les liaisons, par μ_1, ρ_1 les densités de la matière et de l'électricité,

$$(2)\qquad \begin{aligned} \int d\tau_1 \Big\{ &\left[\mu_1\frac{d^2x_1}{dt^2} - \rho_1\mathrm{F}_x(x_1, \ldots)\right]\delta x_1 \\ &+ \left[\mu_1\frac{d^2y_1}{dt_2} - \rho_1\mathrm{F}_y\right]\delta y_1 \\ &+ \left[\mu_1\frac{d^2z_1}{dt^2} - \rho_1\mathrm{F}_z\right]\delta z_1 \Big\} = 0. \end{aligned}$$

Après avoir remplacé F_x, ... par leurs valeurs (XIV) ou (XVI) (les termes relatifs à l'électron lui-même y joueront un rôle spécial), on n'aura plus, dans (1) et (2), que des relations d'espace et de temps, même lorsque $\mu = 0$, c'est-à-dire lorsque la masse est tout entière d'origine électromagnétique.

Or, je dis que les équations de Lorentz n'expriment effectivement rien de plus que (1) et (2), c'est-à-dire que le champ *dans l'éther pur* ne joue jamais de rôle. En effet, on n'obtient ce champ en grandeur et en direction qu'en y plaçant un corps, et en observant les forces mécaniques qu'il éprouve ou plutôt ses mouvements et ceux des ions dont il est le siège, mouvements qui sont indiqués par des phénomènes lumineux, thermiques, chimiques, etc. On ne connaît donc directement que F, et cela *seulement en des points tels que x_1, y_1, z_1, où il y a de la matière électrisée*, et l'on en déduit E, H par raisonnement (ce qui n'est pas toujours très simple lorsqu'il faut avoir égard au mouvement absolu). C'est dire qu'il suffira toujours et dans tous les cas de connaître la for-

mule donnant F comme somme d'actions élémentaires exercées par un élément de charge sur un autre élément de charge, et que cette seconde représentation est, au *point de vue des faits*, exactement équivalente à la première qui part du champ, et les équations aux dérivées partielles; celles-ci ne jouent qu'un rôle intermédiaire *purement mathématique;* on peut, si l'on veut, se passer complètement des notions de champ électrique et magnétique.

Il importe de bien préciser le sens de cette affirmation. Dans la théorie de la lumière, par exemple, tout peut, dans la théorie de Lorentz ainsi présentée, se ramener à des actions élémentaires entre les ions de la source lumineuse, ceux des diélectriques ou conducteurs qui constituent l'appareil optique, enfin ceux de la rétine ou de la plaque sensible qui reçoit l'impression. Ainsi l'on est habitué, par exemple, à rendre compte des phénomènes de diffraction qu'on observe dans le cas d'une fente pratiquée dans un écran en considérant avec Fresnel les points de l'éther situés dans la fente comme autant de centres d'ébranlement. Cela n'est pas conforme à la formule des potentiels retardés : les charges électriques seules sont des points de départ d'ondes. La théorie de Lorentz, ou la loi des actions élémentaires, les expliquera par l'action combinée des ions de la source et de ceux de l'écran ; il est d'ailleurs facile de montrer par le principe de Huygens, sous la forme que lui a donnée Kirchhoff, l'équivalence des deux procédés au point de vue des résultats.

Il ne serait plus permis de dire que le champ est un intermédiaire purement mathématique dont on peut se passer, s'il nous *était possible de percevoir son existence en un point de l'éther sans placer en ce point aucune matière.* C'est ce qui arriverait, par exemple, si l'éther était, sous l'action du champ, susceptible de se modifier ou de se mouvoir plus ou moins, comme le veut la théorie de Hertz, et comme l'exige Lord Kelvin [1]. Des expériences interférentielles auraient pu mettre cette vitesse en évidence. Ces idées étaient très généralement répandues; mais on sait que

---

[1] Lord KELVIN, *Baltimore Lectures on molecular dynamics and the wave-theory of light*, London, 1904, p. 159 : « It is absolutely certain that there is a definite dynamical theory for waves of light, to be enriched, not abolished, by electromagnetic theory. »

l'expérience, interrogée à bien des reprises ([1]), n'a donné que des résultats négatifs, comme d'ailleurs toutes les expériences destinées à mettre l'éther en évidence. L'hypothèse de ces mouvements n'a, d'autre part, conduit à aucune explication mécanique plausible des actions électriques dans leur ensemble. M. Lorentz a été ainsi amené à en faire abstraction dans les exposés plus récents de sa théorie; et c'est ce qui entraîne l'affirmation qu'on peut éliminer la notion de force et de champ de cette théorie sans toucher à aucun fait d'expérience réel ou possible suivant elle.

M. Lorentz avait déjà indiqué ([2]) ce point de vue : « On voit donc que, dans la nouvelle forme que je vais lui donner, la théorie de Maxwell se rapproche des anciennes idées. On peut même, après avoir établi les formules assez simples qui régissent les mouvements des particules, faire abstraction du raisonnement qui y a conduit et regarder ces formules comme exprimant une loi fondamentale, comparable à celles de Weber et de Clausius. » Les actions, toutefois, ne sont plus instantanées; et nous avons vu qu'à cette importante restriction près, il y a même identité avec la loi de Clausius.

On voit facilement que la notion de champ introduit celle de mouvement absolu, dès que les vitesses interviennent soit dans l'expression du champ, soit dans celle de son action sur les corps. Il n'en est plus de même s'il ne dépend que des coordonnées et des accélérations.

§ 3. — L'irréversibilité et les potentiels retardés.

Je me propose maintenant d'examiner de plus près les hypothèses qui conduisent des équations aux dérivées (IX) et (X) aux formules (XII) et (XIII) les potentiels retardés, et de montrer que le passage des secondes aux premières est immédiat, mais que la proposition inverse est bien loin d'être vraie.

Il faut remarquer d'abord l'importance fondamentale de ces formules. Par opposition aux phénomènes mécaniques, les phéno-

---

([1]) *Voir* en particulier O. Lodge, *Phil. Trans.*, t. CLXXXIV, 1893; Henderson and Henry, *Phyl. Mag.*, 5e série, t. XLIV, 1897, p. 20.

([2]) *Arch. néer.*, t. XXV, 1892, p. 433.

mènes électromagnétiques sont en général irréversibles à cause de la radiation; on peut même, pour ce motif, espérer obtenir par leur moyen une interprétation plus complète des phénomènes physiques irréversibles. Mais les équations de Lorentz ne changent pas quand on y change le signe du temps; elles contiennent l'affirmation de la réversibilité, tandis que, dans les potentiels retardés et les actions élémentaires, les directions positive et négative du temps jouent des rôles tout différents. On y a introduit, comme dans les cycles irréversibles de Helmholtz, une vitesse dont il est par hypothèse impossible de changer le sens : la vitesse avec laquelle les ondes *s'éloignent* constamment des corps qui les ont émises; c'est de là que découle l'irréversibilité électromagnétique. L'hypothèse supplémentaire qui y conduit doit donc être examinée avec soin.

Soient $f(x, y, z, t)$ une fonction continue, proportionnelle à la densité électrique $\rho(x, y, z, t)$ et φ une autre fonction jouissant dans tout l'espace et à l'infini des propriétés de continuité des potentiels et satisfaisant partout à l'équation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = 4\pi f. \tag{3}$$

Il est facile de vérifier que l'intégrale

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, y, z, t) = \displaystyle\int \frac{d\tau' f\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right)}{r} \\ \left[r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right] \end{array} \right. \tag{4}$$

est une solution de (3). En effet, isolons un très petit volume τ_0 autour du point xyz; on pourra différentier sous le signe *somme* l'intégrale relative au reste de l'espace pour laquelle xyz est un point extérieur; en y appliquant l'opération $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, on trouve zéro. A l'intérieur de τ_0, l'opération $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'effectue encore sous le signe *somme*, et donne un résultat tendant vers zéro avec τ_0. Pour effectuer l'opération Δ, posons, r étant très petit dans τ_0,

$$\int_{\tau_0} \frac{d\tau' f\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right)}{r} = \int_{\tau_0} d\tau' \left[\frac{f(x', y', z', t)}{r} - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial f'}{\partial t}\right)_{t + \frac{\theta r}{c}}\right].$$

L'opération $-\Delta$, appliquée au premier terme, donne

$$4\pi f(x, y, z, t)$$

d'après le théorème de Poisson; pour le second terme, le dénominateur r manquant, le résultat tend vers zéro avec τ_0; on a donc bien l'équation (3). Je n'insiste pas sur les conditions de continuité sans importance qu'il faut admettre pour les dérivées de f.

On démontrerait de même que

$$\varphi_2 = \int \frac{d\tau' f\left(x', y', z', t + \frac{r}{c}\right)}{r},$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\int \frac{d\tau'\left[f\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right) + f\left(x', y', z', t + \frac{r}{c}\right)\right]}{r}$$

et, plus généralement,

$$\varphi_4 = \int \frac{d\tau'}{r}\left[F_1\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right) + F_2\left(x', y', z', t + \frac{r}{c}\right)\right]$$

sont encore des solutions de (3), pourvu que les fonctions arbitraires F_1, F_2 satisfassent à la relation

$$F_1(x, y, z, t) + F_2(x, y, z, t) = f(x, y, z, t).$$

La solution φ_1 correspond à des ondes qui s'éloignent en tous sens de la charge électrique qui leur a donné naissance; φ_2, à des ondes qui, venant de l'infini, convergent vers ces mêmes points; au contraire de φ_1 qui ne dépend que des états antérieurs, φ_2 ne dépend que d'états postérieurs. La solution φ_3 contient les deux espèces d'ondes; enfin φ_4 correspond à des ondes dont les centres d'ébranlement peuvent être situés dans l'éther pur, où $f = 0$. L'expérience montre, et M. Lorentz admet, que les ondes φ_1 peuvent exister, et l'on verra d'ailleurs (§ 4) que l'hypothèse contraire entraînerait des conséquences inadmissibles, telles que la possibilité d'un *perpetuum mobile*. On en conclura d'abord que *les équations de Lorentz* (et le résultat s'étend à celles de Maxwell et de Hertz) *admettent une infinité de solutions satisfaisant à toutes les conditions, mais incompatibles avec l'expérience.*

On trouve effectivement de telles solutions, et l'on est amené à les écarter *a priori*, chaque fois que l'on calcule par exemple les oscil-

lations électriques d'un système (sphère conductrice, excitateur de Hertz, électron oscillant, etc.).

Examinons les hypothèses par lesquelles on croit pouvoir éliminer ces solutions. On démontre qu'on a identiquement pour toute solution de (3) à l'intérieur d'une surface fermée S

$$(5)\quad \varphi(x, y, z, t) = \int \frac{[f']\, d\tau'}{r} + \int_S dS' \left\{ [\varphi'] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right] - \frac{1}{cr}\,\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right] \right\},$$

où l'on a posé comme plus haut

$$[f'] = f\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right).$$

Supposons qu'à un instant quelconque $t = 0$ *situé dans le passé* l'on ait eu partout, ou du moins à de grandes distances, $\varphi = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$; on pourra, pour toute valeur positive de t et en tout point xyz, choisir pour S une sphère de centre xyz et de rayon $R > ct$ suffisamment grand pour que tous les termes de l'intégrale de surface soient nuls : il restera bien la formule (4). Ce raisonnement appelle les remarques suivantes :

1° Les quantités qui interviennent dans la théorie électromagnétique du mouvement uniforme de translation ou de rotation ne satisfont jamais à la condition relative à $t = 0$; cette théorie reste donc exclue. Plus généralement, les auteurs qui se sont servis de ce raisonnement ne se sont guère, la formule une fois établie, préoccupés de vérifier, dans les questions qu'ils ont traitées, si cette condition est bien remplie. Elle ne l'est dans presque aucun cas. Or on a vu que la formule doit être *absolument générale*.

2° S'il n'y a pour $t = 0$ qu'un champ très faible à grande distance, ce champ, si c'est celui d'une onde convergente, pourra acquérir quelques instants plus tard une très grande intensité en un point donné de l'espace; il ne suffit donc pas de supposer le champ faible pour l'instant $t = 0$ dans tout l'espace (ou, du moins, à de grandes distances); il faut qu'il soit rigoureusement nul (ce qui est une hypothèse d'un caractère inadmissible en Physique) ou qu'on ait au préalable exclu les ondes convergentes, ce qui serait une pétition de principe. Dans le cas du son (et cette analogie peut

tromper facilement) le frottement détruit toute onde après peu d'instants, et le raisonnement est pratiquement applicable ; il n'en est pas, ainsi de l'éther, et l'on devrait s'attendre, *a priori*, à y trouver un état de choses analogue à celui qu'on observe au bord d'une grande nappe d'eau où, à côté des vagues divergentes produites par les corps solides du rivage, il en est d'autres qui viennent constamment du large et ne sont produites par aucun corps solide. Si donc la formule (4) n'est pas rigoureuse, il faudra s'attendre à chaque instant à la création subite d'un champ intense, sorte de vague électromagnétique venant de l'infini ou qui diverge d'une région de l'éther vers laquelle elle a d'abord convergé.

3° Le seul rayonnement solaire et stellaire, qui crée dans tout l'univers sidéral depuis un temps extrêmement long un champ électromagnétique oscillant, obligerait à reculer l'instant $t=0$ au delà de toutes les limites du connaissable. Une hypothèse si fondamentale ne doit pas présenter ce caractère inadmissible.

4° Examinons ce qui a dû se passer avant l'instant $t=0$. On démontrera, en changeant c en $-c$, la formule analogue

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x, y, z, t) \\ &\quad = \int \frac{(f')}{r}\, d\tau' + \int dS' \left[(\varphi') \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \\ &\qquad\qquad \left[(f') = f\left(x', y', z', t + \frac{r}{c}\right) \right]. \end{aligned}\right.$$

Le même raisonnement donnera

$$\varphi = \int \frac{(f')}{r}\, d\tau',$$

c'est-à-dire qu'avant l'instant $t=0$, les ondes étant convergentes, les corps s'échauffaient par le rayonnement et constituaient ainsi des *perpetuum mobile*.

Il est inutile d'insister davantage. *L'hypothèse qu'on part du repos (ou les modifications sans importance qui en ont été présentées) n'est pas admissible comme base de la loi générale des potentiels retardés.* Elle ne l'est même pas pour des cas particuliers. Considérons un oscillateur hertzien : à l'instant $t=0$ l'étincelle jaillit, le champ magnétique, d'abord nul partout, est perturbé ; mais, au bout d'un temps très court, le système est de nouveau au

repos. Il ne l'est d'ailleurs pas *exactement*, pas plus qu'il ne l'était avant l'expérience : il ne l'est que *sensiblement*. Si nous partons, dans le raisonnement, du premier état de *repos*, il n'y aura que des ondes convergentes. Pourquoi choisissons-nous le premier, et n'avons-nous aucun scrupule d'ailleurs, pour une nouvelle expérience, de choisir le second, qui joue maintenant le rôle de premier? C'est que les parties éloignées de l'espace, et inaccessibles à l'expérience, jouent dans l'hypothèse un rôle prépondérant : si elles nous amenaient des ondes convergentes, notre raisonnement *approximatif* fondé sur les parties rapprochées ne donnerait bientôt plus une approximation même grossière.

Mais heureusement nous savons *a priori* par une longue expérience que les ondes éloignées *divergent*, et c'est ce qui nous permet de les négliger, mais en rendant inutile la démonstration. Si l'éther présentait une viscosité analogue à celle de l'air, des considérations toutes différentes interviendraient et il n'y aurait plus lieu de s'étonner de l'irréversibilité, puisqu'on l'aurait introduite dans les équations elles-mêmes.

Plus généralement, aucune théorie qui fait sur l'état initial des hypothèses plus spéciales que ne l'exige la loi des potentiels ne sera admissible : elle exclura certains phénomènes possibles et admettra, pour $t<0$, des solutions impossibles. Quelle est dès lors la condition initiale nécessaire et suffisante pour que (4) ait lieu?

Posons

$$\varphi = \varphi_1 - \psi;$$

on aura

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi = 0 \tag{7}$$

dans tout l'espace $\psi = 0$ à l'infini. Pour que ψ soit nul constamment, il faut et il suffit que pour $t=0$ on ait $\psi=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$ dans tout l'espace. Cela revient à dire que, pour que la formule (4) ait lieu toujours, *il faut et il suffit qu'elle ait lieu en deux instants* $t=0$, $t=dt$ *infiniment rapprochés*, énoncé dont il n'y a évidemment rien à tirer au point de vue de Maxwell.

Peut-on remplacer l'hypothèse sur l'état initial par quelque autre condition générale équivalente?

M. Lorentz [1] ne fait pas usage de cette hypothèse. Il admet simplement que l'intégrale de surface dans (5) s'annule quand S s'éloigne indéfiniment. Après avoir écrit (4), il continue : « Cette solution n'est donc pas l'intégrale générale de (3); il y aura, par exemple, aussi des solutions correspondant à un mouvement des ondes qui serait dirigé vers les éléments de volume au lieu de s'en éloigner. Nous les rejetterons de la théorie en admettant une fois pour toutes que les éléments chargés sont seuls des points de départ de perturbations. Nous excluons aussi tous les états de l'éther qui sont complètement indépendants de la matière chargée : si celle-ci n'existait pas, l'éther resterait constamment au repos. »

Mais appliquons sans changement ces idées à la formule (6) : l'intégrale de surface s'évanouissant, on obtiendrait des ondes convergentes. Mais ni l'une ni l'autre manière de procéder ne sont admissibles : ces intégrales de surface, considérées comme fonctions de x, y, z, t, sont la solution générale de (6); elles ne sauraient donc *tendre vers zéro*, pour une valeur donnée de x, y, z, t, lorsque la surface s'éloigne indéfiniment : elles ont une valeur invariable, finie ou nulle, selon que la solution choisie est finie ou nulle. Il n'y a rien à tirer de telles identités. Enfin, il n'y a aucun sens précis à attacher à cette proposition : les perturbations dépendant de l'éther seul sont exclues. Si l'on adoptait, *a priori*, les formules φ_2 ou φ_3, qui ne dépendent également que de la matière, on pourrait écrire

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \Phi, \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = 0,$$

et l'on aurait encore le droit de dire que Φ est indépendant de la matière, puisque son équation différentielle et ses conditions de continuité en sont indépendantes. Dans cette manière de voir, c'est φ_1 qui contiendrait un terme indépendant de la matière. Dira-t-on enfin que l'état en un point est déterminé par l'« histoire antérieure » de la manière seule? D'autres solutions que (3) restent possibles.

---

[1] *Elektronentheorie*, p. 158; *voir* aussi WIECHERT, *Arch. néerl.*, 1900, p. 549, et P. HERTZ, *Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons Inaug. Diss.*, Göttingen, 1904, p. 5 et 12, en note. Dans son premier Mémoire de 1892, M. Lorentz se contente de vérifier que les équations sont satisfaites.

L'insuffisance de ces énoncés, et d'autres analogues, tient à ce que *la décomposition d'un champ en ondes est une opération mathématique qui peut se faire d'une infinité de manières*. Mais le caractère de cette opération est doublement artificiel au point de vue des idées de Maxwell, car la considération de l'origine des ondes exige celle du champ entier pendant un intervalle de temps fini, tandis que Maxwell voyait un avantage essentiel de sa théorie précisément de ce fait qu'elle rend inutile la considération des actions élémentaires et de l'origine du champ et ne se préoccupe que de l'entourage immédiat du point considéré. On voit qu'il n'en est rien, et que, pour éliminer les solutions physiquement impossibles, il ne reste qu'à adopter *a priori* les formules des potentiels retardés, qui distinguent les actions élementaires comme le faisaient les théories classiques, et à constater qu'elles satisfont aux équations, c'est-à-dire peuvent les remplacer complètement, tandis que l'inverse n'est pas le cas.

En rapprochant ces résultats de ceux du paragraphe précédent, on voit qu'en dernière analyse *c'est la formule des actions élémentaires, et non le système d'équations aux dérivées partielles, qui est l'expression exacte et complète de la théorie de Lorentz*.

Il faut ajouter, il est vrai, l'hypothèse des coordonnnées absolues. On vient de voir que l'éther, au lieu de jouer un rôle indépendant et même prépondérant, comme on aurait dû s'y attendre puisqu'il est censé être le réservoir de toute l'énergie électromagnétique, se dérobe une fois de plus. Son seul rôle va consister à fournir, en contradiction avec l'expérience, un système de coordonnées absolues.

On aura évidemment les mêmes difficultés pour passer d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, *réversibles* au moins en ce qui concerne l'éther pur, aux solutions *irréversibles* qu'exige l'expérience. Dans la théorie de Hertz, cela semble même impossible. *Les équations aux dérivées partielles et la notion d'éther sont essentiellement impropres à exprimer l'ensemble des lois de la propagation des actions électrodynamiques.*

§ 4. — L'Énergie.

Maxwell a montré que, dans tous les cas particuliers où l'on connaît l'énergie électromagnétique, celle-ci peut se mettre sous la forme d'une intégrale étendue à tout l'espace qui, dans les hypothèses de Lorentz, prend la forme

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 + H_x^2 + H_y^2 + H_z^2)\,d\tau.$$

Maxwell admet, et c'est un point important de son système, que chaque élément de volume est effectivement, et dans tous les cas, le siège d'une quantité d'énergie égale à

$$\frac{d\tau}{8\pi}(E^2 + H^2).$$

Poynting a ensuite démontré qu'il résulte des équations générales que pour toute surface σ fermée on a

$$dT - dW = -dt\int S_n\,d\sigma,$$

où dT est le travail des forces extérieures, et S_n la composante suivant la normale extérieure du *vecteur radiant*

$$S_x = \frac{c}{4\pi}(E_y H_z - E_z H_y), \qquad S_y = \frac{c}{4\pi}(E_z H_x - E_x H_z), \qquad S_z = \ldots.$$

Ce théorème s'énonce élégamment en considérant l'énergie comme un fluide indestructible qui se meut parallèlement au vecteur radiant, image qui présente certains avantages et prête le flanc à bien des critiques [1]. En particulier, on peut se demander si cet énoncé : *l'énergie contenue dans tel volume a telle valeur* a vraiment un sens, alors que nous ne pouvons définir que des différences d'énergie.

Nous laisserons de côté cette question métaphysique, pour étudier l'indétermination dont souffre ce mode de représentation.

---

[1] *Voir* W. Wien, *Annalen der Physik u. Chemie*, 2e série, t. XLV, 1892, p. 684.

L'énergie électrostatique d'un système est

$$(8)\quad \begin{cases} W_E = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\!\!\int \dfrac{\rho_1 \rho_2 \, d\tau_1 \, d\tau_2}{r_{12}} \\ \left[\begin{array}{l} \rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1), \qquad \rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2) \\ r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{array}\right], \end{cases}$$

les deux intégrations étant étendues à toutes les parties de l'espace où se trouvent des charges électriques.

Il est évident que cette expression peut, d'une infinité de manières, se mettre sous la forme d'une intégrale étendue à tout l'espace, et celle que Maxwell a choisie est, au point de vue de son système, particulièrement simple. Mais on en peut indiquer d'autres qui auront, par exemple, l'avantage de se rapprocher davantage des formes usitées dans la théorie des corps élastiques. Ainsi, introduisons, au lieu de la force électrique E en x, y, z qui est

$$E_x = \int \rho_1 \frac{x - x_1}{r_1^3} \, d\tau_1, \qquad E_y = \ldots$$

le vecteur

$$(9)\quad \xi = \int \rho_1 \frac{(x - x_1)}{r_1^2} \, d\tau_1, \qquad \eta = \int \rho_1 \frac{(y - y_1)}{r_1^2} \, d\tau_1, \qquad \zeta = \ldots,$$

d'où

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = \displaystyle\int \dfrac{\rho_1}{r_1^2} \, d\tau_1, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial \xi}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Or, si ξ, η, ζ étaient les composantes du déplacement d'un corps élastique, l'énergie de ce dernier serait, comme on sait,

$$(11)\quad \begin{aligned} W' = \int \Bigg\{ & \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 \\ & + \mu \Bigg[\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \\ & \qquad - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \Bigg] \Bigg\} \, d\tau, \end{aligned}$$

λ et μ étant des constantes d'élasticité du corps, ou, en ajoutant les

quantités nulles $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2$, ... et transformant,

$$W' = \lambda \int \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2 d\tau$$
$$-\mu \int_{S'} \left[\eta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cos ny - \frac{\partial\xi}{\partial y}\cos nx\right)+\dots\right] dS'.$$

Si le corps élastique est infiniment étendu, en vertu des formules (9), l'intégrale de surface s'évanouira, et il restera

$$W' = \lambda \int_\infty \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2 d\tau = \int_\infty \left(\int \frac{\rho_1\, d\tau_1}{r_1^2}\right)^2 d\tau.$$

L'électricité étant supposée invariablement attachée à de petits corps solides (ions) k_i, on a

$$\left(\int \frac{\rho_1\, d\tau_1}{r_1^2}\right)^2 = \left(\sum_i \int_{k_i} \frac{\rho_1\, d\tau_1}{r_1^2}\right)^2$$
$$= \sum_i \left(\int_{k_i} \frac{\rho_1\, d\tau_1}{r_1^2}\right)^2 + \sum_{m,n}\sum \int_{k_m}\int_{k_n} \frac{\rho_1 \rho_2\, d\tau_1\, d\tau_2}{r_1^2 r_2^2}.$$

Le premier terme ne dépend pas des positions mutuelles des corps; son intégrale par rapport à x, y, z, étendue à tout l'espace, sera une constante. Dans la double somme, les variables x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 prennent les ensembles de valeurs relatives à une combinaison quelconque d'ions *différents* k_m, k_n; on n'a donc jamais $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, ce qui permet d'intervertir l'ordre des intégrations et d'écrire

$$W' = \lambda \sum_m \sum_n \int_{k_m}\int_{k_n} \rho_1 \rho_2\, d\tau_1\, d\tau_2 \int_\infty \frac{d\tau}{r_1^2 r_2^2}.$$

Pour évaluer l'intégrale prise par rapport à x, y, z, introduisons des coordonnées polaires r, ϑ, φ, avec x_1, y_1, z_1 comme pôle, la ligne (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) comme axe polaire. Soit r_{12} la distance de ces deux points; on aura à calculer

$$\int \frac{d\tau}{r_1^2 r_2^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_0^\infty \frac{\sin\vartheta\, dr}{r_{12}^2 + r^2 - 2 r_{12} r \cos\vartheta}$$
$$= 2\pi \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{r_{12}} \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{r - r_{12}\cos\vartheta}{r_{12}\sin\vartheta}\right)_{r=0}^{r=\infty}.$$

Les valeurs principales $\left(\text{comprises entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } +\frac{\pi}{2}\right)$ sont $\frac{\pi}{2}$ pour $r = \infty$, et $\mathfrak{I} = \frac{\pi}{2}$ pour $r = 0$; on trouve finalement

$$2\pi \int_0^\pi \frac{d\mathfrak{I}(\pi - \mathfrak{I})}{r_{12}} = \frac{\pi^3}{r_{12}},$$

d'où

$$W' = \sum_{m,n} \pi^3 \lambda \int_{k_m} \int_{k_n} \frac{\rho_1 \rho_2 \, d\tau_1 \, d\tau_2}{r_{12}} + \text{const.} \tag{11}$$

On conclut enfin, en choisissant $\lambda = \frac{1}{2\pi^3}$, que, dans les hypothèses faites et avec les unités introduites, *l'énergie élastique* W' *sera, à une constante additive près, égale à l'énergie électrique* W_E *donnée par* (8) *et que* l'on a en particulier la formule

$$W_E = \frac{1}{2\pi^3} \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 d\tau, \tag{12}$$

formule irréductible à celle de Maxwell, et donnant une répartition de l'énergie toute différente. Il serait aisé d'obtenir, en partant de là, une expression analogue pour l'énergie des aimants et, par conséquent, des courants; et l'on voit que, *même en exigeant la simplicité des formules, la localisation de l'énergie reste un problème indéterminé.*

Il en est de même du flux d'énergie [1]; on peut toujours modifier le mouvement du *fluide* énergie de façon arbitraire en ajoutant au vecteur de Poynting un autre vecteur (u, v, w) assujetti seulement à satisfaire à l'équation des fluides incompressibles

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$\int_S u_n \, dS = 0.$$

Le théorème de Poynting, conséquence des équations générales, ne leur ajoute rien; *la localisation de l'énergie doit donc être comptée au nombre des conceptions logiquement inutiles* (et peut-être parfois nuisibles) *de la théorie.*

---

[1] *Voir* l'article de M. Voss dans *Encyklop. d. math. Wissenschaften*, t. IV, art. I, 1901, p. 111-114.

Mais il est un autre aspect sous lequel il importe de considérer le théorème de Poynting.

La source première du théorème de la conservation de l'énergie a été et restera l'impossibilité expérimentale du *perpetuum mobile*, impossibilité qui doit subsister, quelles que soient nos idées sur les apports d'énergie qu'est susceptible de fournir l'éther en l'absence de corps matériels. Le théorème de l'énergie, sous sa forme classique

$$W = \text{const.},$$

expliquait cette impossibilité. Le théorème de Poynting, n'exigeant que la possibilité de la transformation d'une intégrale de volume (déjà en partie arbitraire) en intégrale de surface, exprime infiniment moins : *loin de rendre compte de cette impossibilité, il admet parfaitement la construction d'un* perpetuum mobile. Cela tient à ce que, tant qu'on n'a pas introduit l'hypothèse des potentiels retardés, un apport continu d'énergie par des ondes convergentes venant de l'infini reste tout aussi possible que la perte d'énergie qu'on observe en réalité. Or un engin qui tirerait perpétuellement de l'énergie de l'éther seul, indépendamment de la présence des corps matériels, serait un *perpetuum mobile*. On sait d'ailleurs qu'en adoptant la formule des potentiels retardés, on démontre [1] qu'une particule *accélérée perd* de l'énergie et subit de ce fait une réaction proportionnelle à la dérivée de l'accélération. Il suffit de changer le signe de c pour passer à l'hypothèse des ondes convergentes ; on voit alors que le signe du vecteur radiant change également, et la nouvelle hypothèse conduira, par exemple dans le cas d'une particule en vibration, à une augmentation continuelle de l'amplitude avec le temps, et plus généralement à une augmentation d'énergie du système.

Le théorème de Poynting *n'exprime la loi de l'énergie que lorsqu'on y remplace les champs par leur expression tirée de ses potentiels retardés*, restriction qui lui enlève beaucoup de son élégance et de sa portée.

Si l'on part d'un état où le rayonnement est sensiblement nul et où l'énergie E_1 peut être évaluée en travail, et qu'on arrive à un

---

(1) LORENTZ, *Elektronentheorie*, p. 186. — LARMOR, *Aether and Matter*, Chap. XIV.

état analogue (énergie E_2), le système étant supposé soustrait à l'action de corps extérieurs, on aura dans la théorie de Lorentz (qui suppose admise la formule des potentiels)

$$E_1 \geqq E_2,$$

l'égalité n'ayant lieu que si le rayonnement a été continuellement nul. L'impossibilité du *perpetuum mobile* ne donne également, dans un système *essentiellement irréversible*, qu'une inégalité : l'énergie ne peut jamais augmenter. Il y a parallélisme, sous ce rapport, avec la loi de l'entropie. En *fait*, l'énergie électromagnétique ne se conserve pas en général, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'intégrale $W = \text{const.}$ On sauve la loi de la conservation de l'énergie en attribuant à l'éther la quantité perdue, et ce procédé a certainement de grands avantages, surtout quand on peut récupérer en entier l'énergie perdue par le système au moyen de corps qui *n'agissent pas sensiblement sur lui*, comme les corps noirs, en Optique. Mais, cette énergie ne produisant pas dans ce milieu hypothétique aucune modification qui soit perceptible aux sens, on peut se demander si, dans ces conditions, il ne serait pas possible de sauver de même toute autre loi analogue, et on l'a fait effectivement pour la quantité de mouvement électromagnétique.

Dans le cas le plus général du rayonnement électromagnétique, la conservation de l'énergie n'est plus une loi, mais une convention. C'est là une évolution assez fréquente dans le domaine des vérités physiques, comme l'a exposé M. Poincaré [1].

§ 5. — La gravitation.

Si l'on considère les théories électromagnétiques sous leur forme actuelle comme une base générale pour l'explication des phénomènes physiques, rôle que remplissait jusqu'ici la Mécanique seule, il conviendra, en premier lieu, de se demander si l'on peut faire rentrer la gravitation dans ce schéma général. La notion de champ

---

[1] H. Poincaré, *Science et Hypothèse*, Paris, 1901. Remarquons encore que cet énoncé : « L'énergie du monde entier se conserve » n'a aucun sens, sauf pour un espace à courbure positive constante.

avec ses conséquences est-elle susceptible de s'y appliquer? La réponse donnée par Maxwell [1] est *négative.*

En introduisant, en effet, la force $R_x R_y R_z$ que la gravitation exerce en un point xyz de l'espace sur l'unité de masse, on pourra bien, comme en Électrostatique, déterminer cette force par le système d'équation (μ = densité)

$$\frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{\partial R_z}{\partial z} = -4\pi\mu,$$

$$\frac{\partial R_y}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R_z}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial R_x}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial x} = 0, \qquad R_\infty = 0,$$

et la valeur de l'énergie sera

$$E = -\frac{1}{8\pi}\int d\tau(R_x^2 + R_y^2 + R_z^2) + \text{const.}$$

(l'unité de masse étant convenablement choisie). Comme il y a attraction, l'intégrale a le signe —. Or, dit Maxwell, l'énergie étant essentiellement positive, pour que E soit positif, il faudra choisir pour la constante une valeur énorme, supérieure à la plus grande valeur que puisse acquérir l'intégrale pour toutes les positions possibles des corps ; l'énergie intrinsèque du champ de gravitation doit donc être *diminuée* partout où la gravitation est sensible. « Comme il m'est impossible de comprendre comment un milieu pourrait posséder de telles propriétés, je ne puis poursuivre dans cette voie la recherche de la cause de la gravitation. »

On peut encore dire que la condition de stabilité d'un milieu continu, élastique ou autre, est toujours que l'énergie soit minimum quand la déformation est nulle ; ici, elle est maximum pour $R = 0$; *le champ de gravitation serait en équilibre instable à l'infini et partout où* R *est nul.*

La notion de champ ne semble donc pas pouvoir s'appliquer à la gravitation ; il ne saurait dès lors être question de l'envisager comme une base générale pour l'explication des phénomènes physiques.

Au contraire, la loi d'action élémentaire qui résulte de la théorie de Lorentz, si l'on y remplace les charges électriques par des

---

(1) MAXWELL, *Scient. Papers*, t. I, p. 570.

masses, peut, comme d'ailleurs les lois analogues de Weber, Gauss, etc., remplacer la loi classique de la gravitation sans que les termes nouveaux et la propagation ainsi introduits aient d'influence appréciable sur les phénomènes astronomiques [1]; ces termes, en effet, sont du second ordre [2] et, par conséquent, extrêmement petits. On sait que Laplace était parvenu à ce résultat que la vitesse de propagation de la gravitation est au moins 100000000 de fois plus grande que celle de la lumière; mais cela tient à ce que, dans sa manière de concevoir la propagation, celle-ci introduisait un terme du premier ordre et que, de plus, ce terme correspond à un frottement, ce qui n'a pas lieu chez Lorentz.

L'explication de Zöllner adoptée par Lorentz est, on le sait, que l'attraction de deux charges électriques de signe contraire est légèrement plus grande que la répulsion de deux charges de même signe et de même valeur absolue. Cette explication détruit l'unité du champ électrique, et n'est dès lors applicable qu'aux actions élémentaires.

§ 6. — L'action et la réaction.

L'éther agissant sur les ions sans subir lui-même d'action, le principe de Newton n'est pas satisfait dans la théorie de Lorentz, et M. Poincaré [3] a montré qu'on a pour la résultante de translation

$$\int_{\infty} \frac{d\tau}{c^2} S_x, \qquad \int_{\infty} \frac{d\tau}{c^2} S_y, \qquad \int_{\infty} \frac{d\tau}{c^2} S_z,$$

où les intégrales sont étendues à tout l'espace et S le vecteur radiant. De plus, un corps électrisé en mouvement uniforme exerce sur lui-même, en général, un couple. Il importe de considérer séparément les divers aspects de la question qui se pose : peut-on, au point de vue *des faits*, tirer de cette inégalité de l'action et de la réaction une objection à la théorie de Lorentz? La réponse est affirmative.

---

(1) Lorentz, *Zittings verslag*, Amsterdam, t. VIII, 1900, p. 603; Wilkens, *Physik. Zeitschr.*, t. VII, 1906, p. 846; Walker, *Physik. Zeitschr.*, t. VII, 1906, p. 300.

(2) C'est-à-dire contiennent le facteur $\frac{1}{c} = \frac{10^{-10}}{3}$ à la seconde puissance.

(3) *Archives néer.*, 2e série, t. V, 1900, p. 252; *Électricité et Optique*, p. 448.

Considérons d'abord deux électrons de charge e, e', de coordonnées x, y, z; x', y', z', de vitesse v, v' et d'accélérations w, w', placés à une distance l'un de l'autre grande par rapport à leurs dimensions. MM. Liénard (¹) et Wiechert (²) ont montré que l'on a, pour les potentiels produits par e',

$$\Phi = \frac{e'}{\left[r\left(1 - \frac{v'_r}{c}\right)\right]}, \qquad A_x = \frac{e'[v'_x]}{\left[r\left(1 - \frac{v'_r}{c}\right)\right]}, \qquad A_y = \ldots,$$

où il faut prendre les quantités placées entre crochets à un instant antérieur $t - \frac{r}{c}$ tel que l'onde émise en cet instant atteigne (xyz) en t; le vecteur r est dirigé de e' vers e, et l'on a l'équation

$$r^2 = \left[x(t) - x'\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 + \left[y(t) - y'\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 + \left[z(t) - z'\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2.$$

Il suffira de considérer le cas particulier où les vitesses et les accélérations sont faibles, en sorte qu'on peut poser

$$x'\left(t - \frac{r}{c}\right) = x'(t) - \frac{r}{c} v'_x(t) + \frac{r^2}{2c^2} w'_x(t).$$

Un calcul facile, qu'on trouvera d'ailleurs dans la seconde Partie, donne alors les développements de Φ et de A, d'où résulte, pour la force F_x exercée par e' sur e, l'expression

$$(13) \quad F_x = ee'\left[\frac{\cos\rho x}{\rho^2}\left(1 + \frac{v'^2 - 3v'^2_\rho}{2c^2} - \frac{v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z}{c^2}\right) - \frac{v'_x v_\rho}{\rho^2 c^2} - \frac{w'_x + w'_\rho \cos\rho x}{2c^2\rho}\right],$$

où toutes les quantités v', w', v doivent être prises à l'instant t et où ρ est la distance *actuelle* des points e, e'.

Cette expression contient les vitesses et les accélérations d'une manière dissymétrique et met bien en évidence l'inégalité de l'action et de la réaction, *même lorsque, les accélérations étant supposées négligeables, il n'y a pas de rayonnement.* Dans le

(¹) LIÉNARD, *L'Éclairage électrique*, t. XVI, 1898, p. 5, 53, 106.
(²) WIECHERT, *Archives néerl.*, 2ᵉ série, t. V, 1900, p. 549.

cas d'un mouvement de translation uniforme des points on a

$$v = v', \qquad w' = 0;$$

le terme multiplié par $\cos(\rho, x)$ est dirigé suivant la ligne de jonction de ee' et satisfait au principe; le terme $\frac{v_x v_\rho}{c^2 c^2}$ donne une force parallèle à v, appliquée à e, et une autre, égale et opposée, appliquée à e'. Si les charges e, e' sont liées par une droite rigide, ces deux forces donneront un *couple* dont l'axe est perpendiculaire à la vitesse v et la ligne de jonction ρ.

On verra, dans la seconde Partie, qu'aucune expérience n'exige cette dissymétrie en ce qui concerne les vitesses, et cela est évident *a priori*; car, aucune expérience n'ayant mis en évidence autre chose que des mouvements relatifs, l'expression (13) doit pouvoir être remplacée par une autre qui ne contient que des vitesses relatives au second degré; une telle expression, assujettie à être une composante de vecteur, ne saurait présenter une telle dissymétrie.

D'autre part, une expérience de MM. Trouton et Noble [1], qui aurait dû, dans le cas d'un condensateur chargé, mettre en évidence le couple dont il a été question, a donné un résultat négatif. *En ce qui concerne les termes relatifs aux vitesses, l'inégalité de l'action et de la réaction constitue donc certainement une grave objection de la théorie de Lorentz.*

On ne saurait en dire autant, au point de vue expérimental, de la dissymétrie des termes qui dépendent de l'accélération w'; ils donnent lieu, en effet, aux vitesses faibles, et, quand certaines conditions de symétrie sont satisfaites, *à la masse électromagnétique* et, plus généralement, à une réaction d'inertie. Pour une sphère uniformément chargée, de rayon R, la résultante des actions élémentaires

$$\frac{de\,de'}{2c^2\rho}(w'_x + w'_\rho \cos \rho x)$$

est

$$\frac{4}{3}\frac{e^2}{R}w_x, \quad \frac{4}{3}\frac{e^2}{R}w_y, \quad \frac{4}{3}\frac{e^2}{R}w_z;$$

la quantité $\frac{4}{3}\frac{e^2}{R}$ est donc la *masse électromagnétique*, et, en fai-

---

[1] *London Transact.*, A, t. CCII, 1903, p. 165.

sant même abstraction des expériences de M. Kaufmann, rien ne permet de nier la possibilité d'une telle réaction; il est, au contraire, évident qu'il y a un avantage considérable, au point de vue de l'unité de nos conceptions, à pouvoir déduire la réaction d'inertie et l'énergie cinétique de l'énergie électromagnétique. Nous étudierons plus loin la question de la variabilité de la masse avec la vitesse.

La théorie de Hertz satisfait au principe d'une manière générale. Par exemple, à la pression qu'exerce la lumière sur un corps plongé dans le diélectrique air ou éther correspond une réaction de même grandeur *appliquée à ces diélectriques* (¹), en sorte que, dans le premier cas, le principe est satisfait en ne considérant que la matière seule. Mais l'expérience a démontré l'existence de cette pression, même dans les vides les plus parfaits; dans ce dernier cas il n'y a pas de réaction, suivant Lorentz, et, suivant Hertz, il y en a bien une, et l'éther est mis en mouvement; mais, pour la rendre sensible, il faudrait que l'éther renonçât à se dérober à toutes les expériences. Pour qui ne conserve pas cet espoir, il est difficile de dire si, dans ce cas, l'avantage logique est du côté de Lorentz qui exprime simplement le fait d'une action sans réaction, ou de celui de Hertz qui sauve le principe, mais d'une manière telle qu'il devient une simple convention.

Si l'on s'en tient aux actions exercées par les ions les uns sur les autres, sans faire intervenir d'intermédiaire tel que l'éther, la vitesse finie de propagation entraîne la non-simultanéité et, par suite, l'inégalité des actions de ions séparés par le vide (au moins en général).

Dans les théories classiques de l'Optique, par exemple dans la théorie de la dispersion de Sellmeier et d'Helmholtz, l'action de la lumière sur les molécules était égale à la réaction de celles-ci *sur l'éther;* le principe n'a jamais été considéré comme s'appliquant à la matière seule. Ce qu'on peut objecter à la théorie, c'est qu'il serait plus satisfaisant que l'intermédiaire fût conçu de manière à répondre à la condition d'égalité de l'action et de la réaction, et j'ai indiqué, dans l'Introduction, que l'énergie rayonnante, matérialisée et projetée avec la vitesse de la lumière, constitue un tel intermé-

(¹) Poincaré, *loc. cit.*

diaire (¹). On revient ainsi, sous une forme nouvelle, à la théorie de l'émission, et, pour me servir de l'exemple de M. Poincaré, le recul d'une pièce d'artillerie et la force subie par un corps qui envoie une onde d'énergie rayonnante dans une certaine direction deviennent absolument analogues, ce qui n'est pas le cas lorsque, au lieu de se servir de cette image, on considère l'énergie comme propagée (hypothèse de l'éther).

M. Poincaré a montré que l'inégalité de l'action et de la réaction n'entraîne pas, dans la théorie de Lorentz, le mouvement perpétuel ; il faut ajouter : à la condition d'admettre l'hypothèse des potentiels retardés.

§ 7. — Analogie entre l'éther et les corps élastiques.

Les équations de Maxwell et de Lorentz prennent, dans le cas de l'éther pur, une forme remarquablement analogue à celle des équations de l'élasticité. Quelle est la signification réelle de cette analogie ?

Le vecteur électrique E satisfait, dans l'éther, aux équations

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \Delta E_x = 0, \qquad \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \Delta E_y = 0, \qquad \ldots, \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \end{array}\right.$$

et il en est de même de H. C'est là une conséquence immédiate des équations fondamentales (I) à (IV).

D'autre part, soient ξ, η, ζ les composantes du déplacement, supposé petit, d'un point d'un corps élastique, A, B des constantes, μ la densité ; on a

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A\,\Delta\xi + B\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \mu\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = A\,\Delta\eta + B\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ \mu\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial^2 t} = \ldots, \\ \text{où} \\ \qquad \sigma = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{array}\right.$$

(¹) Elle permet en même temps d'éviter le mouvement absolu et d'autres difficultés (*voir* Introduction et deuxième Partie).

La théorie électromagnétique montre, on le sait, que E est identique au vecteur de Fresnel, H au vecteur de Neumann (parallèle au plan de polarisation). L'identification des systèmes (14) et (15) conduira à une théorie élastique de la lumière. Pour cela, il faut admettre ou l'incompressibilité de l'éther, c'est-à-dire la condition

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

ou la condition $A + B = 0$. Dans les deux cas, l'identification est immédiate ; ces deux manières d'expliquer la non-existence d'ondes longitudinales ont été admises l'une et l'autre. Dans chacune de ces hypothèses on pourra encore choisir entre la théorie de Fresnel qui conduit à identifier la vitesse

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)$$

de l'éther avec E, ou celle de Neumann qui remplace E par H.

Quelles sont les conditions générales nécessaires et suffisantes pour qu'un phénomène physique caractérisé par un vecteur suive les lois exprimées par (15)? Je dis que ce sont les suivantes :

1° Le phénomène est réversible.

2° ξ, η, ζ satisfont à un système de trois équations aux dérivées partielles qui est du second ordre au plus, et, du moins en première approximation, est linéaire.

3° Le milieu est isotrope et homogène.

En effet, vu la réversibilité, les équations ne contiendront pas de dérivées premières par rapport au temps ; on pourra les résoudre par rapport aux dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

qui sont les composantes d'un vecteur. Vu l'homogénéité, les membres de droite seront à coefficients constants, et, vu l'isotropie, ce seront des sommes de composantes de vecteurs obtenus par différentiation de ξ, η, ζ, par rapport à x, y, z. Or, M. Burckhardt [1]

---

[1] BURCKHARDT, *Math. Annalen*, t. XLIII, 1893, p. 197 ; *Enzyclop. d. math. Wiss.*, Bd. IV, Art. 14, 1901, p. 20.

a déterminé tous ces vecteurs : lorsqu'on n'admet que les dérivées premières et secondes, il n'en existe que trois qui soient linéairement indépendants, savoir

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}, \frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\sigma}{\partial x}\right),$$

$$(\Delta\xi, \Delta\varphi, \Delta\zeta),$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \frac{\partial\sigma}{\partial z}\right),$$

et l'on aura, a, b, c étant des constantes,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + b\,\Delta\xi + c\,\frac{\partial\sigma}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) + b\,\Delta\eta + c\,\frac{\partial\sigma}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \ldots.$$

En changeant les signes de x, y, z et ayant égard à l'isotropie *complète*, on trouve $a = 0$; il reste donc bien le système (15),

C. Q. F. D.

La condition (1) est satisfaite par tous les phénomènes mécaniques (et nous avons vu qu'en réalité elle ne devrait pas être satisfaite par les équations électromagnétiques, qui devraient correspondre à des phénomènes irréversibles) ; (2) et (3) le sont par les phénomènes de diffusion, de propagation de la chaleur et d'autres qui certainement ne présentent entre eux aucune connexion de nature. On en conclura que l'analogie entre (14) et (15) est beaucoup moins caractéristique qu'on n'est, au premier moment, porté à le croire. On ne conclura à une connexion physique réelle entre les deux ordres de phénomènes que si l'analogie se continue encore au delà de cette forme analytique générale. Mais c'est précisément ce qui n'est pas le cas. En effet, l'hypothèse de la vitesse de propagation nulle des ondes longitudinales (A + B = 0) n'est, comme l'ont déjà remarqué Green et Cauchy, pas admissible pour un corps élastique fini ; un tel corps n'opposerait aucune résistance à la compression, son équilibre serait instable. Ce n'est que récemment que l'*éther gyrostatique* de Lord Kelvin nous a permis de concevoir de tels systèmes. D'autre part, l'hypothèse de l'incom-

pressibilité exige l'introduction dans les équations d'un facteur de Lagrange, jouant le rôle de pression; l'identification n'est plus possible que pour les cas où cette pression est constante. Enfin, les conditions aux limites qu'exige l'Optique ne sont pas celles de la théorie de l'élasticité.

Je ne crois donc pas que l'on doive considérer a priori *ces analogies comme l'indice de rapports physiques profonds entre les deux domaines.* On ne s'étonnera pas trop, si l'on adopte cette conclusion, des difficultés et des étrangetés auxquelles conduisent toutes les tentatives faites pour étendre ces analogies de l'éther pur (où, en somme, les équations de Maxwell n'expriment que le fait de la propagation uniforme) aux actions réciproques des charges électriques et de l'éther, exprimées par les équations générales (I) à (VI). Pour cette partie de la question, je ne puis mieux faire que de renvoyer au Chapitre que M. Poincaré a consacré dans ses Leçons [1] à la plus remarquable, semble-t-il, de ces tentatives : celle de M. Larmor.

§ 8. — La masse électrodynamique.

Les remarquables expériences de M. Kaufmann sur la déviabilité électrique et magnétique des rayons β du radium ont conduit à admettre que la masse des corpuscules ou électrons dépend de leur vitesse et est tout entière d'origine électromagnétique. L'existence d'une réaction d'inertie électrique et sa variabilité avec la vitesse avaient été prévues par la théorie, qui, à première vue, semble ainsi avoir reçu une confirmation remarquable. Cependant, devant la grande portée de ces conclusions, il convient d'examiner si elles s'imposent absolument.

Rappelons que, dans ces expériences, un faisceau de rayons β est soumis à l'action simultanée d'un champ électrique E, produisant une déviation y, et d'un champ magnétique H parallèle à E, donnant lieu à une déviation z, perpendiculaire à la première. Une plaque photographique, perpendiculaire aux rayons non déviés, reçoit l'impression des rayons et permet la mesure directe de y et

(1) *Électricité et Optique*, 2e édition, p. 577 et suivantes; Larmor, *Aether and Matter*, Cambridge, 1900.

de z. Soient m et v la masse et la vitesse d'un électron, e sa charge, a et b deux constantes de l'appareil ; on a, d'après la théorie de Lorentz,

$$y = \frac{e\mathrm{E}a}{mv^2}, \qquad z = \frac{e\mathrm{H}b}{mv}. \tag{16}$$

Le radium émettant des rayons de toutes les vitesses, dans certaines limites, ces équations, où v joue le rôle de paramètre, représentent une certaine parabole si m ne dépend pas de v. Or, la courbe observée par M. Kaufmann est différente. Ce fait comporte diverses explications :

1° D'après M. Lorentz, le déplacement d'un corps électrisé *par rapport à l'éther* équivaut à un courant électrique dont le champ, par un effet analogue à la self-induction, réagit sur le corps et donne une force qui, sous des hypothèses très générales, est fonction linéaire des composantes de l'accélération, les coefficients (masse transversale et longitudinale) étant des fonctions déterminées de la vitesse *absolue* v, connues, par exemple, pour la sphère et l'ellipsoïde. Dans le cas des expériences de M. Kaufmann, la masse transversale $\mu(v)$ seule entre en jeu ; si l'on introduit dans (16) la fonction $\mu(v)$ au lieu de m, on obtient à peu près la courbe observée, soit que l'on considère l'électron comme une sphère rigide (Abraham), soit que l'on considère seulement son volume comme constant (Bucherer et Langevin).

Pour apprécier la valeur de cette interprétation, rappelons-nous que le calcul de la masse électrodynamique repose uniquement sur la considération du mouvement du corps électrisé par rapport à l'éther ; la position et la vitesse des autres corps sont indifférentes, c'est la *vitesse absolue* qui entre dans la formule. Dans cette interprétation, l'expérience de M. Kaufmann serait donc la première à mettre en évidence un mouvement absolu. Or, sur cette question délicate, la théorie de M. Lorentz est, du moins dans la forme exposée au paragraphe I, en désaccord avec l'expérience, et ce désaccord porte en particulier sur l'expression de la quantité de mouvement électromagnétique G [1], dont M. Abraham

---

[1] Ce vecteur est, comme on sait, l'intégrale du vecteur radiant étendue à tout l'espace, multipliée par $\frac{1}{c^2}$.

a déduit la valeur des masses longitudinale et transversale. En effet, du calcul de G on déduit ([1]), pour le cas d'un condensateur chargé entraîné dans le mouvement de translation de la Terre, l'existence d'un couple de second ordre appliqué au condensateur. Or, MM. Trouton et Noble, qui ont réalisé cette expérience ([2]), n'ont pas observé ce couple. La quantité G ne dépend donc pas de la vitesse absolue ou, du moins, pas de la même manière qu'exige la théorie de Lorentz. Il en faut conclure *que, si même l'accord entre la théorie de M. Abraham et les expériences de M. Kaufmann était parfait, cette théorie n'en devrait pas moins être considérée comme douteuse.*

2° En cherchant à éliminer de ses équations l'influence du mouvement absolu, M. Lorentz a été conduit à certaines hypothèses nouvelles, sur lesquelles je reviendrai au paragraphe suivant. Les dimensions des électrons, en particulier, seraient réduites à $\left(1-\frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ de leur valeur lorsqu'ils sont animés de la vitesse absolue p. Cette hypothèse conduit à des formules nouvelles pour la masse, que M. Kaufmann considère comme inconciliables avec ses dernières expériences ([3]). Mais cette conclusion me semble douteuse. En effet, prenons pour H, E, a, b les valeurs observées directement; mais, au lieu de

$$\frac{e}{m_0} = 1{,}880.10^7,$$

valeur qui correspond aux rayons cathodiques, prenons dans la formule de MM. Langevin et Bucherer

$$\frac{e}{m_0} = 1{,}955.10^7,$$

dans celle de M. Abraham

$$\frac{e}{m_0} = 2{,}010.10^7,$$

([1]) H.-A. LORENTZ, *Elektronentheorie*, p. 257.

([2]) *London Trans.*, A, t. CCII, 1903, p. 165.

([3]) *Annalen der Physik*, t. XIX, 1906, p. 487; *voir* aussi M. PLANCK, *Physik. Zeitschr.*, t. VII, 1906, p. 754.

enfin dans celle de M. Lorentz

$$\frac{e}{m_0} = 2,125.10^7.$$

Cela revient à multiplier dans les rapports de 1 à 1,040, 1,070, 1,130 les abscisses et les ordonnées calculées par M. Kaufmann pour $\frac{e}{m_0} = 1,880.10^7$ (*loc. cit.*, p. 534). On trouve ainsi trois courbes dont les erreurs sont de l'ordre des erreurs d'expérience, comme on le vérifie en portant ces valeurs dans la courbe, *fig.* 11, de M. Kaufmann. Ce savant a observé directement, puis déduit des diverses formules proposées, par la méthode des moindres carrés, une certaine constante $\frac{E}{Mc}$, indépendante de l'hypothèse faite sur $\frac{e}{m_0}$; la formule de Lorentz en donnait une valeur inadmissible. Notre calcul montre que la valeur de $\frac{E}{Mc}$ déterminée de cette manière comporte une incertitude considérable, car nous avons pris la valeur observée directement, et les erreurs qui en résultent ne dépassent pas la grandeur admissible. Quant à la valeur

$$\frac{e}{m_0} = 1,880.10^7,$$

son application aux rayons β du radium peut n'être pas permise, puisqu'elle ne l'est pas, en général, pour l'effet Zeeman.

En somme, *ces observations ne permettent donc pas de préférer l'une quelconque des formules à une autre*, et il serait facile de multiplier celles-ci encore plus.

Mais il importe d'observer que les nouvelles hypothèses de M. Lorentz entraînent un changement dans l'expression de la force qu'exercent l'un sur l'autre deux corps électrisés en mouvement, changement qui, ainsi que le démontre une discussion facile, n'est sensible que pour des vitesses comparables à celle de la lumière, c'est-à-dire pour la seule expérience de M. Kaufmann.

3° Ceci conduit à une remarque générale ; il est facile d'introduire dans les équations de l'Électrodynamique des termes présentant cette particularité. Puisque le système des équations (I) à (VI) peut être remplacé par les actions élémentaires, il suffira de considérer celles-ci. Or, la force exercée par le point e', de vitesse v',

sur le point e, de vitesse v, contient cette dernière sous forme linéaire avec le facteur $\frac{1}{c^2}$; il contient la première, dans le cas de mouvements uniformes, sous une forme très compliquée (donnée par M. Schwarzschild); on a vu, au paragraphe 6, les premiers termes du développement quand $\frac{v'}{c}$ est petit. La dissymétrie ainsi établie entre v et v' n'est pas confirmée par l'expérience, et il existe, comme on le verra dans la seconde Partie, une infinité de formules analogues, ne contenant que des vitesses relatives et différent par conséquent de celle de Lorentz par les termes en $\frac{1}{c^2}$. A plus forte raison peut-on ajouter des termes contenant $\frac{v}{c}$, du troisième, quatrième ordre, sans que les formules cessent d'être en accord avec toutes les expériences où $\frac{v}{c}$ est petit: *la formule des actions élémentaires de Lorentz pourrait n'être que le commencement d'un développement en série*. On pourra disposer des fonctions arbitraires de v ainsi introduites dans (16) pour satisfaire aux expériences de M. Kaufmann *dans l'hypothèse d'une masse constante*, et de manière à sauvegarder complètement la relativité du mouvement. C'est ce qui sera montré avec plus de détails dans la seconde Partie de ce travail.

En résumé, au lieu d'une masse devenant infinie lorsqu'on approche de la vitesse de la lumière, nous aurions des forces qui s'annulent, parce qu'elles se propagent précisément avec la vitesse de l'électron mobile.

Mais il y a plus : la forme même de la courbe et l'existence d'un point où les déviations y, z seraient nulles et la vitesse égale à c restent douteuses. En effet, posons

$$(17)\qquad y = \frac{e}{m}\frac{\mathrm{E}a}{v^2}, \qquad z = \frac{e}{m}\frac{\mathrm{H}b}{v}\sqrt{1-\left(\frac{v}{2c}\right)^2}, \qquad m = \text{const.},$$

d'où la parabole

$$\frac{z^2}{\mathrm{H}^2 b^2} = \frac{e}{\mathrm{E}am}y - \frac{e^2}{4c^2m^2},$$

tandis que, d'après Lorentz, pour $m =$ const. on aurait la parabole parallèle

$$\frac{z^2}{\mathrm{H}^2 b^2} = \frac{e}{\mathrm{E}am}y.$$

Les valeurs de E, H, a, b étant celles que donne M. Kaufmann, et $\frac{e}{m} = 1,830 \cdot 10^7$, il vient, pour les valeurs *réduites* y', z' de M. Kaufmann (*loc. cit.*, p. 529),

$$y' = 0,0160 + 0,556 z'^2.$$

		y' calc. — y' obs.	
z'.	y' obs.	I.	II.
0,1350	0,0246	+0,0015	+0,0014
0,1919	0,0376	— 11	— 9
0,2400	0,0502	— 22	— 18
0,2890	0,0645	— 20	— 11
0,3359	0,0811	— 20	— 7
0,3832	0,1001	— 25	— 8
0,4305	0,1205	— 15	+ 10
0,4735	0,1405	— 2	+ 30
0,5252	0,1667	+ 25	+ 63

La différence entre les diverses valeurs de y' observées par M. Kaufmann et la courbe qui représente la moyenne de ses expériences est souvent supérieure à 0,0030; les erreurs de la troisième colonne, bien que systématiques, doivent donc être considérées comme admissibles. Celles de la quatrième colonne, qui correspond à l'hypothèse

$$\frac{e}{m} = 1,780 \cdot 10^7,$$

s'expliquent complètement par des erreurs d'expérience, sauf les deux dernières. Mais il faut remarquer qu'une erreur de 1 pour 100 dans la mesure absolue du champ magnétique, qui peut fort bien résulter d'une accumulation des erreurs que comportent les diverses observations nécessaires à cette mesure, serait surtout sensible en ces deux points et changerait leur y' de 2 pour 100, c'est-à-dire de 0,0034. Ces derniers points n'ont été observés que deux fois, et M. Kaufmann fait observer que l'on est porté, aux extrémités de la courbe où l'intensité est faible, à pointer le prolongement, c'est-à-dire la tangente, d'où résulte une valeur trop faible de y'. Ces deux considérations suffiraient à expliquer les erreurs de la quatrième colonne. Or, dans cette courbe (17), le point critique est, non la vitesse de la lumière c, mais la *vitesse relative maximale*

$2c$ de deux rayons lumineux dans un même système rigide, ce qui n'aurait rien de surprenant dans une théorie qui ne considérerait que les vitesses relatives.

La déviation magnétique z' est nulle en ce point, mais non la déviation électrique, qui est égale à peu près à la moitié de la largeur (0,03) de la courbe.

On voit combien est large le champ qui reste aux hypothèses.

Remarquons en terminant que la vitesse v joue simplement le rôle de paramètre, et se détermine pour chaque point de la courbe au moyen des valeurs observées de y et de z ; le résultat est différent selon la théorie adoptée, et l'on peut évidemment représenter d'une infinité de manières une courbe donnée par un paramètre. Il en serait autrement si des expériences directes et précises, telles que celles qu'ont exécutées, au moyen d'oscillations hertziennes, MM. Des Coudres et Wiechert pour les rayons cathodiques, donnaient une détermination directe de v ; mais de telles expériences ne semblent pas réalisables.

Les expériences de M. Kaufmann s'interprètent donc également en modifiant les lois actuelles de l'Électrodynamique de manière à supprimer le mouvement absolu et à rendre la masse électrodynamique constante. On ne pourra plus, dès lors, conclure de ces expériences que la masse des électrons est d'origine électromagnétique ; mais cela restera possible et l'unité des forces physiques gagne à cette hypothèse. Quelle que soit d'ailleurs la théorie adoptée, ces expériences y joueront un rôle très important.

§ 9. — Le mouvement absolu.

En plaçant à la base de l'Électrodynamique et de l'Optique l'hypothèse de l'éther, on introduit nécessairement, au moins pour la propagation de la lumière et des actions électriques, un système de coordonnées indépendant de la matière au sens ordinaire. On devrait donc s'attendre, et l'on s'est, en effet, attendu longtemps, à une influence du mouvement *absolu* ou mouvement par rapport à cet éther supposé. On sait que l'expérience a toujours été négative. La théorie de M. Lorentz rend compte de ce résultat lorsqu'on considère les termes du premier ordre ; mais les expériences

de Michelson et Morley, puis de Trouton et Noble et de Lord Rayleigh, qui auraient dû mettre en évidence des effets du second ordre, ont, contrairement à la théorie, donné également des résultats négatifs. MM. Lorentz et Fitzgerald ont alors admis que tous les corps éprouvent une contraction dans le rapport $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ dans le sens de leur vitesse v ; on rend ainsi compte des effets négatifs observés [1]. Pour expliquer cette contraction, M. Lorentz rappelle que, d'après sa théorie, lorsqu'un système de charges électriques S_1 au repos est en équilibre, ce même système, lorsqu'on le suppose animé d'un mouvement de translation uniforme v, sera encore en équilibre si l'on modifie ses dimensions dans le rapport indiqué. Si donc les actions moléculaires suivent la loi des actions électrostatiques, et si l'on peut faire abstraction du mouvement moléculaire, les molécules d'un corps solide devant nécessairement prendre la position d'équilibre, la contraction admise aura bien lieu.

Il est évident que cette hypothèse bouleverse nos notions sur les solides. L'invariabilité de certains corps lorsqu'on les transporte d'un lieu en un autre, qu'on change leur orientation ou leur vitesse, nous donne la définition expérimentale de la distance et des autres grandeurs géométriques. Les corps dont nous nous servons participant nécessairement au mouvement de la Terre, il existera toujours une infinité de déplacements et de rotations qui changeront leurs dimensions ; et comme précisément nous n'avons aucun moyen de déterminer le mouvement absolu qui seul entre en jeu ici, ces déformations resteront absolument inconnues. Comment définir physiquement la longueur *vraie* d'un corps ? L'affirmation de la *réalité* de cette contraction a-t-elle un sens ? Il résulte des recherches de M. Einstein, sur lesquelles nous reviendrons plus loin, que la réponse est *négative*.

La question de stabilité donne lieu à une seconde objection.

---

(1) M. Planck a montré que, si l'on admet que la densité de l'éther à la surface de la Terre est au moins 50000 fois plus grande que dans les milieux interplanétaires, sans qu'il en résulte un changement appréciable dans ses propriétés, on peut concilier la théorie de l'aberration avec l'hypothèse que l'éther est entraîné dans le mouvement de la Terre (*voir* LORENTZ, *Enzyklop. Math. Wiss.*, t. V, art. 13, p. 104). Ce serait là une propriété bien étrange de l'éther.

Un système de charges électriques soumis *uniquement* aux forces électrostatiques n'est jamais en équilibre stable. Cela est évident lorsque la seule restriction imposée est la conservation de l'électricité : en changeant toutes les dimensions du système dans le rapport de 1 à $1+\varepsilon$, les charges d'éléments de volume correspondants étant égales, on aura exécuté une déformation compatible avec les conditions du système ; l'énergie tombera au $\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{\text{ième}}$ de sa valeur primitive : l'équilibre n'était donc pas stable. La sphère, par exemple, est pour un électron déformable une figure d'équilibre instable, et cela même si l'on suppose avec MM. Bucherer et Langevin que son volume est invariable ([1]) ; *a fortiori*, lorsque, comme dans l'hypothèse de M. Lorentz, cette restriction n'existe pas. Pour obtenir un corps solide, il faut donc ajouter des forces d'un caractère très différent de celui des forces électrostatiques, ou des liaisons autres que l'incompressibilité, ou enfin des mouvements tourbillonnaires, donnant un équilibre dynamique. Mais dans tous ces cas *l'explication de M. Lorentz ne s'applique plus, en sorte que cette explication ne me semble pas acceptable.*

M. Poincaré a enfin objecté à cette hypothèse d'être incomplète ; de nouvelles expériences pourraient mettre en évidence de nouveaux termes, et il faudrait des hypothèses nouvelles si, comme on doit s'y attendre, le résultat est négatif. La question de l'*élimination complète* du mouvement absolu était ainsi posée, et elle a été traitée par MM. Lorentz ([2]), Poincaré ([3]) et Einstein ([4]).

Il n'est alors plus permis de considérer comme échappant à l'expérience la différence entre le « temps local » et le « temps vrai », ce qui était un point essentiel lorsqu'on se contentait d'expliquer les effets négatifs *observés jusqu'ici* et quelques autres analogues. Pour nous en rendre compte, considérons deux points A, B qui se meuvent avec une vitesse absolue constante v dans la direction AB. Une onde lumineuse, partie à l'instant t de A, arri-

---

([1]) C'est ce qu'a fait observer M. Ehrenfest (*Physik. Zeitschr.*, t. VII, 1906, p. 302) : pour la gravitation, l'équilibre serait stable; mais, en changeant les attractions en répulsions, l'énergie change de signe, l'équilibre devient instable.

([2]) *Amsterdam Proceedings*, 1903-1904, p. 809.

([3]) *Comptes rendus*, t. CXL, 1905, p. 1504.

([4]) *Ann. der Physik.*, t. XVII, 1905, p. 891.

vera en B à l'instant t' ; elle aura à parcourir l'espace $AB + (t - t')v$ avec la vitesse c ; on a donc

$$t' - t = \frac{AB + (t' - t)v}{c} \quad \text{ou} \quad t' - t = \frac{AB}{c - v}.$$

La durée de transmission dépendra de v, et ses changements comportent un terme du premier ordre $- AB\frac{v}{c}$, la correction étant précisément (aux termes d'ordre supérieur près) celle qu'il faut appliquer au *temps vrai* pour obtenir le *temps local*. M. Lorentz [1] a montré que, pour les phénomènes terrestres, cette correction est sans influence aucune. En particulier, pour déterminer directement la vitesse de la lumière, on est obligé de lui faire parcourir un chemin fermé qui la ramène au point de départ; les termes du premier ordre s'éliminent alors. Ainsi, dans l'exemple considéré, si l'onde émise par A est réfléchie en B, elle arrivera en A après un temps

$$t' - t = AB\left(\frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v}\right) = \frac{AB}{c}\left(1 + \frac{2v^2}{c^2} + \dots\right).$$

Mais il en sera autrement pour les phénomènes astronomiques : dans la détermination de la vitesse de la lumière par des occultations de satellites on n'utilise pas un chemin fermé; dès lors, la perturbation qu'apporterait dans le retard observé l'hypothèse d'une translation d'ensemble du système solaire par rapport à l'éther serait du premier ordre et d'une grandeur observable.

En effet, le retard d'une occultation peut atteindre $\frac{d}{c}$ (où d est le diamètre de l'orbite terrestre), c'est-à-dire environ 1 000 secondes. Une vitesse absolue du système solaire (vitesse qui n'a rien de commun avec son mouvement par rapport aux étoiles fixes les plus rapprochées) égale à 30^{km} par seconde dans le plan de l'écliptique amènerait une correction de $1000 \frac{30}{3.10^5} = 0,1$ seconde pour le retard maximum observé, correction qui changerait de signe suivant la position relative de la Terre et du satellite par rapport à la direction de translation; les différences systématiques pour un

[1] *Versuche einer Theorie*, etc., p. 82 et suivantes.

long système d'observations atteindraient donc 0,2 seconde, quantité qui est de l'ordre de celles qu'on observe en Astronomie [1].

Si donc on ne veut pas admettre que la vitesse de la lumière dépend de celle des corps qui l'émettent et est purement relative, comme toutes les vitesses (et l'image *éther* empêche seule de tirer du principe de relativité cette conséquence si naturelle), *il faudra modifier la définition du temps.*

M. Lorentz a énoncé les hypothèses qui permettraient de donner aux équations d'un système entraîné, ainsi que les axes de coordonnées, dans un mouvement uniforme v de translation parallèle à l'axe des x, la même forme que dans le cas du repos. Il admet que toutes les masses sont fonctions de la vitesse, abandonnant ainsi le principe de la conservation de la masse [2]. Il faut aussi, comme nous l'avons exposé, supprimer la notion de corps solide et introduire une définition nouvelle du temps; ce sera la variable

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{vx}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

qui jouera le rôle du temps dans les équations.

Le temps ainsi défini ne satisfait presque à aucun des axiomes imposés à la notion de temps dans le sens ordinaire. Deux événements simultanés pour un observateur A, mais ayant lieu en des points différents, ne sont plus simultanés pour un second observateur B en mouvement par rapport au premier : *la simultanéité devient une notion relative.*

Deux temps égaux pour l'observateur A *ne le seront pas pour* B.

---

(1) En supposant les lois de la gravitation modifiées par le mouvement comme les lois de l'Électrodynamique, les corrections ne seraient que du second ordre et ne pourraient annuler ce terme du premier ordre.

(2) Le mot *masse* n'a, dans les théories de MM. Lorentz, Poincaré et Einstein, plus de signification précise : le nombre qui la représente dépend du mouvement du système de coordonnées, mouvement qui reste absolument arbitraire. Mais la force dépend aussi de ce mouvement, et ce ne sont pas les deux membres de l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \ldots,$$

mais bien leur rapport seul qui reste invariable quand on change ce mouvement.

La règle du parallélogramme des vitesses n'est qu'approchée : ainsi, v et v' étant les vitesses de deux corps qui se meuvent en sens inverses, par rapport à un premier système de coordonnées, la vitesse relative du premier par rapport au second, c'est-à-dire celle qu'observerait un observateur entraîné dans le mouvement du second, n'est pas $v - v'$, mais

$$\frac{v - v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}};$$

elle restera constamment inférieure à la vitesse de la lumière. Pour deux rayons β émis en sens inverses par un grain de radium, chacun avec une vitesse de 250000^{km} par seconde, la vitesse relative sera non 500000^{km}, mais 294000^{km} par seconde.

Les mots « vitesse », « temps », etc. ont donc acquis une signification bien différente de celle qu'ils ont habituellement, et n'ont plus qu'un sens tout relatif.

L'éther, dans cette Cinématique nouvelle, ne jouera plus aucun rôle, puisqu'il ne nous fournit même plus de système de coordonnées absolues. Mais cette conception nous aura obligés à remplacer les axiomes simples de la conservation de la masse, de l'invariabilité des solides, du parallélogramme des vitesses, etc., axiomes qu'il ne faudrait, semble-t-il, abandonner qu'en dernier lieu, par des relations compliquées qui présentent à l'imagination des difficultés très considérables (analogues à celles qu'offrent, par exemple, des espaces courbes à trois dimensions), et que nous ne pouvons traiter *rigoureusement*, en général, que par des considérations analytiques. Il faut ajouter que cette théorie n'a été présentée par M. Lorentz que sous toutes réserves.

M. Einstein (*loc. cit.*) a présenté les mêmes résultats sous une forme différente. Il admet *a priori*, pour la vitesse de la lumière, une loi qui *comporte naturellement une large part d'arbitraire;* la comparaison avec celle que nous adopterons dans la seconde Partie de ce Mémoire le montrera suffisamment. Elle conduit, avec le principe de relativité, à une définition de la *simultanéité* de deux événements en des points différents, dont il fait une notion relative, et plus généralement de la Cinématique nouvelle dont il vient d'être question. La simultanéité entrant dans la

définition de la longueur d'un corps mobile par rapport aux repères fixes d'un mètre étalon (puisqu'il s'agira de pointer *simultanément* les deux extrémités du corps, sinon celui-ci se déplacerait dans l'intervalle), ce corps *semblera* d'une longueur différente à un observateur au repos, selon sa vitesse plus ou moins grande (bien que sa longueur *vraie* soit restée invariable). On évite ainsi les contractions admises par M. Lorentz, ou plutôt, on voit que leur *réalité* n'est qu'une question de définition.

M. Einstein vérifie que les équations de Lorentz sont ainsi rendues indépendantes du mouvement absolu, et que la loi admise par lui pour la propagation de la lumière est bien en harmonie avec les équations. Celles-ci, dans la mesure où elles énoncent cette loi de propagation, deviennent ainsi superflues ; de plus, le raisonnement ne démontre nullement, comme l'ont cru quelques auteurs, que ces transformations soient le seul *groupe* qui laisse invariantes les équations de Lorentz : ce problème relève plutôt des méthodes de M. Poincaré (*loc. cit.*).

M. Bucherer [1] a été amené, par des considérations sur la relativité des mouvements, à abandonner la notion d'éther : « Les équations de Lorentz devront toujours être appliquées en supposant le système de coordonnées au repos par rapport au point P dont on étudie le mouvement. » M. Bucherer ne considère que le cas de mouvements uniformes ; l'action d'un électron animé d'une vitesse relative $u = v' - v$ par rapport à P sera, d'après la formule (13) (où l'on pose $v' = u$, $v = 0$), donnée par la formule

$$F_x = \frac{ee' \cos \rho x}{\rho^2}\left(1 + \frac{u^2 - 3u_\rho^2}{2c^2}\right), \qquad F_y = \ldots.$$

Pour deux courants fermés, on vérifie facilement (*voir* seconde Partie) que les termes proportionnels à ee' seuls jouent un rôle, à l'exclusion des accélérations que nous n'avons pas prises en considération, et des termes en v^2, v'^2 : c'est d'ailleurs ce qui doit arriver si l'intensité de la force est proportionnelle au produit des intensités des courants. L'action de deux éléments de courant l'un sur l'autre sera dès lors

$$\frac{ii'\,ds\,ds'}{\rho^2}\cos(\rho, x)[-\cos(ds, ds') + 3\cos(\rho, ds)\cos(\rho, ds')].$$

---

(1) *Physik. Zeitschr.*, t. VII, 1906, p. 553.

Les hypothèses d'Ampère sont vérifiées : l'action est parallèle à la ligne de jonction ρ des éléments ; mais la parenthèse devrait être

$$-2\cos(ds, ds') + 3\cos(\rho, ds)\cos(\rho, ds').$$

L'hypothèse de M. Bucherer est donc inconciliable avec les lois des courants fermés.

Cela tient à ce que la notion de champ cesse d'y être applicable.

Nous sommes donc ramenés aux hypothèses si compliquées qui ont été exposées. Remarquons, en terminant, que ces complications interviennent non seulement aux grandes vitesses, mais aussi dans l'expérience de Fizeau sur l'entraînement des ondes, par exemple. En effet, d'après le principe de relativité, un observateur entraîné dans le mouvement de translation d'un corps transparent trouvera, pour la vitesse de propagation des ondes dans ce milieu, la même valeur que s'il était au repos (la période étant supposée la même, ou la dispersion négligeable). On en conclurait, dans la Cinématique ordinaire, que les ondes sont totalement entraînées par la matière. Il n'en est rien, le terme *vitesse* a un sens nouveau, et, en réalité, la démonstration de Lorentz continue à s'appliquer ; on retrouve le coefficient de Fresnel.

§ 10. — Résumé et conclusions.

On sait que l'éther n'a été, d'abord, qu'un des nombreux fluides de la Physique ; mais, les expériences nouvelles ayant montré à Fresnel que les ondes lumineuses étaient transversales, il fallut en faire un corps analogue aux solides élastiques. Mais alors, comment les autres corps peuvent-ils se mouvoir à travers lui sans éprouver aucune résistance appréciable ? La question était d'autant plus difficile que le problème de l'aberration obligeait à admettre que l'éther ne participe pas au mouvement de translation de la Terre, en sorte que tous les corps sont constamment traversés par un courant d'éther de 30^{km} à la seconde, dont l'effet est nul, malgré la rigidité de l'éther. Il faut ajouter que l'élasticité de ce corps est bien singulière, puisque sa résistance à la compression serait nulle, ce qui ne saurait arriver pour un solide fini. On peut, il est vrai, recourir à l'élasticité rotationnelle de Lord Kelvin, en ayant

soin de ne pas tenir compte de la perturbation qu'apporterait dans ce mécanisme ingénieux le passage brutal d'un corps animé d'une vitesse de 30^{km} par seconde.

Les difficultés ont augmenté lorsque, l'identité de la lumière et des oscillations électriques étant démontrée, il fallut étendre ce système d'explications à l'Électromagnétisme tout entier ; M. Poincaré [1] a exposé quelques-unes des étrangetés auxquelles on est ainsi conduit. D'ailleurs l'expérience se refusait à accorder à l'éther cette propriété primordiale des corps : le mouvement. Les expériences de Fizeau (interprétées par Lorentz), de Lodge et d'autres concordaient dans leurs résultats négatifs : l'éther n'est entraîné ni par le mouvement de la matière, ni par celui des corps électrisés ou magnétisés, ni par les courants, etc. L'hypothèse même de tels mouvements ne permit pas d'obtenir une explication mécanique de l'Électrodynamique. On se résigna à admettre le repos absolu de l'éther ; l'hypothèse d'une compénétration complète permit d'éviter la difficulté relative au mouvement des corps à travers l'éther. Celui-ci est devenu ce que M. Drude appelle un « espace physique » ; il est le siège de l'énergie électrique et magnétique, et des polarisations ; il fournit un système de coordonnées indépendant de toute matière, et auquel doivent être rapportées les équations de Maxwell et Lorentz.

C'est déjà beaucoup d'abstraction. Cela n'en est pas encore assez. En effet, d'après ces vues, l'éther pourrait encore être le siège de phénomènes indépendants de la matière, et ainsi manifester son existence. Il n'en est rien ; et, pour l'expliquer, il fallut une nouvelle hypothèse, écartant toute onde qui ne divergerait pas d'un élément de volume matériel. Le rôle de l'éther est encore réduit. On a vu que, dès lors, on peut laisser complètement de côté la notion de champ et la considération de ce qui se passe dans l'éther, et s'en tenir aux actions élémentaires des charges les unes sur les autres (exactement comme dans les anciennes théories de Gauss, Weber, Riemann et Clausius, mais avec un temps de transmission fini). On exprime ainsi les mêmes faits, mais en y comprenant l'hypothèse sur la divergence des ondes et l'irréversibilité

---

[1] *Électricité et Optique*, 2e édition : *A propos de la théorie de Larmor*, p. 577 et suivantes.

qui en est la conséquence, et que les équations aux dérivées partielles sont impuissantes à exprimer. L'éther est devenu un système de coordonnées absolues, une abstraction mathématique ; les équations aux dérivées partielles, une construction mentale intermédiaire qui, toutefois, ne se suffit pas à elle-même.

Enfin, ce fantôme d'éther lui-même n'a pas supporté le contrôle de l'expérience. Il semble bien acquis qu'on ne peut mettre en évidence le mouvement absolu. On a vu à quelles hypothèses, bouleversant tous les principes de la Physique, il faut avoir recours pour rendre compte de ce résultat. La seule conclusion qui, dès lors, me semble possible, c'est que *l'éther n'existe pas*, *ou plus exactement*, *qu'il faut renoncer à se servir de cette image ; que le mouvement de la lumière est un mouvement relatif comme tous les autres*, *que les vitesses relatives seules jouent un rôle dans les lois de la nature ; enfin*, *qu'il faut renoncer aux équations aux dérivées partielles et à la notion de champ*, *dans la mesure où cette notion introduit le mouvement absolu.*

Comme je l'ai dit dans l'Introduction, cette conclusion, trop purement négative, a besoin de deux compléments : une image simple pour le nouveau mode de mouvement de la lumière ; la démonstration qu'une théorie satisfaisant à ces principes est possible.

L'habitude que nous avons de « substantialiser », si j'ose m'exprimer ainsi, habitude à laquelle on doit les anciens fluides calorique, magnétique, etc., et le nouveau fluide énergie, rend, en effet, indispensable l'introduction d'une image qui nous rende compte de ce que sont devenues la lumière et les forces électriques lorsque, ayant quitté un corps, elles n'agissent pas encore sur un autre. Une théorie qui n'admettrait pas une telle image serait considérée par beaucoup comme introduisant des actions à distance simplement retardées. De plus, comme l'a fait remarquer M. Poincaré (*Science et Hypothèse*, p. 199), et c'est une des raisons qu'on peut invoquer en faveur de l'existence de l'éther, la Mécanique veut que l'état d'un système ne dépende que des états immédiatement antérieurs ; il n'en serait plus ainsi si l'on supprimait tout intermédiaire. A vrai dire, on ne sauve ainsi qu'une convention, qui n'a peut-être pas une utilité extrême. On a vu qu'on ne peut pas se donner arbitrairement l'état initial de l'éther, qui doit satis-

faire aux formules des potentiels retardés : c'est-à-dire que la considération du système pendant un temps fini n'est pas évitée effectivement. D'autre part, la pression qu'exerce la lumière sur un miroir, même dans le vide, par exemple, au contraire à l'égalité de l'action et de la réaction appliquée à la matière seule. Il faudra donc « substantialiser » l'énergie rayonnante pour sauver ce principe et celui de la conservation de l'énergie lorsqu'il s'agit d'un corps dont le rayonnement ne rencontre pas d'obstacle matériel dans certaines directions, et dont l'énergie ne peut, par conséquent, jamais et par aucun moyen être récupérée en entier. Ces principes seront alors, en partie du moins, devenus des conventions, mais pour le plus grand avantage de l'économie de notre pensée.

DEUXIÈME PARTIE.

§ 1. — Considérations générales. Propagation des forces.

Dans cette deuxième Partie, je me propose d'étudier la formule des actions élémentaires, à laquelle, comme on l'a vu, se réduit en dernière analyse la théorie mathématique de Lorentz, et de montrer qu'on en peut éliminer le mouvement absolu et qu'on peut la généraliser considérablement sans cesser d'être en accord avec l'expérience. J'adopterai sans changement les hypothèses physiques de M. Lorentz : nature de l'électricité, du courant de conduction, des diélectriques, etc., et spécialement le principe de superposition, qui énonce l'indépendance complète des effets des diverses charges qui composent un système [1].

Pour cela, je serai obligé de proposer pour la propagation des actions électrodynamiques une image nouvelle ; mais, ainsi qu'il a été dit dans l'Introduction, je n'en tirerai pas toutes les conséquences, ne me proposant ici qu'une œuvre de critique.

Une première conséquence du principe de relativité est immédiate. Dans la théorie de l'éther, un point matériel P au repos par

---

[1] A cause des mouvements de l'éther pur, ce principe n'est pas rigoureusement vrai dans la théorie de Hertz, et il y a certainement des réserves à faire à son sujet.

rapport à ce milieu pourra émettre des ondes d'une vitesse radiale constante et qui formeront à chaque instant un système de sphères ayant P pour centre. Si P est animé d'un mouvement de translation, les sphères, au contraire, deviendront excentriques, chacune gardant son centre au point P_1 de l'éther qui coïncidait avec P à l'instant de l'émission. D'après le principe de la relativité, au contraire, si le mouvement de translation est uniforme, les sphères devront rester concentriques, comme au repos, et le centre sera toujours P. Lorsque le mouvement ne sera plus uniforme, le principe ne suffira plus à déterminer le mouvement des ondes.

Deux manières de se représenter les phénomènes, deux images distinctes, ont successivement régné en Optique : celle de l'émission (la lumière *se meut*) et celle de l'éther (la lumière *se propage*) [1]. La seconde introduit le mouvement absolu, tandis que la première conduit pour le mouvement de la lumière dans le vide exactement à la loi qu'exige le principe de relativité : les particules lumineuses expulsées en tous sens à l'instant *t se meuvent avec une vitesse radiale constante et remplissent constamment une sphère dont le centre est animé du mouvement de translation* w *qu'avait* P *à l'instant de l'émission ; si* w *est constant*, *ce centre continuera donc de coïncider avec* P.

C'est cette image fondamentale seule que nous emprunterons à la théorie de l'émission. Inutile d'ajouter que ces particules doivent être considérées uniquement comme une fiction, d'ailleurs commode, et qui a l'avantage de nous conduire, comme on vient de le voir, à énoncer pour la vitesse de la lumière dans le vide une loi précise même lorsque la vitesse de P est variable et que le principe de relativité ne suffit plus. La vitesse de la lumière dépend donc de celle que possède le corps qui l'émet au moment de l'émission : à partir de cet instant, la vitesse des particules reste invariable, quel

[1] Selon les *signes sensibles* par lesquels on définit l'identité d'une particule d'un corps continu avec elle-même pendant le mouvement, celui-ci sera dit « mouvement réel » ou « mouvement de propagation ». Ces signes sensibles faisant défaut pour la lumière, on ne voit aucune différence *réelle* de sens entre ces énoncés : « La lumière est projetée » et « la lumière se propage ». Il n'y a qu'une différence de langage, ou, ce qui revient au même, une différence dans l'image sensible que nous évoquons pour nous rendre compte de nos sensations. Les conséquences que nous tirons de ces images sont seules différentes, et c'est leur simplicité qui déterminera le choix.

que soit le mouvement ultérieur de P, *même lorsque les particules traversent des corps pondérables ou des charges électriques*. J'ai dit dans l'Introduction que cette hypothèse n'est que provisoire ; elle est exigée par le principe de superposition, et contraire à celui de l'action et de la réaction ; mais l'avantage de serrer d'aussi près que possible les hypothèses correspondantes de M. Lorentz doit la faire préférer pour le but que je me propose ici.

Nous admettrons de plus que l'action de P sur un corps P′ ne dépendra que de la vitesse, de la disposition, etc., des particules émises par P et ayant atteint P′ à l'instant considéré.

On pourrait chercher à rendre compte des phénomènes au moyen d'actions mécaniques exercées par ces particules, mais les difficultés auxquelles on est conduit ainsi m'ont paru insurmontables. Au lieu de chercher, par des « masses invisibles », des « liaisons », etc., à conserver le schéma de la Mécanique classique, j'ai préféré réduire dans la mesure du possible les hypothèses à faire, méthode dont les avantages, au point de vue de la logique et de la clarté, compensent certainement ceux que présentent les « analogies mécaniques » de Maxwell. On verra d'ailleurs que la masse mécanique peut se déduire, comme dans la théorie de M. Lorentz, d'actions purement électriques, et que, d'autre part, la théorie est applicable à la gravitation, et, peut-être, aux actions moléculaires : elle engloberait donc la mécanique classique, et ferait découler l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'une même source. Dans ces conditions, il est plus satisfaisant, au point de vue logique, de ne faire usage dans les hypothèses fondamentales que de considérations cinématiques ne comportant que les notions de temps, d'espace et de charge électrique.

J'admettrai donc que tout point électrisé émet à chaque instant et dans toutes les directions des particules fictives infiniment petites, animées d'une même vitesse radiale c à l'origine, et conservant leur mouvement uniforme quels que soient les corps qu'elles rencontrent [1] ; l'ensemble des particules émises à l'instant t' par un

---

[1] La théorie moderne de la dispersion et la théorie de Lorentz font cette même hypothèse ; le changement de vitesse de la lumière dans les divers milieux apparaît alors comme le résultat d'interférences et de phénomènes de résonance complexes.

point mobile P' de coordonnées x', y', z', fonctions de t', formera à chaque instant *postérieur* t une sphère de rayon

$$r = c(t - t'). \tag{I}$$

Le centre de cette sphère, qui continue à se mouvoir avec la vitesse $v' = v'(t')$ qu'avait P' à l'instant t', a pour coordonnées

$$x'(t') + (t - t')v'_x(t'), \quad y' + (t - t')v'_y, \quad z' + (t - t')v'_z.$$

L'équation de la sphère sera donc

$$\begin{aligned} r^2 = {} & [x - x' - (t - t')v'_x]^2 \\ & + [y - y' - (t - t')v'_y]^2 + [z - z' - (t - t')v'_z]^2. \end{aligned} \tag{II'}$$

Si x', y', z' sont des fonctions connues de t', on déduira de ces deux équations l'instant d'émission t' d'une onde qui atteint un point P donné, de coordonnées x, y, z, à l'instant t, ou, ce qui, d'après (I), revient au même, le rayon r de la sphère qu'elle forme à cet instant et qui est donné par

$$\begin{aligned} r^2 = {} & \left[x - x'\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{r}{c} v'_x\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 \\ & + \left[y - y'\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{r}{c} v'_y\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 \\ & + \left[z - z'\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{r}{c} v'_z\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2. \end{aligned} \tag{II}$$

Dans la théorie de Lorentz, et en choisissant un système de coordonnées immobile par rapport à l'éther, on aurait, au contraire, les équations suivantes :

$$\begin{aligned} c^2(t - t')^2 = \mathrm{R}^2 = {} & \left[x - x'\left(t - \frac{\mathrm{R}}{c}\right)\right]^2 \\ & + \left[y - y'\left(t - \frac{\mathrm{R}}{c}\right)\right]^2 \\ & + \left[z - z'\left(t - \frac{\mathrm{R}}{c}\right)\right]^2. \end{aligned} \tag{III}$$

L'hypothèse nouvelle introduit une symétrie complète *lorsque les deux points* P, P' *sont animés chacun d'une vitesse uniforme : r sera, dans ce cas, la distance réelle des deux points à l'instant t ;* deux ondes émises simultanément par P' et P arrive-

ront simultanément en P et P'. Il n'en est pas ainsi dans la théorie de Lorentz, et la conséquence en sera que, dans le cas d'un mouvement sensiblement uniforme, où le rayonnement est, par conséquent, nul, notre théorie conduira à l'égalité de l'action et de la réaction, ce qui n'est pas le cas dans la théorie de Lorentz. Ce n'est que lorsqu'il n'y a plus cette identité des instants d'émission que ce principe devra être modifié, ce qui, d'ailleurs, se conçoit aisément.

Remarquons encore que, si P' est animé d'un mouvement oscillatoire et si la distance PP' est suffisamment grande, il se pourra que des ondes parties en des instants t'_1, t'_2, ..., où la vitesse P' avait des valeurs différentes v'_1, v'_2, ..., arrivent simultanément en P par suite de la différence de leurs vitesses de propagation ; pratiquement, ce cas ne se présentera qu'en Optique. Dans la théorie de Lorentz, il faut que P' prenne à certains instants une vitesse supérieure à celle de la lumière pour qu'un phénomène analogue se produise.

Soient $w_x = \frac{dv_x(t)}{dt}$, w_y, w_z, $w'_x = \frac{dv'_x(t')}{dt'}$, w'_y, w'_z les accélérations des points xyz, $x'y'z'$; soient de plus

$$(1) \qquad u_x = v_x(t) - v'_x(t'), \qquad u_y = v_y - v'_y, \qquad u_z = v_z - v'_z$$

les composantes de la vitesse relative du point $P(x, y, z)$ et du centre C de la sphère émise par P' et atteignant P en t : si le mouvement de P' est uniforme, ce sera simplement la vitesse relative de P et P'.

Le vecteur r, dont les composantes sont

$$(2) \qquad \begin{aligned} r_x &= x - x'\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{r}{c} v'_x\left(t - \frac{r}{c}\right), \\ r_y &= y - y' - \frac{r}{c} v'_y, \\ r_z &= \ldots, \end{aligned}$$

est, on l'a vu, la droite qui joint à P le point P'_1 où se trouverait P' si sa vitesse était restée constante en grandeur et en direction depuis l'instant d'émission

$$t' = t - \frac{r}{c};$$

ce vecteur est dirigé de P'_1 vers P, et l'on a

$$r_x = r\cos(r, x), \qquad \ldots$$

La vitesse relative U des particules émises par P', par rapport à P, a pour composantes

$$U_x = c\cos(rx) + v'_x - v_x, \qquad U_y = c\cos(ry) + v'_y - v_y, \qquad U_z = \ldots;$$

son carré est

$$U^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 = c^2 - 2cu_r + u^2;$$

sa projection sur r est

$$(3) \quad \begin{cases} U_r = \cos(rx)\,U_x + \cos(ry)\,U_y + \cos(rz)\,U_z = c - u_r, \\ u_r = \dfrac{u_x r_x + u_y r_y + u_z r_z}{r}. \end{cases}$$

La position et le mouvement *relatifs* de la sphère et du point P sont d'ailleurs déterminés lorsqu'on se donne r, u_r et u^2 ou, ce qui revient au même, r, U_r et U^2 ; il n'existe pas de combinaison des vecteurs r, u, indépendante de la position absolue dans l'espace, qui ne s'exprime par ces trois quantités.

On peut remarquer que, pour un observateur placé en P et participant au mouvement de ce point, le rapport de la distance normale de deux positions successives de la sphère, divisé par le temps dt, c'est-à-dire ce qui correspond à la vitesse de propagation de l'onde pour cet observateur, est précisément U_r.

Enfin, si l'on admet que le nombre de particules émises par un centre chargé dans le temps dt' est proportionnel à sa charge e' et à dt', le nombre de particules situées dans un élément de surface dS de la sphère sera indépendant de la position de cet élément et proportionnel à $\frac{e'\,dS}{r^2}$. Si deux sphères émises en t' et $t' + dt'$ se trouvent à la distance normale dn au point xyz et à l'instant t, on aura

$$\begin{aligned} dt' &= \left[\frac{\partial t'}{\partial x}\cos(rx) + \frac{\partial t'}{\partial y}\cos(ry) + \frac{\partial t'}{\partial z}\cos(rz)\right] dn \\ &= \left(\frac{\partial t'}{\partial n}\right)_{t=\text{const.}} dn. \end{aligned}$$

Le nombre de particules comprises dans l'élément de volume $dS\,dn$ est donc proportionnel à $\frac{e'}{r^2}\frac{\partial t'}{\partial n}dn\,dS$, et la densité D est $-ea\frac{e'}{r^2}\frac{\partial t'}{\partial n}$, en désignant par $-ea$ le facteur universel de proportionnalité. Comme $r = c(t - t')$, on a donc enfin

$$D = \frac{ae'}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{ae'}{r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\cos(r, x) + \frac{\partial r}{\partial y}\cos(r, y) + \frac{\partial r}{\partial z}\cos(r, z)\right].$$

L'équation (II) définit r en fonction implicite des variables x, y, z, t, quand le mouvement de P' est donné. On a, en la différentiant,

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = r_x + \frac{r}{c^2}(w'_x r_x + w'_y r_y + w'_z r_z)\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$= r\cos(r, x) - \frac{r^2}{c^2}w'_r\frac{\partial r}{\partial x},$$

d'où

$$(4)\qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos(r, x)}{1 - \frac{rw'_r}{c^2}}, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \ldots,$$

en sorte qu'il vient

$$(5)\qquad \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{1 - \frac{rw'_r}{c^2}}, \qquad D = \frac{ae'}{r^2\left(1 - \frac{rw'_r}{c^2}\right)}$$

et, de même, à des termes d'ordre supérieur près,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{r}{D} = \cos(r, x) - rw'_x.$$

Les dérivées de r, D par rapport à x, y, z introduisent donc les accélérations.

Considérant x, y, z comme fonctions de t, il faut noter encore la formule

$$(6)\qquad \frac{dt'}{dt} = \frac{\frac{1 - u_r}{c}}{\frac{1 - rw'_r}{c^2}} = 1 - \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}.$$

§ 2. — La force élémentaire.

On a vu que la théorie de Lorentz s'exprime, en dernière analyse, par l'énoncé d'une loi élémentaire d'action entre deux éléments de volume chargés. Un corpuscule mobile $P'(x', y', z')$, portant la charge e', exerce sur un autre P de charge e placé en x, y, z une force qui dépend de la vitesse v de ce dernier, de la direction $\cos(R, x) = \frac{x - x'\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}, \ldots$ et du rayon R de l'onde émise par P′ à l'instant $t' = t - \frac{R}{c}$, et atteignant P à l'instant t ; enfin, de la vitesse v' et de l'accélération w' de P′ en t'. On a, le système de coordonnées étant au repos par rapport à l'éther,

$$\text{(III)} \qquad R^2 = \left[x - x'\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]^2 + \left[y - y'\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]^2 + \left[z - z'\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]^2,$$

équation qui définit R en fonction implicite de x, y, z, t lorsque les fonctions $x' = x'(t')$, y', z' sont données. On en conclut

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\cos R_x}{1 - \frac{v_R'}{c}}, \\ &\frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial R}{\partial x}\cos(R, x) + \frac{\partial R}{\partial y}\cos(R, y) \\ &\qquad\qquad + \frac{\partial R}{\partial z}\cos(R, z) = \frac{1}{1 - \frac{v_R'}{c}}, \end{aligned} \right.$$

équations analogues à (4) et (5).

La force élémentaire, dont l'expression a été donnée par M. Schwarzschild [1] pour le cas de deux électrons de diamètre négligeable par rapport à leur distance, possède une composante parallèle à R, une autre parallèle à v', et une troisième à w', et

---

[1] *Göttinger Nachrichten*, 1903, p. 132 et suivantes. La formule comporte certaines restrictions qui sont sans importance ici.

l'on a

$$
(\mathrm{IV})\quad
\begin{cases}
F_x = \dfrac{ee'}{R^2}\dfrac{\partial R}{\partial n}\left[A\cos(R, x) + B\dfrac{v'_x}{c} + C\dfrac{R\,w'_x}{c^2}\right],\\[2ex]
F_y = \dfrac{ee'}{R^2}\dfrac{\partial R}{\partial n}\left[A\cos(R, y) + B\dfrac{v'_y}{c} + C\dfrac{R\,w'_y}{c^2}\right],\\[2ex]
F_z = \dots.\\[1ex]
A = \left(1 - \dfrac{v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{v'^2}{c^2} - \dfrac{R\,w'_R}{c^2}\right)\\[2ex]
\qquad \times \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{v'_R}{c}\right)^2} - \dfrac{R(v_x w'_x + v_y w'_y + v_z w'_z)}{c^3\left(1 - \dfrac{v'_R}{c}\right)},\\[3ex]
B = \dfrac{\left(1 - \dfrac{v'^2}{c^2} - \dfrac{R\,w'_R}{c^2}\right)\left(\dfrac{v_R}{c} - 1\right)}{\left(1 - \dfrac{v'_R}{c}\right)^2},\\[3ex]
C = -\dfrac{\left(1 - \dfrac{v_R}{c}\right)}{\left(1 - \dfrac{v'_R}{c}\right)}.
\end{cases}
$$

Les équations du mouvement sont

$$
(\mathrm{V}^a)\qquad m_i w_{xi} = \sum F_{ix},\qquad m_i w_{yi} = \sum F_{iy},\qquad m_i w_{zi} = \sum F_{iz},
$$

la somme étant étendue à tous les électrons, et plus généralement d'après le principe de d'Alembert,

$$
(\mathrm{V}^a)\qquad \sum\left(m_i w_{xi} - \sum F_{ix}\right)\delta x_i + \sum\left(m_i w_{yi} - \sum F_{iy}\right)\delta y_i
+ \sum\left(m_i w_{zi} - \sum F_{iz}\right)\delta z_i = 0.
$$

Nous nous proposons, en conservant les équations (V^a) et (V), de modifier l'expression de F de manière à en éliminer le mouvement absolu. Celui-ci y entre explicitement par les vitesses absolues v, v' et implicitement par la loi de propagation.

Dans les vues générales exposées plus haut, le principe de l'impossibilité de l'action à distance s'exprimera par la condition que F ne dépende que de la disposition et de la vitesse des particules autour de e, c'est-à-dire des vecteurs U, r et de D, ainsi que des dérivées premières de r, D par rapport à x, y, z. Ces dérivées introduisent, comme il a été dit, l'accélération w'. D'autre part, il

est naturel de considérer F comme proportionnelle à la densité D des particules près de e et à la charge e; on pourra donc, exactement comme dans la formule de Lorentz, décomposer F suivant les directions r, U, ϖ' et écrire

$$F_x = e\,D[A_1 \cos(r, x) + B_1 U_x + C_1 \varpi'_x],$$
$$F_y = e\,D[A_1 \cos(r, y) + B_1 U_y + C_1 \varpi'_y],$$
$$F_z = \ldots.$$

Les quantités A_1, B_1, C_1, qui sont indépendantes du système de coordonnées, ne dépendent, par hypothèse, que de r, U^2, U_r. Comme, d'ailleurs, $U_x = c \cos rx - u_x$ et que U^2, U_r s'expriment linéairement par u^2, u_r, on pourra également écrire

$$F_x = e\,D\left[A_2 \cos(r, x) + B_2 \frac{u_r u_x}{c^2} + C_2 \frac{r\varpi'_x}{c^2}\right], \qquad F_y = \ldots,$$

où A_2, B_2, C_2 sont fonctions de u^2, u_r; nous les supposerons indépendantes de r. De plus, ces expressions devant contenir les vitesses c, u sous une forme homogène, on pourra, pour les vitesses relatives petites par rapport à celle de la lumière, écrire (n, m, p étant des exposants convenablement choisis)

$$A_2(c, u_r, u^2) = c^n A_2\left(1, \frac{u_r}{c}, \frac{u^2}{c^2}\right)$$
$$= c^n\left(A'_0 + A'_1 \frac{u_r}{c} + A'_2 \frac{u_r^2}{c^2} + A'_3 \frac{u^2}{c^2} + \ldots\right),$$
$$B_2 = c^m (B'_0 + \ldots),$$
$$C_2 = c^p (C'_0 + \ldots).$$

Bien que cette hypothèse ne soit pas indispensable, nous supposerons que, si l'on change le signe des vitesses, A_2, B_2, C_2 ne changent pas, c'est-à-dire qu'elles sont fonctions *paires* de $\frac{u_r}{c}$; les développements ne contiennent pas de puissances impaires de $\frac{u_r}{c}$.

Remplaçant D par sa valeur (5), et disposant de quelques-uns des coefficients A'_i, B'_i, C'_i, nous pourrons enfin écrire F_x sous la

forme

$$
\text{(VI)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
F_x &= \frac{ee'}{r^2\left(1-\frac{r w_r}{c^2}\right)}\left[\cos(r, x)\,\varphi\left(\frac{u_r}{c}, \frac{u^2}{c^2}\right)\right.\\
&\qquad\left. - \frac{u_x u_r}{c^2}\,\psi\left(\frac{u_r}{c}, \frac{u^2}{c^2}\right) - \frac{r w'_r}{c^2}\,\chi\left(\frac{u_r}{c}, \frac{u^2}{c^2}\right)\right],\\
F_y &= \ldots\\
\varphi &= 1 + \frac{3-k}{4}\,\frac{u^2}{c^2} - \frac{3(1-k)}{4}\,\frac{u_r^2}{c^2} + a_1\,\frac{u^4}{c^4} + \ldots,\\
\psi &= \frac{k+1}{2} + b_1\,\frac{u^2}{c^2} + b_2\,\frac{u_r^2}{c^2} + \ldots,\\
\chi &= 1 + c_1\,\frac{u^2}{c^2} + c_2\,\frac{u_r^2}{c^2} + \ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

où K, a_i, b_i, c_i *sont des coefficients qui resteront arbitraires dans l'état actuel de l'expérience ; ce qui implique que* φ, ψ, χ *sont des fonctions presque inconnues.*

Les termes d'un ordre supérieur au second ne jouent de rôle que dans la pression de la lumière (qui est du domaine de l'Optique et, par conséquent, ne nous occupera pas) et dans l'étude des rayons β du radium. Il n'est pas étonnant, dès lors, qu'ils soient mal déterminés. Mais on verra même que les termes du second ordre, dont dépendent les phénomènes électrodynamiques, ne sont pas entièrement déterminés par l'expérience : la quantité K reste arbitraire. La formule proposée est donc suffisamment générale pour le but que nous nous sommes proposé. Elle n'est pas la plus générale, et la considération de mouvements rotatoires des électrons serait plus simple sous divers rapports.

Les équations du mouvement seront encore (V) et (V^a). Dans le cas signalé précédemment où des ondes émises en des instants différents par le même électron e' atteignent simultanément l'électron e, il faudra, dans les sommes ΣF_{ix}, ..., tenir compte de chacune de ces actions.

Pour montrer que la théorie nouvelle rend effectivement compte de tous les faits connus du domaine de l'Électrodynamique, je considérerai d'abord le cas où les vitesses et les accélérations sont relativement petites ; il en est ainsi, en particulier, pour tous les phénomènes appartenant au domaine de l'Électrodynamique classique, pour les rayons cathodiques, etc. Ce cas est caractérisé par

le fait que l'on peut développer toutes les fonctions de la forme $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ qui y jouent un rôle en séries très convergentes procédant suivant les puissances de $\frac{r}{c}$, et ne prendre que les premiers termes. Ce sont là ce que j'appellerai *les phénomènes à variation lente*.

En second lieu, je considérerai le cas d'accélérations quelconques, avec des vitesses très petites par rapport à c : c'est celui des oscillations hertziennes et, jusqu'à un certain point, de l'Optique.

Enfin, lorsque les vitesses sont comparables à c, mais que les accélérations restent petites, on est conduit aux expériences de M. Kaufmann sur les rayons β du radium.

Tous les phénomènes électriques observés jusqu'ici appartiennent à l'une de ces catégories.

On sait que la loi de la conservation de l'énergie sous sa forme classique $W = \text{const.}$ n'est plus applicable quand il y a rayonnement; il faut avoir recours à l'image d'un *fluide* énergie, ou considérer l'énergie vibratoire perdue par un corps lumineux ou un excitateur hertzien comme projetée dans l'espace avec la vitesse de la lumière et lui attribuer une *quantité de mouvement* selon le théorème de M. Poincaré. De là aux idées que nous avons exposées ici, il n'y a qu'un pas. Mais, en abordant ce sujet, je dépasserais le but purement critique que je me suis proposé ici. Je me bornerai donc à montrer que les forces et les mouvements, et, par conséquent, le travail, sont bien les mêmes que l'indique la théorie de Maxwell, dans tous les phénomènes observés jusqu'ici ; la loi de l'énergie, *dans la mesure où elle a été vérifiée dans ce domaine*, en est la conséquence.

Avec le principe de l'énergie, le principe de la moindre action de Maupertuis, qui suppose l'équation de l'énergie sous sa forme classique, cesse d'être vrai en général, de même que les équations canoniques et l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi, et rien ne porte à croire que le principe d'Hamilton échappera à la règle générale. Pour qu'il fût applicable à la formule (VI) il faudrait, comme on le voit sans difficulté, y introduire un terme contenant l'accélération de e, c'est-à-dire une réaction d'inertie dépendant de la disposition des charges extérieures. La formule de

Weber contenait un terme de ce genre et Helmholtz [1] a montré les conséquences inadmissibles qui en résultent. Pour un électron isolé, pour lequel $\frac{e}{mc} = 1,8.10^7$ environ, mobile à l'intérieur d'une sphère creuse chargée, tout se passe comme si la masse était diminuée proportionnellement au potentiel de la sphère, et égale à zéro pour $1,5.10^6$ volt (positifs) environ. L'accélération deviendrait alors infinie, et l'on voit que l'expérience ne présenterait pas trop de difficultés. En Optique, et pour les vibrations spectrales où la réaction d'inertie joue un rôle essentiel, l'influence des charges électriques des appareils sur les propriétés optiques et la position des raies dans le spectre, qui résulterait de l'introduction d'un tel terme, serait absolument contraire à l'expérience. Ce n'est que lorsque la fonction de Lagrange dépend *linéairement* de la vitesse v de e, comme c'est le cas dans la théorie de Lorentz [2], que ces conséquences sont évitées : mais ceci exige l'introduction du mouvement absolu. *Le principe d'Hamilton devra donc également être transformé lorsqu'on ne considère que des vitesses relatives.*

Les équations du mouvement que nous avons écrites sont du second ordre, comme celles de la Mécanique ; mais, à cause de l'argument $t - \frac{r}{c}$, elles sont, en même temps, des équations fonctionnelles, et cette forme mixte très compliquée n'est peut-être pas définitive.

Phénomènes à variation lente.

§ 3. — Calcul général des forces.

Nous allons transformer l'expression de F en partant de l'hypothèse que les développements

$$(8)\quad \begin{cases} x'\left(t - \frac{r}{c}\right) = x'(t) - \frac{r}{c} v'_x(t) + \frac{r^2}{2c^2} w'_x(t) - \ldots, \\ v'_x\left(t - \frac{r}{c}\right) = v'_x(t) - \frac{r}{c} w'_x(t) - \ldots \end{cases}$$

---

[1] H. v. Helmholtz, *Wissenschaft. Abhand.*, t. I, Leipzig, 1882, p. 553, 639, 656.

[2] *Voir* la formule (XVII) de la première Partie, due à M. Schwarzschild.

sont très convergents, et nous nous proposons de calculer F aux termes du troisième ordre (en c^{-3}) près. Désignons par ρ le vecteur de composantes $x(t) - x'(t)$, $y(t) - y'(t)$, $z(t) - z'(t)$, c'est-à-dire la *distance actuelle* des deux points électriques, et soit toujours A_ρ la composante d'un vecteur A dans la direction ρ. On aura, d'après (2),

$$
(9)\quad \begin{cases}
r_x = x - x'\left(t - \dfrac{r}{c}\right) - \dfrac{r}{c} v'_x\left(t - \dfrac{r}{c}\right) \\
\quad = x(t) - x'(t) + \dfrac{r^2}{2c^2} w'_x(t) + \ldots, \\
r_y = y(t) - y'(t) + \dfrac{r^2}{2c^2} w'_y(t), \\
r_z = \ldots, \\
r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \rho^2 - \dfrac{\rho r^2}{c^2} w'_\rho,
\end{cases}
$$

d'où enfin

$$
(10)\quad \begin{cases}
r^2 = \dfrac{\rho^2}{1 - \dfrac{\rho w'_\rho}{c^2}} = \rho^2\left(1 + \dfrac{\rho w'_\rho}{c^2}\right) + \ldots, \\
r_x = \rho_x + \dfrac{\rho^2}{2c^2} w'_x(t), \qquad \ldots,
\end{cases}
$$

$$
(11)\quad \frac{\cos(r, x)}{r^2} = \frac{r_x}{r^3} = \frac{\cos(\rho, x)}{\rho^2}\left(1 - \frac{3}{2}\rho w'_\rho\right) + \frac{w'_x}{2\rho c^2} + \ldots.
$$

De même

$$
\begin{aligned}
(12)\quad u_r &= \left[v_x(t) - v'_x\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\frac{r_x}{r} + \left[v_y(t) - v'_y\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\frac{r_y}{r} \\
&\qquad + \left[v_z(t) - v'_z\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]\frac{r_z}{r} \\
&= [v_x(t) - v'_x(t)]\cos(\rho, x) + [v_y(t) - v'_y(t)]\cos(\rho, y) \\
&\qquad + [v_z(t) - v'_z(t)]\cos(\rho, z) + \frac{\rho}{c} w'_\rho(t) \\
&= \frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{c} w'_\rho(t) = v_\rho - v'_\rho + \frac{\rho}{c} w'_\rho.
\end{aligned}
$$

Les expressions u^2, u_r^2 n'entrant dans F qu'avec le facteur $\frac{1}{c^2}$, leur développement s'arrêtera dès le premier terme : u^2 sera le carré de la vitesse relative actuelle des deux points, soit

$$[v_x(t) - v'_x(t)]^2 + [v_y(t) - v'_y(t)]^2 + [v_z(t) - v'_z(t)]^2$$

et

$$u_r^2 = u_\rho^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2.$$

Toujours en négligeant les termes qui, dans l'expression (IV) de F, se trouveraient multipliés par $\frac{1}{c^3}$, il vient finalement

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_x = \frac{ee'}{\rho^2}\Bigg\{ & \cos(\rho, x)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\rho w'_\rho}{c^2} - \frac{3-k}{4}\frac{u^2}{c^2} - \frac{3(1-k)}{4}\frac{u_\rho^2}{c^2}\right] \\
& - \frac{(k+1)u_x u_\rho}{2c^2} - \frac{\rho w'_x}{2c^2}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{F}_y = \ldots;$$

$$\begin{aligned}
(13) \qquad \mathrm{F}_x = ee'\Bigg\{ & \frac{\cos(\rho, x)}{\rho^2} - \frac{\cos(\rho, x)}{4\rho^2 c^2}\left[(3-k)u^2 - 3(1-k)u_\rho^2\right] \\
& - \frac{(k+1)u_x u_\rho}{2c^2\rho^2} - \frac{w'_x - w'_\rho\cos(\rho, x)}{2c^2\rho}\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{F}_y = \ldots,$$

où, répétons-le, toutes les grandeurs doivent être prises à l'instant t. *On a ainsi retrouvé la forme si commode de l'action à distance.* On voit que l'action n'est pas égale à la réaction, mais que la différence est un terme contenant seulement les accélérations et non les vitesses.

Cette formule peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{ee'}\mathrm{F}_x = {} & \frac{1-k}{2}\frac{\cos(\rho, x)}{\rho^2}\left(1 - \frac{2u^2 - 3u_\rho^2}{2c^2} - \rho\frac{w_\rho - w'_\rho}{c^2}\right) \\
& + \frac{1+k}{2}\left[\frac{\cos(\rho, x)}{\rho^2}\left(1 - \frac{u^2}{2c^2}\right) - \frac{u_x u_\rho}{\rho^2 c^2} - \frac{w_x - w'_x}{\rho c^2}\right] \\
& + \frac{k}{2c^2\rho}(w'_x - w'_\rho\cos\rho x) \\
& - \frac{1}{\rho c^2}\left[\frac{k-1}{2}w_\rho\cos(\rho, x) + \frac{k+1}{2}w_x\right].
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\rho}{dt^2} & = \frac{d}{dt}\left[\frac{(v_x - v'_x)(x-x') + (v_y - v'_y)(y-y') + (v_z - v'_z)(z-z')}{\rho}\right] \\
& = \frac{u^2 - u_\rho^2}{\rho} + w_\rho - w'_\rho
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}w'_\rho = \frac{\partial}{\partial x}\frac{w'_x(x-x') + w'_y(y-y') + w'_z(z-z')}{\rho} = \frac{w'_x - w'_\rho\cos\rho x}{\rho},$$

en sorte que la première parenthèse s'écrit, puisque $u_\rho = \frac{d\rho}{dt}$,

$$1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho\frac{d^2\rho}{dt^2}$$

comme dans la loi de Weber bien connue; la deuxième représente la loi de Riemann [1], la troisième est égale à

$$\frac{k}{2c^2}\frac{\partial w_\rho^2}{\partial x}.$$

En somme, en ce qui concerne les vitesses, nous sommes donc en présence de la combinaison linéaire la plus générale des deux lois proposées par Weber et Riemann pour l'explication des phénomènes électriques. Or, on sait, et il est facile de le vérifier, que ces deux formules peuvent se mettre sous la forme classique

$$-\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x}, \quad -\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_y}, \quad -\frac{\partial L}{\partial z}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_z},$$

où $L=\frac{1}{\rho}\left(1+\frac{u_\rho^2}{2c^2}\right)$ pour Weber, et $\frac{1}{\rho}\left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right)$ pour Riemann.

Leur combinaison linéaire sera susceptible de la même forme, et, en posant

$$(14)\qquad P=\frac{ee'}{\rho}\left[\frac{(1-k)}{2}\left(1-\frac{u_\rho^2}{2c^2}\right)+\frac{(1+k)}{2}\left(1-\frac{u^2}{2c^2}\right)\right],$$

nous aurons

$$(15)\qquad F_x=-\frac{\partial}{\partial x}\left(P-\frac{ee'kw_\rho^2}{2c^2}\right)+\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial v_x}$$
$$-\frac{ee'}{2\rho c^2}[(k-1)w_\rho\cos(\rho, x)+(k+1)w_x].$$

En faisant sur la nature du courant de conduction des hypothèses très spéciales et qu'il faut considérer aujourd'hui comme inadmissibles, au moins pour les électrolytes, Weber et Riemann avaient démontré que leurs formules représentent bien les lois connues de l'électrodynamique et de l'induction en circuits fermés. Nous montrerons que ce résultat est indépendant de ces hypothèses spéciales [2] et s'étend même aux actions de courants fermés sur des ions libres, par exemple des rayons cathodiques, et aux actions

[1] B. RIEMANN, *Schwere Elektrizität u. Magnetismus*, Hannover, 1876, § 98, 99. *Voir*, sur ce sujet, *Enzyclop. der Math. Wissenschaften*, t. V, art. 12, p. 38 et 47 (Reiff u. Sommerfeld).

[2] C'est ce qu'ont, pour des cas particuliers du moins, remarqué divers auteurs; *voir* POINCARÉ, *Électricité et Optique*, 2e édition, p. 263.

que l'électricité statique en mouvement exerce sur un aimant (*c'est-à-dire un système de courants fermés*). Dans tous les phénomènes de ce genre observés jusqu'ici, il entre en jeu au moins *un* circuit fermé, et c'est là un point très important. Quant aux phénomènes d'induction en circuits ouverts, très rapides, ils dépendent uniquement du terme contenant les accélérations w'; or, on verra que ce terme est le même dans les deux théories : il est entièrement déterminé par les expériences faites sur les oscillations hertziennes, et l'on peut dire que toutes *les confirmations expérimentales de la théorie de Maxwell et Lorentz n'ont porté que sur lui et sur le fait de la propagation ; quant à la manière dont les vitesses entrent dans la formule de la force élémentaire, nous ne sommes pas plus renseignés à ce sujet que ne l'étaient Weber, Riemann et Clausius*, malgré les expériences faites sur les rayons cathodiques, l'effet Rowland, etc., etc.

Il est intéressant de comparer cette formule à celle qui résulte de la théorie de Lorentz lorsqu'on la développe également jusqu'aux termes du second ordre. Il vient, d'après (III),

$$R^2 = \left[x(t) - x'\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]^2 + \ldots$$

$$= \left[x(t) - x'(t) + \frac{R}{c} v'_x(t) - \frac{R^2}{2c^2} w'_x(t)\right]^2 + \ldots,$$

$$R^2 = \rho^2 + \frac{2R\rho}{c} v'_\rho + \frac{R^2}{c^2} v'^2 - \frac{R^2\rho}{c^2} w'_\rho,$$

les quantités v, w' étant prises pour l'instant t ; résolvons par rapport à R et développons encore, il viendra

$$(16) \qquad R = \rho\left(1 + \frac{v'_\rho}{c} - \frac{v'^2 - v'^2_\rho + \rho w'_\rho}{2c^2}\right).$$

De même, aux termes en $\frac{1}{c^2}$ près $\Big[$car, v'_R figurant dans (IV) avec le facteur $\frac{1}{c}$, cette approximation suffit$\Big]$,

$$(17) \qquad v'_R = \frac{\left[v'_x(t) - \frac{r}{c} w'_x(t)\right]\left[x(t) - x'(t) - \frac{r}{c} v'_x(t)\right] + \ldots}{R}$$

$$= v'_\rho + \frac{1}{c}\left[v'^2 - v'^2_\rho - \rho w'_\rho\right].$$

Les expressions des potentiels Φ. A donnés par MM. Liénard et Wiechert (¹) deviennent

$$(18)\qquad \Phi = \frac{e'}{R\left[1 - \frac{v'_R}{c}\right]} = \frac{e'}{\rho}\left(1 + \frac{v'^2 - v'^2_\rho}{2c^2}\right) - \frac{e'\gamma'_\rho}{2c^2} + \ldots,$$

$$(19)\qquad A_x = \frac{e'[v'_x]}{R\left[1 - \frac{v'_R}{c}\right]} = \frac{e'v'_x}{\rho} + \ldots.$$

La composante F'_x de la force, dont l'expression générale par les potentiels est

$$F'_x = e\left[-\frac{d\Phi}{dx} - \frac{1}{c^2}\frac{dA_x}{dt} - \frac{v_y}{c^2}\left(\frac{dA_y}{dx} - \frac{dA_x}{dy}\right) + \frac{v_z}{c}\left(\frac{dA_x}{dz} - \frac{dA_z}{dx}\right)\right],$$

devient, aux termes en $\frac{1}{c^3}$ près,

$$(20)\qquad F'_x = ee'\left\{\frac{\cos(\rho, x)}{\rho^2}\left(1 + \frac{v'^2 - 3v'^2_\rho - 2v_x v'_x - 2v_y v'_y - 2v_z v'_z}{2c^2}\right) - \frac{v'_x v'_\rho}{\rho^2 c^2} - \frac{[\gamma'_x + \gamma'_\rho\cos(\rho, x)]}{2c^2\rho}\right\}.$$

On voit que cette expression ne concorde avec (13) qu'en ce qui concerne le terme électrostatique $\frac{\cos(\rho, x)}{\rho^2}$ et les accélérations. On peut la mettre sous la forme

$$-\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{dv_x},$$

comme l'a montré M. Schwarzschild, en posant

$$L = \frac{e'}{R\left[1 - \frac{v'_R}{c}\right]}\left[1 - \frac{v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z}{c^2}\right],$$

(¹) Liénard, *L'Éclairage électrique*, t. XVI, 1898, p. 5, 53 et 106; Wiechert, *Arch. néerl.*, (2), t. V, 1900, p. 549. On peut, pour le cas où l'électricité est distribuée de manière homogène et fixée à un solide en translation, se servir de ces mêmes formules quelle que soit la distance, en remplaçant e, e' par de, de'; c'est ce qu'on voit en développant directement sous le signe somme dans la formule générale des potentiels [formules (XII) et (XIII) de la première Partie].

c'est-à-dire

$$(20\ bis)\qquad \mathrm{L} = \frac{e'}{\rho}\left(1 - \frac{v'^2 - v'^2_\rho}{4c^2} - \frac{v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z}{c^2}\right) - \frac{e' w'_\rho}{2c^2} + \frac{1}{c^3}(\ldots) \qquad [v' = v'(t),\ w' = w'(t)].$$

§ 4. — Électrostatique.

Lorsque les charges électriques sont au repos, ou, ce qui revient au même, sont entraînées dans un commun mouvement de translation uniforme, les formules (13) et (20) se réduisent à

$$\mathrm{F}_x = \frac{ee' \cos(\rho, x)}{\rho^2}, \qquad \mathrm{F}_y = \frac{ee' \cos(\rho, y)}{\rho^2}, \qquad \mathrm{F}_z = \frac{ee' \cos(\rho, z)}{\rho^2}.$$

C'est la loi de Coulomb ; on voit, de plus, que les quantités d'électricité sont mesurées en unités électrostatiques dans notre théorie comme dans celle de Lorentz.

Avec Lorentz, nous considérons les diélectriques pondérables comme formés d'atomes électriques positifs et négatifs, la charge totale de chaque élément de volume étant nulle. Ces atomes sont soumis à des forces élastiques qui tendent à les ramener à leur position d'équilibre lorsqu'ils en ont été écartés par des forces extérieures. La polarisation des diélectriques et ses effets s'expliqueront donc de la même manière dans les deux théories, et donneront lieu aux mêmes relations.

§ 5. — Courants électriques.

La théorie des électrons considère les courants de conduction, aussi bien dans les métaux que dans les électrolytes et les gaz, comme un transport de charges électriques, les ions positifs allant en sens inverse des ions négatifs. Considérons un élément de volume $d\tau$ de la matière pondérable qui est le siège du courant, élément contenant un grand nombre d'ions ; soient V sa vitesse, N_i, e_i le nombre, par unité de volume, et la charge d'une des diverses sortes d'ions qui constituent le courant. La vitesse relative d'un ion par rapport à la matière pondérable sera $v - \mathrm{V}$; c'est elle qui caractérise le courant, et l'intensité de ce dernier, mesurée en

unités électrostatiques, est, par hypothèse ([1]),

$$(21)\quad J_x = \sum_i N_i e_i (v_{xi} - V_x), \qquad J_y = \sum_i N_i e_i (v_{yi} - V_y), \qquad J_z = \ldots$$

La charge électrostatique $E\,d\tau$ de l'élément est

$$E\,d\tau = d\tau \sum_i N_i e_i$$

et le vecteur

$$V_x \sum N_i e_i = V_x E, \qquad \ldots$$

constitue le *courant de convection*, dont les effets ont été étudiés par Rowland et d'autres.

Ces ions en mouvement éprouvent, de la part des ions très voisins, des effets compliqués, et l'on admet qu'il en résulte en moyenne une résistance $-KJ_x$, $-KJ_y$, $-KJ_z$, proportionnelle aux vitesses relatives, K étant une constante. Dans l'expression de J, les mouvements moléculaires irréguliers sont sans influence appréciable. Les ions ne peuvent quitter la surface du conducteur, si ce n'est qu'aux points de contact avec un autre conducteur.

Ceci posé, les formules (13) et (20) ne contiennent, à côté du terme électrostatique, que des termes divisés par le nombre excessivement grand $c^2 = 9.10^{20}.\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}^2}$; ces termes ne seront sensibles que si les vitesses ou les accélérations sont extrêmement grandes, ou si les quantités d'électricité mises en jeu sont incomparablement supérieures à celles que nous obtenons en Électrostatique. L'étude des électrolytes et du phénomène Hall ont montré que les vitesses des ions et électrons sont telles que $\frac{v}{c}$ est très petit, de l'ordre 10^{-10}. Ce résultat simplifie considérablement la théorie. La charge électrostatique $E\,d\tau$ de l'élément de volume apparaît comme la différence de deux charges incomparablement plus grandes : sa charge positive $E_1\,d\tau$ et sa charge négative $-E_2\,d\tau$, toutes deux de l'ordre $10^{10}E\,d\tau$. Nous désignerons un tel courant sous le nom de *courant neutre*.

([1]) Lorentz. *Elektronentheorie*, § 29, p. 206.

On simplifie considérablement les calculs sans changer sensiblement les résultats en admettant qu'il n'y a que deux sortes d'ions, une positive, l'autre négative ; que cette dernière est seule en mouvement relatif par rapport à la matière du conducteur, tandis que les charges positives restent attachées à cette matière et ont, comme elle, la vitesse V. On a alors

$$J_x = Ne(v_x - V_x) = -E_2(v_x - V_x). \tag{22}$$

Le lecteur sera averti quand cette hypothèse influe sur le résultat.

On sait que, dans l'application des théories classiques, la distinction des courants fermés et non fermés était essentielle. Elle le sera encore ici. Les premiers seuls peuvent rester stationnaires ; quant aux seconds, les hypothèses faites sur E_1, E_2 montrent que les extrémités de ces courants porteront, après un temps extrêmement court, des charges électriques libres très considérables, qui modifieront profondément les conditions du mouvement. Les courants non fermés varieront donc, en général, avec une extrême rapidité, à moins que des moyens très sensibles ne permettent de mettre en jeu que des quantités d'électricité de beaucoup inférieures.

Nous admettrons, comme le veut la théorie des électrons et conformément aux vues d'Ampère, que *les aimants sont des systèmes de courants neutres fermés*.

Actions électrodynamiques et électromagnétiques.

§ 6. — Action d'un courant fermé sur un élément de courant neutre.

Soient $E'_1\,ds'$, $-E'_2\,ds'$, $E_1\,ds$, $-E_2\,ds$ les charges positives et négatives de deux éléments de deux fils situés l'un en x', y', z', l'autre en x, y, z. Par hypothèse, les charges totales $E'_1 - E'_2 = E'$, $E_1 - E_2 = E$ sont très petites par rapport à E'_1, ... La force exercée par ds' sur ds est la somme des actions de E'_1 et E'_2 sur E_1 et E_2. Les vitesses des ions positifs et de la matière sont V, V' ; celles des ions négatifs, v, v' ; les vitesses relatives $V - v = \eta$, $V' - v' = \eta'$, et, par conséquent, J, J' ont la direction de

$ds\,(dx, dy, dz)$ et $ds'\,(dx', dy', dz')$; on aura donc

$$(23)\quad \begin{cases} v'_x = V'_x - r'_1 \dfrac{dx'}{ds'}, & v'_y = V'_y - r'_1 \dfrac{dy'}{ds'}, \quad v'_z = \ldots, \\ v_x = V_x - r_1 \dfrac{dx}{ds}, & v_y = \ldots \end{cases}$$

$$(24)\qquad J = E_2 r_1, \qquad J' = E'_2 r'_1.$$

Portons ces valeurs dans l'expression (13) de F_x, et formons la somme indiquée. Le terme $\dfrac{\cos(\rho, x)}{\rho^2}$ aura le coefficient

$$E'_1 E_1 - E'_1 E_2 - E'_2 E_1 + E'_2 E_2 = EE' :$$

c'est l'action électrostatique.

Les termes en $\dfrac{(3-k)\cos(\rho, x)}{4\rho^2 c^2}$ seront, au facteur $ds\,ds'$ près,

$$\begin{aligned} E_1 E'_1 (V_x - V'_x)^2 &- E_1 E'_2 \left(V_x - V'_x + r'_1 \frac{dx'}{ds'}\right)^2 \\ &- E_2 E'_1 \left(V'_x - V_x + r_1 \frac{dx}{ds}\right)^2 \\ &+ E_2 E'_2 \left(V_x - r_1 \frac{dx}{ds} - V'_x + r'_1 \frac{dx'}{ds'}\right)^2 + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits se déduisant de ceux-ci par permutation circulaire de xyz. Cette expression peut s'écrire

$$\begin{aligned} E_2 E'_2 \Bigg[(V_x - V'_x)^2 \frac{EE'}{E_2 E'_2} &- 2 \frac{E r'_1}{E_2} (V_x - V'_x) \frac{dx'}{ds'} \\ &- 2 \frac{E' r_1}{E'_2} (V'_x - V_x) \frac{dx}{ds} - \frac{E r'^2_1}{E_2} \left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 \\ &- \frac{E' r_1^2}{E'_2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - 2 r_1 r'_1 \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \ldots \Bigg]. \end{aligned}$$

Lorsque les charges résultantes E, E' sont nulles, le dernier seul subsiste. Dans les autres cas, $\frac{E}{E_2}$, $\frac{E'}{E'_2}$ sont très petits, et, comme le tout doit être multiplié par $\frac{1}{c^2}$, on voit que le premier terme est absolument négligeable à côté du terme électrostatique. Le deuxième correspond à une action très faible d'un courant neutre sur une charge électrostatique en mouvement, le troisième à l'action d'une telle charge sur un courant ou aimant (effet Rowland). Ces deux effets sont du même ordre de grandeur, et ne se manifestent

que dans des expériences très délicates et lorsque V ou V' sont considérables. Si le terme électrostatique est faible lui-même, comme c'est, en général, le cas, ils sont absolument négligeables. Nous discuterons plus loin l'effet Rowland.

Les termes carrés sont également très petits par rapport à $\eta\eta' \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}$, et il ne reste que ce dernier terme :

$$-2\,E_2\,E_2'\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)\eta\eta' = -2\,JJ'\cos(ds,\,ds').$$

De même, les termes en $-\frac{3(1-k)}{4c^2}$ et $-\frac{(k+1)}{2c^2}$ ne donnent sensiblement qu'un résultat proportionnel à JJ', et l'on aura, pour l'ensemble des termes dépendant des vitesses,

$$(25)\quad \begin{aligned} dR_x = &-\frac{\cos(\rho,\,x)}{2\rho^2c^2}\,JJ'\,ds\,ds' \\ &\times[(3-k)\cos(ds,\,ds')-3(1-k)\cos(\rho,\,ds)\cos(\rho,\,ds')] \\ &+\frac{JJ'(k-1)}{2c^2\rho^2}[dx\,ds'\cos(\rho,\,ds')+dx'\,ds\cos(\rho,\,ds)]. \end{aligned}$$

D'après la formule (20) de Lorentz, l'action ds' sur ds est, en vertu de raisonnements analogues, donnée par

$$(26)\quad \begin{aligned} dR'_x = &-\frac{ds\,ds'\,JJ'}{c^2\rho^2}\cos(\rho,\,x)\cos(ds,\,ds') \\ &+\frac{JJ'}{\rho^2c^2}\,dx'\,ds\cos(\rho,\,ds), \end{aligned}$$

les termes en E, E' et les termes carrés étant encore négligeables. Quant aux termes contenant les accélérations, qui est le même dans les deux théories, il est encore multiplié par $\frac{E}{c}$ ou $\frac{E'}{c}$, et par conséquent négligeable, à moins que les accélérations ne soient très grandes, ce qui n'est pas le cas dans les conditions expérimentales où l'on peut observer les actions électrodynamiques ou électromagnétiques.

Je dis que *la résultante de l'action d'un circuit fermé ds' sur l'élément ds est la même suivant* (25) *et* (26). En effet,

$$\frac{ds'\cos(\rho,\,ds')}{\rho^2} = \frac{(x-x')\,dx'+(y-y')\,dy'+(z-z')\,dz'}{\rho^3} = \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds'}ds'$$

car

$$\frac{d}{ds'} = \frac{\partial}{\partial x'}\frac{dx'}{ds'} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{dy'}{ds} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{dz'}{ds'}.$$

Le terme en $dx\,ds'\cos(\rho, ds')$ est donc une différentielle totale par rapport à s'; son intégrale est nulle pour un contour fermé. De même

$$\frac{\cos(\rho, x)}{\rho^2}\cos(\rho, ds)\cos(\rho, ds')$$

$$= \frac{x - x'}{3}[(x - x')\,dx + (y - y')\,dy + (z - z')\,dz]\frac{\partial\frac{1}{\rho^3}}{\partial s'}\,ds',$$

et l'intégration par parties le long de s' transformera ce terme en

$$-\frac{1}{3\rho^2}\frac{\partial}{\partial s'}\{(x - x')[(x - x')\,dx + (y - y')\,dy + (z - z')\,dz]\}$$

$$= \frac{dx'}{3\rho^3}[(x - x')\,dx + (y - y')\,dy + (z - z')\,dz]$$

$$+ \frac{x - x'}{3\rho^3}(dx'\,dx + dy'\,dy + dz'\,dz)$$

$$= \frac{dx'\,ds}{3\rho^2}\cos(\rho, ds) + \frac{\cos(\rho, x)}{3\rho^2}\cos(ds, ds')\,ds\,ds',$$

en sorte qu'il vient, pour la résultante cherchée de l'action éprouvée par ds,

$$R_x = \int dR_x = \frac{JJ'}{c^2}\int\frac{ds'}{\rho^2}\left[-\cos(\rho, x)\cos(ds, ds')\,ds + \frac{dx'}{ds'}ds\cos(\rho, ds)\right].$$

C'est exactement ce que donnerait l'intégration de (26). La constante k disparaît du résultat. Celui-ci est d'ailleurs indépendant du mouvement des fils ou de leur déformation, pourvu que J, J′ restent constants, que *l'élément de courant* J *ds soit neutre*, et que J′ soit fermé et neutre. Les actions rotatives des courants et des aimants s'expliqueront donc de la manière classique.

Pour $k = -1$, l'action de deux éléments de courant neutre serait exactement donnée par la formule d'Ampère; cette formule peut donc, aujourd'hui encore, être admise.

Lorsqu'il s'agit de corps à deux ou trois dimensions, dont l'un est parcouru par un courant neutre décomposable en filets fermés, celui-ci agit sur les éléments de volume de l'autre conformément à la formule obtenue; mais, de plus, les courants eux-mêmes changent légèrement leur direction, comme on le verra au para-

graphe suivant : c'est l'effet Hall. Mais cet effet est minime, et peut être négligé ici.

Comme toujours, les effets du magnétisme s'obtiendront en remplaçant les aimants par des courants neutres fermés moléculaires ; ici encore il n'y aura donc pas de différences entre les théories.

§ 7. — Action d'un courant neutre fermé ou d'un aimant sur un ion en mouvement.

On observe cette action dans l'étude des rayons cathodiques et des rayons canaux, où la vitesse v de l'ion e en mouvement, tout en restant très inférieure à celle de la lumière, est très grande par rapport à la vitesse des ions du courant fermé, puis dans le phénomène de Hall, l'effet Zeeman et la rotation magnétique du plan de polarisation de la lumière (¹).

Conservons les notations du paragraphe précédent ; l'action subie par e sera la somme des actions des charges positives et négatives $E'_1\,d\tau'$, $-E'_2\,d\tau'$ de tous les éléments de volume du courant. Le conducteur lui-même, dans ces expériences, est au repos ; donc $V' = 0$, $-E'_2 v'_x = J_x$, et la vitesse v' des ions négatifs, seuls mobiles par hypothèse, est petite par rapport à v. La formule générale (13) donne pour un élément linéaire ds' du courant fermé, et abstraction faite du terme électrostatique et des accélérations,

$$
\begin{aligned}
dR_x = {} & \frac{e\,ds'\cos(\rho, x)}{c^2\rho^2}\Big\{\frac{3-k}{4}E'_1 v^2 - \frac{3-k}{4}E'_2 \\
& \qquad \times\left[(v'_x - v_x)^2 + (v'_y - v_y)^2 + (v'_z - v_z)^2\right] \\
& \qquad - \frac{3(1-k)}{4}v_r^2 E'_1 + \frac{3(1-k)}{4}(v_r - v'_r)^2\Big\} \\
& - \frac{(k-1)\,ds'}{2c^2\rho^2}\left[E'_1 v_x v_\rho - E'_2 (v_x - v'_x)(v_\rho - v'_\rho)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(27)\qquad dR_x = {} & \frac{e E'_2 \cos(\rho, x)}{c^2\rho^2}\,ds'\Big[\frac{E'_1}{E'_2}\frac{(3-k)}{4}v^2 - \frac{(3-k)}{4}v'^2 \\
& \qquad - 3\frac{E'_1}{E'_2}\frac{(1-k)}{4}v_r^2 - \frac{3(1-k)}{4}v_r'^2 \\
& \qquad + \frac{(3-k)}{2}vv'\cos(v, v') - 3\frac{(1-k)}{2}v_r v'_r\Big] \\
& - \frac{(k-1)\,ds'}{2c^2\rho^2}E'_2\left(\frac{E'_1}{E'_2}v_x v_\rho - v_x v_\rho + v'_x v_\rho + v'_\rho v_x\right).
\end{aligned}
$$

(¹) Lorentz, *Elektronentheorie*, p. 217.

A côté des termes proportionnels à v, v', les termes en v'^2, v'_x, v'_ρ disparaissent parce que $\frac{v'}{c}$ est très petit : il en est de même des termes en $\frac{E'}{E_2}$, car ils sont à l'action électrostatique des charges E' du courant comme $\frac{v^2}{c^2}$, c'est-à-dire très petits. Il reste les termes proportionnels à v et v', que l'on peut écrire

$$
(28)\quad dR_x = \frac{-J' ev\cos(\rho, x)\,ds'}{c^2\rho^2} \times \left[\frac{(3-k)}{2}\cos(v, ds') - \frac{3(1-k)}{2}\cos(\rho, ds')\cos(\rho, v)\right] - \frac{(k-1)eJ'}{2c^2\rho^2}[v_x\cos(r, ds')\,ds' + v\cos(v, r)\,dx'].
$$

C'est, aux notations près, la formule (25). Le courant ds' étant fermé, on peut, comme nous l'avons fait plus haut, intégrer par rapport à s', et l'on obtiendra encore ce résultat que *l'action d'un aimant ou d'un courant fermé, au repos, sur un ion en mouvement est la même que dans la théorie de Lorentz.*

Si v devient plus petit et comparable à v', tous les termes de (27) deviennent très petits et le phénomène exige, pour être observé, des moyens d'investigation très délicats. C'est ce qui a lieu lorsque, plaçant une plaque parcourue par un courant, entre les pôles d'un électro-aimant, on observe, lorsque l'aimant est excité, une différence de potentiel entre les deux bords du courant (effet Hall). L'action électrostatique de l'aimant étant négligeable, il en est *a fortiori* de même des termes en E' de la formule (27) ; il y aura donc, d'abord, une action proportionnelle à J' et à v, qui est la même, comme on l'a vu, dans l'une et l'autre théorie; il y a, de plus, la force

$$
\int\left\{-\frac{eE'_2\cos(\rho, x)\,ds'}{\rho^2 c^2}\left[\frac{(3-k)}{4}v'^2 - \frac{3(1-k)}{4}v'^2_\rho\right] + \frac{(k+1)eE'_2\,ds'}{2c^2\rho^2}v'_x v'_\rho\right\}.
$$

Celle-ci dépend, comme le phénomène de Hall lui-même (et au contraire des forces étudiées jusqu'ici), des hypothèses faites sur le mouvement des ions : elle serait sensiblement nulle si les ions positifs et négatifs de l'électro-aimant avaient des vitesses égales

et de signes contraires. La formule (20) de Lorentz donne des forces analogues :

$$\int \frac{E'_2\, e \cos(\rho, x)}{2c^2\rho^2}\, ds' (v'^2 - 3v_\rho^2).$$

Le terme en v'^2 a la nature d'une force électrique exercée par les éléments de volume de l'aimant indépendamment de leur orientation (les courants moléculaires étant considérés comme permanents et simplement orientés par l'aimantation). Ces actions, indépendantes du signe du champ magnétique et de l'existence d'un courant dans la plaque, échapperont sans doute aux observations même les plus délicates. Quant aux termes contenant les accélérations des ions du courant, et qui sont les mêmes dans les deux théories, ils sont également négligeables, pour des motifs analogues.

§ 8. — Action convective de l'électricité. — Expériences de Rowland, Röntgen et Eichenwald.

Considérons enfin une charge électrostatique $E'd\tau'$ entraînée avec une vitesse V' par le corps qui la porte et agissant sur une aiguille aimantée, c'est-à-dire sur un système de courants fermés et neutres, de charge électrostatique nulle, dont les ions positifs sont immobiles, les ions négatifs ayant la vitesse v. Un élément ds de l'un de ces courants sera soumis à une force dR_x, dR_y, dR_z, qui est la somme des actions de $E'd\tau'$ sur sa charge positive $E'ds$ et sa charge négative $-E_1 ds$, et (13) donnera

$$(29)\qquad \begin{aligned} dR_x = {} & \frac{E_1 E' \cos(\rho, x)\, d\tau'\, ds}{\rho^2 c^2} \\ & \times \left[\frac{(3-k)}{2} (V'_x v_x + V'_y v_y + V'_z v_z) + \frac{3(1-k)}{2} V'_\rho v_\rho \right. \\ & \left. \qquad - \frac{(3-k)}{4} v^2 + \frac{3(1-k)}{4} v_\rho^2 \right] \\ & + \frac{(k+1) E' E_1\, ds\, d\tau'}{2\rho^2 c^2} (V'_x v_\rho - V'_\rho v_x - v_x v_\rho). \end{aligned}$$

L'ensemble des termes proportionnels à V' et v ont la forme déjà plusieurs fois obtenue ; on a d'ailleurs

$$E_1 v_x = J \frac{dx}{ds};$$

on peut intégrer, par rapport à ds (ce courant étant fermé), comme précédemment par rapport à ds', et l'on retrouve la formule qui se déduirait de la théorie de Lorentz. Une transformation de ce genre sera toujours possible dès qu'*un* au moins des courants est fermé. Les termes additifs en v_1^2, v_ρ^2, v_x, v_ρ donneraient une force résultante et non un couple pour l'aimant, force dont l'intensité, toujours très petite, dépend des hypothèses faites sur les mouvements des ions dans l'aimant et est négligeable par rapport au couple si v est petit par rapport à V, que l'électricité négative soit seule mobile ou non.

Lorsqu'un diélectrique est polarisé par des forces électrostatiques, il en résulte à sa surface des charges électriques identiques d'après les deux théories. Si le champ électrostatique varie, ou si le diélectrique est mobile, le mouvement de ces charges sera encore le même dans l'une et l'autre manière de voir, et, on vient de le voir, ces charges mobiles auront sur un aimant la même action. A cette action s'ajoute, dans les théories de Hertz et de Lorentz, une autre, celle du courant de déplacement relatif à l'éther, qui est proportionnelle à la vitesse de changement de la force électrique en un point de l'éther. Dans l'expérience de Röntgen ([1]), de même que dans celles d'Eichenwald ([2]), cette action est nulle dans la théorie de Lorentz, qui donnera, par conséquent, les mêmes résultats, conformes à l'expérience, que notre formule.

Pour obtenir une action dépendant de k, c'est-à-dire un *experimentum crucis*, il faudrait pouvoir observer des forces électrodynamiques ou électromagnétiques entre courants non fermés ou non neutres tous deux. C'est à quoi l'on n'a pas encore réussi jusqu'ici.

Induction.

§ 9. — Le courant inducteur est neutre et fermé.

Soit ds' un élément linéaire d'un des courants fermés en lesquels on peut décomposer le courant inducteur. Soit V' la vitesse de l'élément (qui est en même temps celle des ions positifs) : nous

---

([1]) *Annalen der Physik u. Chemie*, t. XXXV, 1888, p. 264.

([2]) *Ann. der Physik*, 4e série, t. XI, 1903, p. 1 et 421.

avons calculé (27) l'action d'un tel élément sur un ion mobile en supposant $V' = 0$ et en négligeant les accélérations. Reprenons le calcul sans ces restrictions, mais en négligeant l'action électrostatique du courant, et, *a fortiori*, tous les termes multipliés par la charge résultante E' de ds, ce qui revient à poser $E'_1 = E'_2$. Soit F la force exercée par les charges positives et négatives de ds' sur l'unité de charge placée en (xyz), de vitesse v. La force électromotrice d'induction produite dans un fil conducteur dont l'élément est ds (dx, dy, dz) déterminé par la composante tangentielle totale de F :

$$R = \int (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz).$$

Dans les courants induits fermés, on n'observe que la valeur de cette intégrale prise le long d'un contour fermé. Si donc F contient des termes de la forme $\frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial x}$, ces termes donneront une différentielle totale et, par conséquent, disparaîtront du résultat.

Pour calculer F, partons de la formule (15). Nous pourrons négliger le terme indépendant de v, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{k w'_\rho}{2c^2}$, pour tout courant induit fermé. Le terme contenant w sera multiplié par E', et par suite sensiblement nul ; on aura donc

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial v_x},$$

$$P = \frac{E'_1\,ds'}{4c^2\rho}\Big\{2(1-k)(V'_\rho - v_\rho)\eta'_1 \cos(\rho, ds') - 2(1+k)\eta'_1$$
$$\times \left[(V'_x - v_x)\frac{dx'}{ds'} + (V'_y - v_y)\frac{dy'}{ds'} + (V'_z - v_z)\frac{dz'}{ds'}\right]$$
$$- \eta'^2(1+k) - \eta'^2\cos^2(\rho, ds')(1-k)\Big\}.$$

Dans cette expression, les termes indépendants de v ne figureront pas sous le signe $\frac{d}{dt}$, et leur dérivée partielle par rapport à x, y, z intervient seule et donne, dès lors, un résultat nul. Il restera

$$P = -\frac{J'}{2c^2\rho}[(1-k)v_\rho \cos(\rho, ds')\,ds' + (1+k)(v_x\,dx' + v_y\,dy' + v_z\,dz')].$$

Le premier terme

$$\frac{v_\rho \cos(\rho, ds')\, ds'}{\rho} = [v_x(x-x') + v_y(y-y') + v_z(z-z')] \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{ds}\, ds'$$

donne, intégré par parties,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial s'} [v_x(x-x') + v_y(y-y') + v_z(z-z')]$$
$$= \frac{v_x\, dx' + v_y\, dy' + v_z\, dz'}{\rho},$$

en sorte qu'on a enfin

$$\mathrm{P} = -\frac{\mathrm{J}'}{c^2 \rho}(v_x\, dx' + v_y\, dy' + v_z\, dz').$$

Dans la théorie de Lorentz, il existe une fonction L donnée par (20 *bis*) et qui conduit, par la même opération $-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial v_x}$, à l'expression de la force. Les termes en v'^2, $v_\rho'^2$, w_ρ' de cette expression donnent encore zéro pour un circuit induit fermé. La valeur résultante de L sera donc

$$-\frac{\mathrm{J}'}{c^2 \rho}(v_x\, dx' + v_y\, dy' + v_z\, dz').$$

Les deux théories donnent donc, pour deux circuits fermés en mouvement (car nous n'avons fait aucune hypothèse sur le mouvement du circuit induit, et nous n'avons pas supposé v parallèle à ds), *le même résultat*, conforme à l'expérience.

Les hypothèses plus spéciales de Weber conduisent, on le sait, aux mêmes résultats.

Les aimants seront traités comme dans la théorie de Lorentz.

Une remarque est cependant nécessaire. Pour que la formule de Lorentz soit conforme à l'expérience, il faut que l'accélération tangentielle seule $\frac{\partial \mathrm{J}'(x', y', z', t)}{\partial t}$ joue un rôle (dans le cas de courants variables), l'accélération normale, proportionnelle à $\frac{v'^2}{\text{rayon de courbure}}$, étant négligeable à côté d'elle. C'est bien le cas dans les expériences. Autrement dit, il faut que

$$\frac{\partial \mathrm{J}'_a}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{J}_a}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathrm{J}_a}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathrm{J}_a}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathrm{J}_a}{\partial z} \qquad (a = x, y, z)$$

se réduise sensiblement à son premier terme.

Lorsque *le circuit induit est ouvert,* il se forme, comme on sait, des différences de potentiel ; l'étude des quelques cas où ces différences ont pu être observées se traite facilement par les méthodes appliquées jusqu'ici, et je n'y insiste pas.

§ 10. — Circuits inducteurs et induits ouverts.

Quand un condensateur se décharge à travers un fil, on obtient, comme on sait, une première approximation, suffisante dans beaucoup de cas, en calculant les effets électromagnétiques (par exemple, l'impulsion subie par l'aiguille aimantée dans l'expérience de Weber et Kohlrausch, pour la détermination du rapport des unités) et la self-induction, *comme si le courant était fermé*, en tenant compte naturellement des actions électrostatiques des charges du condensateur. Ces calculs continueront donc à être applicables dans la nouvelle théorie ; ils conduisent, conformément à l'expérience, à des phénomènes très rapides, pour lesquels les accélérateurs w sont très considérables par rapport aux vitesses v. Dans le cas, par exemple, où l'on aurait n oscillations sinusoïdales par seconde, la valeur maxima de w est $2\pi n$ fois plus grande que celle de v. Dans ces expériences, le terme électrostatique, la résistance et l'induction proportionnelle à $\frac{\partial J}{\partial t}$, c'est-à-dire à w, jouent seuls un rôle en ce qui concerne le mouvement de l'électricité dans les conducteurs. Or ces termes sont identiques dans les deux théories. Quant aux couples exercés sur les aiguilles aimantées ou des bobines, nous avons vu qu'il suffit, pour l'identité des théories, que l'*un* des courants soit fermé, ce qui est bien le cas. Les effets d'un mouvement des conducteurs, qui sera toujours lent par rapport à ces phénomènes, ne les influenceraient pas sensiblement ; plus généralement, les termes en v', petits par rapport à ceux qui contiennent w', seront sans effet d'induction dans ces phénomènes. Les oscillations de tels circuits (oscillations qu'on désigne souvent sous l'expression de *quasi-stationnaires*) et leurs effets sur des circuits voisins seront donc les mêmes dans l'une et l'autre théorie. Ce n'est que lorsque les phénomènes deviennent extrêmement rapides (oscillations hertziennes) que les développements en série qui ont conduit à la formule (13) cessent d'être très conver-

gents : la propagation joue alors un rôle explicite, et il faut recourir à des considérations nouvelles que j'exposerai plus loin ; l'accord avec les formules de Maxwell et Lorentz y restera le même.

En résumé, aucune divergence sensible avec la théorie de Lorentz et avec l'expérience ne s'est manifestée pour les phénomènes à variation lente ; ce fait n'est pas sans intérêt, vu la grande différence des lois élémentaires, et montre que, malgré les progrès récents, ces lois ne peuvent encore se déduire de l'expérience [1].

§ 11. — Action d'un corps rigide chargé sur lui-même. Masse électromagnétique.

Dans tout ce qui précède, nous avons négligé l'action des électrons sur eux-mêmes ; nous allons la calculer en supposant la masse égale à M, les densités électriques en deux points xyz, $x'y'z'$ étant ε, ε' ; de plus, nous ferons abstraction d'une rotation de l'électron, et ne considérerons qu'un mouvement de translation *quasi-stationnaire*, c'est-à-dire où la formule (13) pour F reste applicable. La formule (V) donnera alors

$$\mathrm{M}\,w_x = \int\!\!\int \varepsilon\varepsilon'\,\mathrm{F}_x\,d\tau\,d\tau', \qquad \mathrm{M}\,w_y = \int\!\!\int \varepsilon\varepsilon'\,\mathrm{F}_y\,d\tau\,d\tau', \qquad \mathrm{M}\,w_z = \ldots.$$

Les termes en u sont nuls dans l'expression de F, puisque la vitesse est la même pour tous les éléments de volume ; le terme électrostatique donnera encore zéro, parce qu'il satisfait au principe de l'action et de la réaction ; il ne reste que les termes relatifs aux accélérations, et l'on a

$$\mathrm{M}\,w_x = -\frac{1}{2c^2}\int\!\!\int \frac{\varepsilon\varepsilon'\left[w'_x - w'_\rho \cos(\rho, x)\right]}{\rho}\,d\tau\,d\tau',$$

$$\mathrm{M}\,w_y = -\frac{1}{2c^2}\int\!\!\int \frac{\varepsilon\varepsilon\left[w'_y + w'_\rho \cos(\rho, y)\right]}{\rho}\,d\tau\,d\tau'.$$

Le corps exercera donc sur lui-même une force qui est fonction linéaire des accélérations, c'est-à-dire une réaction d'inertie anisotrope en général (c'est-à-dire dépendant de la direc-

---

[1] Pour plus de détails sur l'interprétation de la résistance, du magnétisme, etc. dans la théorie des électrons, *voir* l'Article déjà souvent cité de H.-A. Lorentz : *Elektronentheorie*, dans *Enzyklop. d. math. Wissensch.*, Leipzig, 1904.

tion de w par rapport à l'électron) :

$$
(30)\quad
\left\{
\begin{aligned}
M w_x &= -\frac{w_x}{2c^2} A_x - \frac{w_y}{2c^2} B_x - \frac{w_z}{2c^2} C_x,\\
M w_y &= -\frac{w_x}{2c^2} A_y - \frac{w_y}{2c^2} B_y - \frac{w_z}{2c^2} C_y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_x &= \int\!\!\int \varepsilon\varepsilon' \frac{\rho^2 - (x - x')^2}{\rho^3}\, d\tau\, d\tau',\\
B_x &= \int\!\!\int \varepsilon\varepsilon' \frac{(x' - x)(y' - y)}{\rho^3}\, d\tau\, d\tau',\\
C_x &= \int\!\!\int \varepsilon\varepsilon' \frac{(x - x')(z - z')}{\rho^3}\, d\tau\, d\tau',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

où chaque combinaison d'éléments $d\tau$, $d\tau'$ est prise deux fois.

Ces formules sont identiques à celles qui résultent de la théorie de Lorentz [1] aux faibles vitesses ; c'est un résultat de l'identité des termes relatifs aux accélérations dans les deux théories.

Lorsque le corps présente certaines symétries, cette réaction devient parallèle à w ; dans ce cas, l'axe des x étant parallèle à w, la quantité

$$M' = \int\!\!\int \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2c^2}\, \frac{\rho^2 - (x - x')^2}{\rho}\, d\tau\, d\tau'$$

jouera *simplement le rôle de masse électromagnétique ajoutée à la masse* M. Tel est donc le résultat de l'inégalité de l'action et de la réaction dans notre théorie pour ce cas particulier.

Il est évident d'ailleurs que ce résultat subsiste même aux grandes vitesses, car les termes en u continueront à être identiquement nuls : la masse électromagnétique ne saurait dépendre de la vitesse, dans notre théorie, et les expériences de M. Kaufmann devront recevoir une nouvelle interprétation. On ne pourra donc pas en conclure que la masse est d'origine électromagnétique, mais rien n'empêchera d'admettre cette hypothèse, au moins pour les électrons.

En tenant compte des termes en $\frac{1}{c^3}$, on obtient une nouvelle

---

[1] LORENTZ. *Elektronentheorie*, p. 190. (Tenir compte de la différence des unités.)

force résultante

$$\frac{2e^2}{3c^3}\frac{dw_x}{dt}, \quad \frac{2e^2}{3c^3}\frac{dw_y}{dt}, \quad \frac{2e^2}{3c^3}\frac{dw_z}{dt},$$

qu'un électron de charge totale e exerce sur lui-même; on la retrouve, avec le même coefficient, dans la théorie de Lorentz [1]. Cette force, qu'il faut ajouter aux membres de droite de l'équation (30), ne dépend pas, comme la réaction d'inertie, de la forme du corps, c'est-à-dire de l'électron ; elle correspond à une sorte de frottement déterminé par la perte d'énergie par rayonnement. Dans la solution d'équations où intervient ce terme du troisième ordre, il n'est permis de prendre en considération que les intégrales correspondant à des phénomènes lents, pour lesquels les développements en série restent valables.

§ 12. — Oscillations électriques. Considérations générales.

On a vu, dans les paragraphes précédents, que, pour les oscillations très rapides, les accélérations seules sont à conserver à côté du terme électrostatique, les vitesses étant négligeables à côté d'elles. Il ne sera plus permis de recourir aux développements dont nous nous sommes servis jusqu'ici, et nous devons revenir à la formule (VI), en y posant $u = 0$. Elle devient alors

$$(31) \qquad \mathrm{F}_x = \frac{ee'}{r^2\left(1 - \frac{rw'_r}{c^2}\right)}\left[\cos(r, x) - \frac{rw'_x}{c^2}\right]$$

$$= \frac{ee'\cos(n, x)}{r^2} - \frac{ee'}{c^2 r}\,\frac{w'_x - w'_r\cos(r, y)}{1 - \frac{rw'_r}{c^2}}.$$

Dans la théorie de Lorentz, la force électrique seule jouera un rôle [2].

$$(32) \qquad \mathrm{K}_x = \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{\mathrm{R}w'_\mathrm{R}}{c^2}\right)}{\mathrm{R}^2\left(1 - \frac{v_\mathrm{R}}{c^2}\right)^3}\left[\cos(\mathrm{R}, x) - \frac{v'_x}{c}\right] - \frac{w'_x}{c^2\mathrm{R}\left(1 - \frac{v_\mathrm{R}}{c}\right)^2},$$

---

(1) *Loc. cit.*

(2) En Optique, la force magnétique multipliée par la vitesse joue un rôle dans le seul phénomène où les termes en $\frac{1}{c^3}$ ne sont pas négligeables : la pression de la lumière. La formule pour K est due à M. Schwarzschild.

et l'on y peut également négliger les termes en $\frac{v'^2}{c^2}$, $\frac{v_R'^2}{c^2}$, $v'w'$, ..., en sorte qu'elle devient

$$(33) \qquad K_x = \frac{\cos(R, x) - \frac{v_x}{c}}{R^2\left(1 - \frac{3v_R}{c}\right)} - \frac{w'_r - w_R \cos(R, x)}{c^2 R},$$

et cela pour toute valeur de R qui ne serait pas incomparablement plus petite que 1^{cm}, et *a fortiori* pour de grandes valeurs.

Les seconds termes des deux formules (31), (33) correspondent à une force perpendiculaire au rayon vecteur, et qui joue en Optique (où le terme en $\frac{1}{r^2}$ disparaît) le rôle de *vecteur de Fresnel*. Elle ne dépend que de x, y, z, t et non de v; la notion de champ peut donc s'y appliquer, c'est-à-dire qu'on peut considérer la distribution de cette force dans l'espace indépendamment de la présence ou de l'absence d'un électron, ce qui ne serait plus le cas si elle dépendait de la vitesse relative de celui-ci.

Discussion générale. — Les formules (VI) et (31) appellent une remarque générale. Elles contiennent, en effet, le facteur $\frac{1}{1 - \frac{rw'_r}{c^2}}$, qui devient infini pour des valeurs de r suffisamment grandes. Je vais montrer qu'il n'en résulte cependant que des forces finies.

Considérons une charge e' vibrant parallèlement à l'axe des x et dont la vitesse $v' = v'(t')$ est nulle pour $t' = 0$, et positive ensuite. L'onde émise en $t' = 0$ se propage le long de l'axe avec la vitesse c, et atteindra un point fixe P situé sur l'axe positif en un instant $t > t' > 0$. Puis, la vitesse de propagation croîtra, et sera $c + v'$ pour l'onde émise en t'_0 ; cette onde rejoindra donc la précédente à une certaine distance x_0, puis la dépassera ; au point x_0 deux ondes émanées de e' en $t' = 0$ et $t' = t'_0$ arriveront simultanément. La vitesse v' restant positive, le nombre des ondes arrivant simultanément en x_0 pourra encore s'accroître ; mais, lorsque v' diminuera ou changera de signe, ce cas ne se présentera plus. La position de P et le mouvement de e' étant donnés, le temps d'arrivée t est une fonction $f(t')$ bien déterminée de t', donnée par la loi de propagation [analytiquement par la formule (II$''$)

résolue par rapport à t]. Au contraire, la fonction $t' = \varphi(t)$ peut présenter, pour une valeur donnée de t, un nombre fini de déterminations distinctes $t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$, comme on vient de le voir. Portons t' en ordonnées, t en abscisses, et supposons les vitesses relatives très inférieures à c ; la courbe $t' = \varphi(t)$ oscillera de part et d'autre de la droite $t' = t - \frac{r_0}{c}$, où r_0 est la distance moyenne de e' à P. Des parallèles à l'axe des t ne la couperont qu'en un point ; des parallèles à l'axe t', en un ou plusieurs points ; parmi ces dernières, les tangentes à la courbe correspondent aux points où $\frac{dt'}{dt}$ devient infinie, et où deux valeurs t'_i, t'_{i+1} deviennent égales. Si $\frac{d^2 t'}{dt^2}$ reste finie en ce point (c'est-à-dire s'il n'y a pas inflexion), les valeurs de $\frac{dt'_i}{dt}$, $\frac{dt'_{i+1}}{dt}$ y tendront vers des valeurs de signes contraires et très grandes.

Ces considérations sont évidemment générales et s'appliquent même lorsque P est en mouvement, dès que les vitesses relatives sont inférieures à c. Or on a vu [formule (6) obtenue par différentiation de (II)] que

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{u_r}{c}}{1 - \frac{r w'_r}{c^2}}.$$

Le dénominateur s'annule donc et change de signe précisément aux instants où deux valeurs t'_i, t'_{i+1} différentes, correspondant à un même instant de réception, tendent à devenir égales. Or il a été spécifié (§ 2) que l'action de e' sur e est la *somme* des actions correspondant à $t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$. Multiplions et divisons F_x (VI) par $1 - \frac{u_r}{c}$; cette expression s'écrira

$$\frac{dt'}{dt}\Phi,$$

où Φ reste finie et continue pour l'instant critique où $\frac{dt'_i}{dt}$ et $\frac{dt'_{i+1}}{dt}$ deviennent infinis. La somme des termes relatifs à t'_i et t'_{i+1},

$$\frac{dt'_i}{dt}\Phi(t'_i) + \frac{dt'_{i+1}}{dt}\Phi(t'_{i+1}), \tag{34}$$

restera finie [1], car $\Phi(t'_i) = \Phi(t'_{i-1})$, et $\frac{dt'_i}{dt} = -\frac{dt'_{i-1}}{dt}$ pour l'instant critique.

§ 13. — Oscillations hertziennes.

Tout en conservant, comme aux paragraphes précédents, l'hypothèse que les vitesses sont faibles relativement à c, nous allons supposer l'accélération très grande; de tels phénomènes seront ou de très courte durée, ou oscillatoires. Dans les oscillations hertziennes, les vitesses, correspondant à des courants faibles, n'excéderont guère des valeurs de l'ordre de 1^{cm} par seconde, et la distance où l'on peut les étudier peut être évaluée à un nombre peu considérable de longueurs d'onde. Le nombre d'oscillations par seconde varie de 10^8 (correspondant à 3^{m} de longueur d'onde) à 10^{11}. Quant aux amplitudes des électrons, elles sont extrêmement petites, puisque les vitesses restent faibles malgré les très grandes fréquences. Dans ces conditions, la quantité $\frac{r w'_r}{c^2}$ est toujours très petite, et le cas dont il a été question ne se présente pas. En effet, supposons les vibrations sinusoïdales, et soient $|v'|$ la valeur maximum de v', $|w'_r|$ celle de w', n le nombre d'oscillations par seconde,

---

[1] Pour le démontrer rigoureusement, il suffit d'observer que la différentiation de (Π^a) permet d'obtenir le développement de la fonction $t' = \varphi(t)$ dans le voisinage d'un point donné. Pour le point singulier ($t' = \tau'$, $t = \tau$), les méthodes connues donnent un développement suivant les puissances de $\pm\sqrt{t-\tau}$, chacun des signes correspondant à l'une des deux branches t'_i, t'_{i+1} qui se rejoignent en τ'. On a

$$t' - \tau' = A\sqrt{t-\tau} + B(t-\tau) + C(t-\tau)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{A}{2}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} + B + \frac{3}{2}C(t-\tau)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

et (34) sera développable de même et ne contiendra que les puissances entières de $t - \tau'$; les puissances fractionnaires se détruisant, il sera donc fini. Si

$$\Lambda^2 = \frac{c^2 - \dot{u}_r c}{w'^2 - c\left(\frac{dw'}{dt}\right)_r}$$

était infini en (τ, τ'), ce raisonnement ne s'appliquerait plus; mais ces cas sont exceptionnels, et il faut alors tenir compte de l'étendue finie de l'électron : l'*impulsion* qu'il subit reste finie dans tous les cas.

$m\lambda$ la distance maximum où l'on peut observer les ondes ; m n'est guère que de l'ordre de 10 à 100. On aura

$$|r| \leqq m\lambda,$$

soit

$$r \leqq m\frac{c}{n}, \qquad |w'_r| \leqq |w'| \leqq 2\pi n\,|v'|,$$

d'où

$$\left|\frac{rw'_r}{c^2}\right| \leqq m\frac{c}{n}\,\frac{1}{c^2}\,2\pi n\,|v'| = 2\pi m\left|\frac{v'}{c}\right|,$$

nombre, on l'a vu, comparable à 10^{-9} ou 10^{-8}.

Nous avons désigné par R le vecteur dont les composantes sont $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$. On a donc

$$r_x = x - x' - \frac{r}{c}v'_x = \mathrm{R}_x - \frac{r}{c}v'_x,$$

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \mathrm{R}^2 - \frac{2\mathrm{R}\,r v'_\mathrm{R}}{c} + \frac{r^2 v'^2}{c^2},$$

d'où

$$r = \mathrm{R}\left(1 - \frac{v'_\mathrm{R}}{c}\right), \qquad r_x = \mathrm{R}_x - \frac{\mathrm{R}\,v'_x}{c} = \mathrm{R}\left[\cos(\mathrm{R}, x) - \frac{v'_x}{c}\right]$$

aux termes en $\frac{v'^2}{c^2}$ près. Le premier terme de (31) s'écrit donc

$$\frac{ee'\cos(r, x)}{r^2} = \frac{ee' r_x}{r^2} = ee'\frac{\cos(\mathrm{R}, x) - \frac{v'_x}{c}}{\mathrm{R}^2\left(1 - \frac{3v'_\mathrm{R}}{c}\right)}.$$

Cette expression est très sensiblement identique au premier terme de (33). En effet, dans la théorie de Lorentz, le centre d'ébranlement reste fixe par rapport à l'excitateur et au résonnateur lorsque, comme nous le supposons, ceux-ci sont immobiles par rapport à l'éther (les mouvements matériels sont d'ailleurs infiniment lents par rapport aux phénomènes dont il s'agit). Ce centre d'ébranlement coïncide donc avec la position de x', y', z' à un certain instant ; mais l'amplitude des mouvements des électrons étant extrêmement petite, les quantités R_x, R_y, R_z, R sont très sensiblement constantes. *Les termes électrostatiques sont donc sensiblement identiques dans les deux théories.* D'ailleurs, les rapports des grandeurs et directions de r et de R ne diffèrent que

de quantités de l'ordre $\frac{v'}{c}$, c'est-à-dire 10^{-10} ; on peut donc certainement remplacer r et R l'un par l'autre dans les seconds termes des formules (31) et (33), et même dans l'argument $t' = t - \frac{r}{c}$; cette dernière hypothèse revient à identifier des vitesses de propagation et des phases qui sont entre elles dans le rapport de 1 à $1 + 10^{-10}$, c'est-à-dire ne diffèrent que d'une quantité que ces expériences ne sauraient mettre en évidence.

En somme, les deux théories conduiront, pour les oscillations hertziennes, exactement aux mêmes résultats.

§ 14. — Étude des grandes vitesses.

Le cas où la vitesse des électrons est comparable à celle de la lumière ne se présente que pour les rayons β du radium. On a étudié la déviabilité de ces rayons sous l'influence d'un champ électrostatique et sous celle d'un champ magnétique produit par des électro-aimants, c'est-à-dire des courants neutres fermés, dont les électrons ont des vitesses v' très petites par rapport à c. Les accélérations restent toujours petites dans ces expériences.

On peut donc encore développer, dans l'expression (VI) de la force élémentaire, les quantités r, u^2, u_r suivant les formules du n° 3, ces développements supposant petites non les vitesses mais les accélérations des divers ordres. On aura, v étant la vitesse comparable à c, tandis que $\frac{v'}{c}$ est très petit,

$$u^2 = \left(v_x - v'_x - \frac{\rho}{c} w'_x - \ldots\right)^2$$

$$+ \left(v_y - v'_y - \frac{\rho}{c} w'_y + \ldots\right)^2 + \left(v_z - v'_z + \frac{\rho}{c} w'_z - \ldots\right)^2,$$

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{v^2}{c^2} - 2\,\frac{(v_x v'_x - v_y v'_y - v_z v'_z)}{c^2}$$

$$+ \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2\rho}{c^3}(v_x w'_x - v_y w'_y - v_z w'_z) - \ldots.$$

Soit donc $\frac{v}{c} = \beta$ un nouveau vecteur, de longueur comparable à

l'unité ; on aura

$$(35) \qquad \frac{u^2}{c^2} = \beta^2 - 2\left(\beta_x \frac{v'_x}{c} + \beta_y \frac{v'_y}{c} + \beta_z \frac{v'_z}{c}\right)$$
$$+ \frac{v'^2}{c^2} + \frac{2\rho}{c^2}(\beta_x w'_x + \beta_y w'_y + \beta_z w'_z) + \ldots = \beta^2 + \varepsilon,$$

$$(36) \qquad \frac{u_r}{c} = \beta_\rho - \frac{v'_\rho}{c} + \frac{1}{c^2}(\ldots) = \beta_\rho + \eta,$$

$$(37) \qquad r = \rho\left(1 + \frac{\rho w'_\rho}{2c^2}\right) + \ldots.$$

Dans l'expression (VI) de F_x on pourra développer φ, ψ suivant la formule de Taylor dans l'entourage des valeurs $\frac{u_r}{c} = \beta_\rho$, $\frac{u^2}{c^2} = \beta^2$; puisque $\frac{u^2}{c^2}$, $\frac{u_r}{c}$ ne diffèrent de ces valeurs que de quantités très petites ε, η de l'ordre de $\frac{v'}{c}$, $\frac{v'^2}{c^2}$, $\frac{w'}{c^2}$, $\ldots$, on aura

$$\varphi\left(\frac{u_r}{c}, \frac{u^2}{c^2}\right) = \varphi(\beta_\rho + \eta, \beta^2 + \varepsilon)$$
$$= \varphi(\beta_\rho, \beta^2) + \eta \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_\rho}(\beta_\rho, \beta^2) + \varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\beta^2}$$
$$+ \frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta_\rho^2} + \eta\varepsilon \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta_\rho\,\partial\beta^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{(\partial\beta^2)^2} + \eta^3 \ldots,$$

$$(38) \qquad \varphi = \varphi(\beta_\rho, \beta^2) - 2\frac{(\beta_x v'_x + \beta_y v'_y + \beta_z v'_z)}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta^2} - \frac{v'_\rho}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_\rho} + \frac{1}{c^2}(\ldots),$$

$$(39) \qquad \psi\left(\frac{u_r}{c}, \frac{u^2}{c^2}\right) = \psi(\beta_\rho, \beta^2) - 2\frac{(\beta_x v'_x + \beta_y v'_y + \beta_z v'_z)}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\beta^2}$$
$$- \frac{v'_\rho}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\beta_\rho} + \frac{1}{c^2}(\ldots).$$

L'expression (VI) de F_x deviendra ainsi

$$(40) \qquad F_x = \frac{ee'\cos(\rho, x)}{\rho^2}$$
$$\times\left[\varphi(\beta_\rho, \beta^2) - 2\frac{(\beta_x v'_x + \beta_y v'_y + \beta_z v'_z)}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta^2} - \frac{v'_\rho}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_\rho}\right]$$
$$+ \frac{ee'}{\rho^2}\left[\beta_x\beta_\rho\psi(\beta_\rho, \beta^2) - \frac{(\beta_\rho v'_x + \beta_x v'_\rho)}{c}\psi\right.$$
$$- 2\beta_x\beta_\rho\left(\beta_x\frac{v'_x}{c} + \beta_y\frac{v'_y}{c} + \beta_z\frac{v'_z}{c}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\beta^2}$$
$$\left.- \beta_x\beta_\rho\frac{v'_\rho}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\beta_\rho}\right] + \frac{ee'}{c^2}(\ldots).$$

Les termes en $\frac{1}{c^2}$ seront négligeables à côté de ceux du premier ordre ; pour l'action électrostatique ($v' = 0$) il viendra simplement

$$(41)\qquad F_{ex} = \frac{ee'}{\rho^2}\left[\cos(\rho, x)\,\varphi(\beta_\rho, \beta^2) - \beta_x\beta_\rho\psi(\beta_\rho, \beta^2)\right], \qquad F_{ey} = \ldots.$$

Pour obtenir l'action d'un élément ds' d'un courant neutre fermé dont on peut négliger la charge électrostatique, c'est-à-dire pour lesquels les charges positives et négatives E'_1, $-E'_2$ par unité de volume sont sensiblement égales et de signes contraires, nous n'avons qu'à faire la somme des actions des ions positifs et négatifs de ds' sur l'électron e ; soient v'_1, v'_2 les vitesses des ions positifs et négatifs, le conducteur ou l'aimant étant au repos ; on aura

$$J'_x = E_1(v'_{1x} - v'_{2x}) = J'\frac{dx'}{ds'},$$

$$= E_1(v'_{1y} - v'_{2y}) = J'\frac{dy'}{ds'},$$

$$J'\cos(\rho, ds') = E_1(v'_{1\rho} - v'_{2\rho}).$$

Dans la somme des actions des deux espèces d'ions sur e, les termes indépendants de v' étant pris avec des signes contraires s'annulent dans (40), et il reste

$$(42)\qquad dF_x = -\frac{J'\,ds'\,e}{c\rho^2}\left\{ 2\cos(\rho, x)\left(\beta_x\frac{dx'}{ds'} + \beta_y\frac{dy'}{ds'} + \beta_z\frac{dz'}{ds'}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\beta^2} \right.$$
$$- \cos(\rho, x)\cos(\rho, ds')\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_\rho}$$
$$- \left[\beta_\rho\frac{dx'}{ds'} + \beta_x\cos(\rho, ds')\right]\psi(\beta^2, \beta_\rho)$$
$$- 2\beta_x\beta_\rho\frac{\partial\psi}{\partial\beta^2}\left(\beta_x\frac{dx'}{ds'} + \beta_y\frac{dy'}{ds'} + \beta_z\frac{dz'}{ds'}\right)$$
$$\left. - \beta_x\beta_\rho\frac{\partial\psi}{\partial\beta_\rho}\cos(\rho, ds')\right\}.$$

L'action du courant est donc proportionnelle à son intensité. De plus, deux éléments de courant parallèles, de sens contraire et de même intensité n'ont pas d'action. Si donc on considère un feuillet magnétique uniformément aimanté comme étant un système de très petits courants fermés de même intensité, les parties de ces courants situées sur le bord du feuillet auront seules une action

sensible ; l'effet des courants situés à l'intérieur tendra vers zéro avec les dimensions et les distances des courants. Un tel feuillet magnétique sera donc équivalent à un courant fermé circulant sur son contour: c'est exactement le raisonnement que l'on fait en Électrodynamique, et il serait facile de lui donner une forme plus rigoureuse.

De même, F étant fonction linéaire des cosinus directeurs $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$ de l'élément de courant, le principe des courants sinueux se trouve satisfait pour J.

Mais là s'arrête l'analogie avec l'Électrodynamique classique. Ainsi, pour des vitesses faibles (c'est-à-dire β petit), on a vu plus haut que l'action F_x, F_y, F_z d'un courant fermé sur un électron mobile est perpendiculaire à la vitesse de celui-ci. *Il n'en est, en général, plus ainsi pour β comparable à l'unité.* En effet, la composante R de F parallèle à β sera

$$(43)\qquad \begin{aligned} R &= \int\left(\frac{\beta_x}{\beta}\,dF_x + \frac{\beta_y}{\beta}\,dF_y + \frac{\beta_z}{\beta}\,dF_z\right) \\ &= -\frac{Je}{c\beta}\int(A_x\,dx' + A_y\,dy' + A_z\,dz'), \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} A_x &= \frac{\beta_\rho\beta_x f + \cos(\rho, x)F}{\rho^2}, \\ A_y &= \frac{\beta_\rho\beta_y f + \cos(\rho, y)F}{\rho^2}, \\ A_z &= \frac{\beta_\rho\beta_z f + \cos(\rho, z)F}{\rho^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= f(\beta_\rho, \beta^2) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial\beta^2} - \psi - 2\beta^2\frac{\partial\psi}{\partial\beta^2}, \\ F &= \beta_\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_\rho} - \beta^2\psi - \beta^2\beta_\rho\frac{\partial\psi}{\partial\beta_\rho}. \end{aligned}\right.$$

La quantité R ne sera nulle pour *tout circuit fermé* que si $A_x\,dx' + A_y\,dy' + A_z\,dz'$ est une différentielle totale, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{\partial A_x}{\partial y'} - \frac{\partial A_y}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial z'} - \frac{\partial A_z}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial A_z}{\partial x'} - \frac{\partial A_x}{\partial z'} = 0.$$

Or, β^2 est indépendant de x', y', z', et l'on a

$$\frac{\partial\beta_\rho}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\beta_x(x-x') + \beta_y(y-y') + \beta_z(z-z')}{\rho}\right] = \frac{\beta_\rho \cos(\rho, x) - \beta_x}{\rho},$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y'} - \frac{\partial A_y}{\partial x'} = \left[\frac{\beta_x \cos(\rho, y) - \beta_y \cos(\rho, x)}{\rho^3}\right]\left(-\beta_\rho f + \beta_\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \beta_\rho} + \frac{\partial F}{\partial \beta_\rho}\right).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la force soit perpendiculaire à la vitesse sera donc que les expressions f, F, formées au moyen de φ, ψ, satisfassent à l'équation différentielle

$$-\beta_\rho f + \beta_\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \beta_\rho} + \frac{\partial F}{\partial \beta_\rho} = 0. \tag{46}$$

Pour β très petit, f est une constante f_0 et F est égal à $\frac{f_0 \beta_\rho^2}{2}$; la relation est satisfaite.

Quand φ et ψ ne dépendent pas de β_ρ, la relation prend la forme simple $f = 0$.

De même, *l'action d'un solénoïde fermé, ou d'un électro-aimant fermé, n'est pas nulle en général*, à moins qu'une certaine relation différentielle du troisième ordre entre φ et ψ ne soit satisfaite.

Enfin, plus généralement, *la connaissance du champ magnétique en un point ne suffit pas pour déterminer la force qu'éprouvera en ce point un électron en mouvement très rapide*, à moins que les relations énoncées ne soient satisfaites. Cette dernière force n'est déterminée que quand on se donne la disposition des courants (les aimants étant supposés remplacés par les courants équivalents) et par là les valeurs de β_ρ pour les divers éléments de courant.

L'expérience devra donc tout d'abord décider si les diverses lois de l'Électromagnétisme dont il vient d'être question s'appliquent aux rayons β du radium. En partant de la notion de champ, ces questions ne se posent même pas et c'est sans doute pour cela qu'aucune expérience quantitative précise ne leur a encore, à ma connaissance, apporté de réponse. Les belles expériences de M. Kaufmann, entreprises dans un but différent, ne permettent pas d'y répondre, comme on va le voir.

En résumé, la notion de champ ne s'appliquera à l'action que

subissent les rayons β que sous certaines conditions ; nous avons d'ailleurs exposé que cette notion introduit, *en général* (c'est-à-dire les forces et le champ dépendant des vitesses), le mouvement absolu. Les effets ordinaires du champ magnétique n'échappent à cette règle qu'à une certaine approximation près (en négligeant le mouvement de la Terre, etc.).

§ 15. — Expériences de M. Kaufmann [1].

On sait que, dans ces expériences, M. Kaufmann a observé la déviation d'un faisceau de rayons β, dirigés parallèlement à l'axe des x, par un champ électrique parallèle à l'axe des y, produit par un condensateur plan et un champ magnétique de même direction, produit par un électro-aimant ou un aimant permanent. On observait les déviations y, z, perpendiculaires entre elles, produites par l'action combinée des deux champs ; ces déviations dépendent de la vitesse $v = \beta c$ de l'électron en mouvement ou rayon β, et c'est la courbe $y = y(\beta)$, $z = z(\beta)$ (où β n'est pas connu directement, mais joue simplement le rôle de paramètre) que donne l'expérience. Les appareils étaient d'ailleurs symétriques par rapport à l'axe des y, les champs sensiblement homogènes. Nous allons chercher ce que donne, dans ces conditions, la nouvelle théorie.

Action électrostatique. — Les plateaux d'un condensateur étant parallèles au plan des xz, soient y et $a - y$ les distances de l'électron mobile à ces deux plateaux. On a sensiblement

$$\beta_y = \beta_z = 0, \qquad \beta_x = \beta, \qquad \beta_\rho = \beta \cos(\rho, x);$$

soit σ la densité de l'électricité sur les plateaux. Les composantes de la force exercée sur l'électron seront, d'après la formule (41),

$$R_{ex} = e\sigma \int\int [\cos(\rho, x)\varphi(\beta^2, \beta_\rho) - \beta\beta_\rho \psi(\beta^2, \beta_\rho)] \frac{dx'\,dz'}{\rho^2},$$

$$R_{ey} = e\sigma \int\int \cos(\rho, y)\varphi(\beta^2, \beta_\rho) \frac{dx'\,dz'}{\rho^2},$$

$$R_{ez} = e\sigma \int\int \cos(\rho, z)\varphi \frac{dx'\,dz'}{\rho^2}.$$

---

[1] *Göttinger Nachrichten*, 1901, Heft 1; 1902, Heft 5; 1903, Heft 3. *Annalen d. Physik*, t. XIX, 1906, p. 487.

Il est permis de considérer, en première approximation, l'étendue du condensateur comme très grande; les intégrales doivent alors être étendues à tout le plan $x'z'$ et prises d'abord pour $y' = 0$ (premier plateau), puis pour $y' = a$ (second plateau); il faut faire la différence des résultats. Laissons pour l'instant y' indéterminé. Comme nous avons admis au n° 2 que φ et ψ sont fonctions paires de β_ρ, la fonction à intégrer a, dans la première et la troisième intégrale, des valeurs opposées pour les points $(x - x')$, $(z - z')$ et $-(x - x')$, $-(z - z')$; ces intégrales sont donc nulles: la force est parallèle à y par symétrie.

Soit ϑ l'angle que fait ρ avec β, c'est-à-dire avec l'axe des x; on a

$$\rho \cos\vartheta = x - x', \qquad \rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Exprimée au moyen des variables ρ et ϑ, la deuxième intégrale devient

$$\begin{aligned} R_{ey} &= e\sigma \int\!\!\int \frac{y - y'}{\rho^3} \varphi(\beta^2, \beta\cos\vartheta) \left(\frac{\partial x'}{\partial\rho} \frac{\partial z'}{\partial\vartheta} - \frac{\partial z'}{\partial\rho} \frac{\partial x'}{\partial\vartheta} \right) \\ &= e\sigma(y - y') \int\!\!\int \frac{\varphi(\beta^2, \beta\cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 \sin^2\vartheta - (y - y')^2}}. \end{aligned}$$

On obtiendra l'action du quart de plan compris entre les lignes $x' = 0$, $z' = 0$, en intégrant par rapport à ρ de $\rho = \dfrac{y - y'}{\sin\vartheta}$ à $\rho = \infty$, puis de $\vartheta = 0$ à $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$; l'intégrale cherchée sera le quadruple du résultat obtenu.

On a

$$(y - y') \int \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 \sin^2\vartheta - (y - y')^2}} = \text{arc tang} \frac{\sqrt{\rho^2 \sin^2\vartheta - (y - y')^2}}{y - y'}.$$

Pour la limite supérieure $\rho = \infty$, il vient arc tang $= \dfrac{\pi}{2}$ pour $y - y' > 0$ (1er plateau, $y' = 0$) et $-\dfrac{\pi}{2}$ pour $y - y' < 0$ (2e plateau, $y' = a$). La limite inférieure donne arc tang $= 0$; on a donc pour l'ensemble des deux quarts de plateau du condensateur

$$e\sigma\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\beta^2, \beta\cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta.$$

Posons $\cos\vartheta = p$; on a enfin, pour la force totale cherchée,

$$R_{ey} = -4\pi e\sigma \int_1^0 \varphi(\beta^2, \beta p)\,dp = \mathrm{E}e \int_0^1 \varphi(\beta^2, \beta p)\,dp, \tag{47}$$

E étant le champ électrostatique au sens ordinaire. *Dans notre théorie, ce champ n'exerce donc pas, comme chez Lorentz, une force* $e\mathrm{E}$, *mais une force dépendant de la vitesse*

$$e\mathrm{E}f(\beta) = e\mathrm{E}\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - a_1\beta^4 + \ldots\right). \tag{48}$$

Action magnétique. — On a

$$\left\{\begin{aligned} R_{my} = -\frac{e\mathrm{J}}{c}\int \Big\{ & \frac{\beta}{\rho^2}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial\beta^2}\cos(\rho, y)\,dx' - \psi\cos(\rho, x)\,dy'\right] \\ & + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_\rho}\frac{\cos(\rho, y)}{\rho^2} \\ & \times [dx'\cos(\rho, x) + dy'\cos(\rho, y) + dz'\cos(\rho, z)]\Big\}_1'; \\ R_{mz} = -\frac{e\mathrm{J}}{c}\int \Big\{ & \frac{\beta}{\rho^2}\left[2\frac{\partial\varphi}{\partial\beta^2}\cos(\rho, z)\,dx' - \psi\cos(\rho, x)\,dz'\right] \\ & - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_\rho}\frac{\cos(\rho, z)}{\rho^2} \\ & \times [dx'\cos(\rho, x) - dy'\cos(\rho, y) - dz'\cos(\rho, z)]\Big\}_1'. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Les intégrales sont étendues à tous les courants, en y comprenant ceux qui, dans le sens ordinaire, sont équivalents aux masses magnétiques agissantes. Les fonctions φ, ψ ne dépendent que de $\frac{x - x'}{\rho}$ et sont fonctions paires de cet argument. L'électron se meut sensiblement sur l'axe des x ($y = 0$, $z = 0$), et il y a symétrie par rapport à l'axe des y. Changeons donc y en $-y'$, dy en $-dy'$; les actions d'éléments correspondants se détruisent dans la première intégrale R_{my}, celle-ci est donc nulle par symétrie. D'autre part, les changements de vitesse que produisent les forces étant, dans cette expérience, petits par rapport à la vitesse initiale, une action parallèle à celle-ci, qui ne produit par conséquent pas directement une déviation, est négligeable en première approximation : l'action magnétique observée sera donc ici perpendiculaire au champ et à la vitesse, comme le veut la théorie de Lorentz et comme le montre l'expérience. On voit que, dans ces conditions,

les problèmes généraux soulevés plus haut ne sont pas résolus par ces expériences.

Dans ses recherches définitives, M. Kaufmann s'est servi d'aimants permanents en forme de fer à cheval ; on ne peut calculer R_{mz} sans connaître la répartition du magnétisme. Il suffit, pour le but que je me suis proposé ici, de constater que les forces R_{ey} et R_{mz} sont fonctions de β, la première ne dépendant que de la fonction φ, la seconde, en outre, de ψ ; ces deux fonctions sont arbitraires, aux premiers termes près de leur développement pour β petit. Elles produisent des déviations $y = f(\beta)$, $z = F(\beta)$, et il est clair qu'on pourra, par un choix convenable φ et de ψ, représenter l'arc de courbe observé par M. Kaufmann, d'autant plus que, comme il résulte des recherches de ce savant, ses expériences ne permettent précisément pas de déterminer les coefficients des premiers termes des développements en β. La théorie de Lorentz donne

$$y = \frac{A}{\beta'^2\Phi(\beta')}, \qquad z = \frac{B}{\beta'\Phi(\beta')},$$

où A, B sont des constantes, β' désigne le rapport de la vitesse à c, et $m = m_0\Phi(\beta')$ est la masse fonction de la vitesse et se réduisant à m_0 pour $\beta' = 0$. Or on pourra toujours mettre notre solution $y = f(\beta)$, $z = F(\beta)$ sous cette forme nouvelle ; il suffira de poser

$$f(\beta) = \frac{A}{\beta'^2\Phi}, \qquad F(\beta) = \frac{B}{\beta'\Phi},$$

d'où

$$\beta' = \frac{A\,F(\beta)}{B\,f(\beta)}, \qquad \Phi = \frac{B^2 f(\beta)}{A\,F^2(\beta)},$$

c'est-à-dire d'introduire un paramètre nouveau β' et une fonction Φ de ce paramètre, au lieu de β, pour retrouver la forme de Lorentz. Dans l'une et l'autre de ces théories, tout se passera donc comme si la masse était fonction de la vitesse, les valeurs de celle-ci déduites des deux théories étant seules différentes. Une mesure directe de la vitesse, telle que celle qu'a exécutée, pour les rayons cathodiques, M. Wiechert, en se servant d'oscillations hertziennes, ne semble d'ailleurs guère possible. On en conclut ce que nous voulions démontrer :

Les expériences de M. Kaufmann s'expliquent soit en admet-

tant le mouvement absolu avec variabilité de la masse, soit en considérant les masses comme constantes et les mouvements comme relatifs, et admettant que, pour les grandes vitesses, les forces électrodynamiques ne sont plus de simples fonctions linéaires de la vitesse, comme le veut la théorie de Lorentz, mais prennent une forme plus compliquée.

Dans la première Partie, j'ai fait remarquer que, pour des mouvements uniformes, l'action d'un électron e' sur e est une fonction compliquée de sa vitesse v', dans la théorie de Lorentz, et que rien n'autorise à admettre une telle dissymétrie en v et v'.

Il est intéressant de calculer la courbe qu'on obtient lorsque, β étant petit, on s'en tient, dans (VI), aux termes du second ordre, utilisés en Électrodynamique, c'est-à-dire à la formule (13). On a alors

$$\varphi(\beta^2, \beta_\rho) = 1 + \frac{3-k}{4}\beta^2 - \frac{3(1-k)}{4}\beta_\rho^2,$$

$$R_{ey} = eE\left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right), \qquad R_{mz} = e\beta H \qquad (H = \text{champ magnétique}),$$

$$y = \frac{A\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right)}{\beta^2}, \qquad z = \frac{B}{\beta}, \tag{50}$$

d'où

$$y = \frac{A}{2} + \frac{A}{B^2}z^2,$$

A et B étant les constantes déjà définies. k disparaît donc du résultat. Soit

$$\beta' = \frac{\beta}{1 - \frac{\beta^2}{2}}, \qquad \Phi(\beta') = 1 + \frac{\beta'^2}{2} + \ldots;$$

l'électron mobile semblera avoir une masse variable

$$m = m_0\left(1 + \frac{\beta'^2}{2} + \ldots\right).$$

La formule qu'a obtenue M. Lorentz [1], en cherchant à éliminer

[1] *Amsterdam Proceedings*, 1904.

de ses équations le mouvement absolu, est

$$m = m_0(1-\beta'^2)^{-\frac{1}{2}} = m_0\left(1+\frac{\beta'^2}{2}+\ldots\right).$$

Les premiers termes des deux formules coïncident donc.

Pour $m = \text{const.} = m_0$, la théorie de Lorentz donne la parabole

$$(51) \qquad y = \frac{A}{\beta^2}, \qquad z = \frac{B}{\beta},$$

soit

$$y = \frac{A}{B^2}z^2.$$

Il est remarquable que la parabole pour laquelle il y a concordance avec l'observation, comme je l'ai montré dans la première Partie (§ 9), serait obtenue en remplaçant dans (50) $\frac{\beta^2}{2}$ par $\frac{\beta^2}{4}$, et que les paraboles (50) et (51) sont par conséquent à égales distances, comptée sur l'axe des y, de part et d'autre de la courbe observée.

D'une manière générale, on ne peut s'attendre, dans une théorie basée sur le principe de relativité, à ce que les vitesses égales ou supérieures à celle de la lumière présentent des particularités aussi étranges que dans la théorie de Lorentz. Des vitesses relatives très supérieures à c devront être prises en considération pour l'action mutuelle de deux rayons β émis en sens inverses par un grain de radium, et c pourrait même n'être en aucune manière une vitesse critique, ni $\beta = 1$ un point singulier de la courbe.

Comme on l'a vu plus haut, rien n'empêche, dans notre théorie, d'admettre que la réaction d'inertie des électrons soit entièrement d'origine électromagnétique. Si les particules projetées par le radium ne sont pas sphériques, la réaction d'inertie dépend de leur orientation : une même force moléculaire imprimera à des particules différemment orientées des vitesses différentes, et le champ extérieur donnera des déviations différentes ; si la masse est déterminée par un seul paramètre, comme c'est le cas pour l'ellipsoïde de révolution, il semblera que la masse est fonction bien déterminée de la vitesse initiale de la particule par rapport au radium.

On voit combien toute conclusion, dans un sens ou dans un autre, serait prématurée dans ce domaine si peu exploré encore des grandes vitesses.

§ 16. — Gravitation.

Les théories qui précèdent sont-elles applicables à la gravitation, et peut-on admettre que celle-ci se propage avec la vitesse de la lumière et suive les lois que nous avons admises pour l'action mutuelle des charges électriques? La réponse est affirmative : les perturbations sont, comme dans la théorie de Lorentz, du second ordre.

Mais il semble que, de plus, il soit possible de faire disparaître, avec ces nouvelles formules, la différence la plus considérable qui subsiste en Astronomie entre le calcul et l'observation, savoir la rotation lente de l'ellipse décrite par Mercure, rotation qui dépasse de $41''$ d'arc par siècle celle que les perturbations planétaires feraient prévoir.

Prenons comme plan des xy le plan de l'orbite, le Soleil immobile étant à l'origine des coordonnées. On tire de (13) les équations du mouvement

$$
(52)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mu x}{r^3}\left\{1-\frac{3-k}{4c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]-\frac{3(1-k)}{4c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{\mu(k+1)}{2c^2r^2}\frac{dx}{dt}\frac{dr}{dt},\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mu y}{r^3}\left\{1-\frac{3-k}{4c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]-\frac{3(1-k)}{4c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\\
&\quad+\frac{\mu(k+1)}{2c^2r^2}\frac{dy}{dt}\frac{dr}{dt},
\end{aligned}
\right.
$$

où μ est une constante indépendante de la planète considérée, et $r^2=x^2+y^2$ la distance au Soleil. Multipliant par y et $-x$, et ajoutant, on obtient l'équation des aires

$$
\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=\frac{\mu(k+1)}{2c^2r^2}\frac{dr}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right),
$$

ou

$$
y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=\alpha e^{-\frac{(k+1)\mu}{2c^2r}}.
$$

En coordonnées polaires, et en négligeant les puissances de $\frac{1}{c}$ supérieures à la seconde, ceci s'écrit

$$(53) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \alpha \left[1 - \frac{(k+1)\mu}{2c^2 r} \right].$$

Retranchons ensuite de la première et de la deuxième des équations (52) les quantités du second ordre

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{1+k}{2c^2 r} + \frac{(1-k)\mu x}{2c^2 r^2} \left(\frac{x}{r} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{y}{r} \frac{d^2 y}{dt^2} \right)$$

et

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{1-k}{2c^2 r} + \frac{(1-k)\mu y}{2c^2 r^2} \left(\frac{x}{r} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{y}{r} \frac{d^2 y}{dt^2} \right).$$

Si l'on ajoute aux équations ces mêmes quantités où $\frac{d^2 x}{dt^2}$ est remplacé par sa valeur de première approximation $-\frac{\mu x}{r^3}$, et $\frac{d^2 y}{dt^2}$ par $-\frac{\mu y}{r^3}$, on n'aura, en dernière analyse, introduit que des termes en $\frac{1}{c^4}$, absolument négligeables. Multipliant les nouvelles équations obtenues par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, ajoutant et intégrant, on obtient l'équation de l'énergie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\
&\quad - \frac{\mu}{r} \frac{1-k}{2} \left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] \\
&\quad - \frac{\mu}{r} \frac{(1-k)}{2} \left[1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right] - \frac{\mu^2}{2c^2 r^2} = \beta = \text{const.}
\end{aligned}$$

Introduisant les coordonnées polaires, éliminant dt par la relation (53), puis résolvant par rapport à $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$, on obtient, toujours à des termes en $\frac{1}{c^4}$ près,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= -\frac{\alpha^2}{r^2}\left[1 - \frac{\mu(k-1)}{2c^2 r}\right] \\
&\quad + \frac{2\mu}{r}\left[1 - \frac{\mu(2k-1)}{2c^2 r}\right] + 2\beta\left(1 + \frac{\mu k}{c^2 r}\right) \\
&= \left[1 - \frac{\mu(k-1)}{2c^2 r}\right] \\
&\quad \times \left[-\frac{\alpha^2}{r^2} - \frac{\mu^2(2-k)}{r^2 c^2} + \frac{2\mu}{r} + \frac{\beta\mu(k+1)}{c^2 r} + 2\beta\right].
\end{aligned}$$

Les maxima ou minima de r, ou axes de l'ellipse, sont les racines du second facteur du membre de droite : ils ne changent donc pas dans le cours du mouvement ; mais l'ellipse elle-même tourne lentement dans son plan. En effet, soit $\frac{1}{r} = p$; on pourra écrire

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{dp\left[1 - \frac{\mu(k-1)p}{4c^2}\right]}{\sqrt{-C^2p^2 + Bp + A}},$$

$$A = \frac{2\beta}{\alpha^2}, \qquad B = \frac{2\mu}{\alpha^2} + \frac{3\mu(k+1)}{c^2\alpha^2}, \qquad C^2 = 1 - \frac{\mu^2(k+2)}{c^2\alpha^2},$$

$$\varphi - \varphi_0 = \left[1 - \frac{\mu^2(k+5)}{4c^2\alpha^2}\right] \arcsin \frac{2C^2p - B}{\sqrt{B^2 + 4AC^2}}$$
$$+ \frac{\mu(k-1)}{4c^2}\sqrt{-C^2p^2 + Bp + A}.$$

Si l'on part d'une des deux valeurs maxima ou minima de p, correspondant à une racine du radical, on voit que cette même valeur sera reprise, non après une demi-révolution, φ ayant augmenté de π, mais lorsque φ aura augmenté de $\pi\left[1 + \frac{\mu^2(k+5)}{4c^2\alpha^2}\right]$; le terme correctif étant très petit, on aura donc sensiblement une ellipse tournant dans son plan. Soit N le nombre de révolutions par siècle ; l'angle dont aura tourné l'ellipse dans cet espace de temps sera

$$\frac{\mu^2\pi(k+5)}{2c^2\alpha^2}N.$$

Soient

a_0 la distance moyenne de la Terre au Soleil ;
v_0 sa vitesse moyenne sensiblement égale à 30^{km} par seconde ;
a et e la distance moyenne et l'excentricité de la planète considérée.

L'excentricité de la Terre étant négligeable ici, on a

$$\mu = a_0 v_0^2 ;$$

d'ailleurs, on sait par la théorie élémentaire du mouvement elliptique que $\frac{\mu}{\alpha^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}$; l'angle cherché sera donc

$$\frac{\pi(k+5)}{2(1-e^2)}\left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \frac{a_0}{a}N,$$

ce qui donne : pour Mercure $(k+5)\,3'',6$; pour Vénus $(k+5)\,0'',7$; pour la Terre $(k+5)\,0'',3$ par siècle.

On pourra choisir la constante arbitraire k égale à 6,4, ce *qui donne pour Mercure l'anomalie observée* de 41'', pour Vénus 8'', pour la Terre 3'',4. Malgré la faible excentricité de ces orbites, ces dernières anomalies ne semblent pas admissibles ; pour décider de la valeur à donner à k, il faudrait donc reprendre, en tenant compte de la nouvelle perturbation, le calcul des constantes des planètes intérieures (masses et éléments pour $t=0$) et les déterminer à nouveau de manière à obtenir l'accord le plus satisfaisant possible entre le calcul et l'observation. Une influence sur le mouvement de la Lune semble également possible. Ces perturbations ne deviennent d'ailleurs sensibles que quand leurs effets s'ajoutent pendant longtemps.

§ 17. — Remarques générales.

Entre les nouvelles formules et la théorie de Lorentz, il n'y a donc pas de contradiction dans le domaine des faits observés jusqu'ici en Électrodynamique. Il est évident qu'au point de vue de l'élégance mathématique et de la simplicité, l'avantage restera souvent du côté de la théorie de Lorentz ; mais, d'autre part, celle-ci ne peut éviter toujours l'emploi des forces élémentaires, on a même vu que cet emploi est indispensable dans la théorie de la radiation ; dans ces cas, il y aura équivalence. Enfin, aucune déduction ne peut être tirée des équations de Lorentz avant qu'ait été faite la démonstration, souvent assez compliquée, que le mouvement de la Terre n'influe pas sensiblement sur le résultat : ici, l'avantage est de notre côté.

Une des idées les plus fécondes de Maxwell a été l'introduction des courants de déplacement, qui forment, avec les courants de conduction, un système de courants toujours fermés auxquels Maxwell a appliqué les lois électrodynamiques connues (intégrale de Neumann, etc.) ; c'est ainsi qu'il parvient à ses équations. Les développements qui précèdent montrent que cette application constitue une seconde hypothèse : nous avons montré, en effet, qu'à notre point de vue et même à celui de Lorentz, ces lois ne sont applicables qu'aux courants *neutres* et ce dernier point est, pour

les lois d'Ampère par exemple, plus important que l'autre : l'hypothèse de Maxwell revient à l'introduction d'une loi *élémentaire* pour laquelle toute base expérimentale manque.

Notre théorie nécessite de nouveau la distinction des courants ouverts et fermés. Mais si l'on a égard, non pas aux formules mathématiques, mais aux réalités physiques, on trouvera que les deux ordres de phénomènes sont quantitativement et qualitativement si différents, que l'utilité pratique de leur synthèse n'est peut-être pas aussi grande qu'elle le paraît au premier abord.

La formule pour l'action d'un point électrisé mobile sur un autre à laquelle conduit la théorie de Lorentz est très analogue, comme l'a remarqué M. Schwarzschild (¹), à celle de Clausius (²) qui contient également les vitesses absolues. Celui-ci y était parvenu en admettant, entre autres, qu'entre un courant galvanique et une charge électrique au repos il n'y a pas d'action. Cela est très sensiblement vrai pour les courants neutres, comme on l'a vu, mais pourrait être absolument faux dans d'autres cas. Cette hypothèse conduit, chez Clausius comme chez Lorentz, à l'introduction du mouvement absolu.

On a vu que, dans l'expression de la force élémentaire, un facteur k reste indéterminé. Ceci rappelle le résultat analogue d'Helmholtz, et même la formule (25), applicable aux éléments de courant neutres, est identique avec celle d'Helmholtz (³) et se réduit à celle d'Ampère pour $k = -1$, à celle de F. Neumann, Maxwell et Lorentz pour $k = +1$. Les couples qui s'y ajoutent dans la théorie d'Helmholtz manquent toutefois, et ce point est essentiel. De plus, nous savons maintenant que ce n'est que dans le cas où il n'y a pas rayonnement que l'énergie reste constante ; les relations que l'équation de l'énergie entraînait entre les actions d'induction des courants *ouverts* et leurs actions électrodynamiques peuvent cesser dès lors d'être satisfaites. C'est, en effet, ce qui arrive : pour les phénomènes d'induction dans les corps au repos, les équations de Maxwell-Lorentz et d'Helmholtz (⁴) deviennent identiques si $k = 0$, comme l'a remarqué ce dernier. Dans ce

(¹) *Göttinger Nachrichten*, 1903.
(²) *Journal für Math.* (*Crelle*), t. 82, 1877, p. 85.
(³) *Wissenschaft. Abhandl.*, t. I, p. 688. Leipzig, 1882.
(⁴) *Loc. cit.*, p. 573, équation (3 *b*).

cas, la résistance, la force électrostatique et les accélérations jouent seules un rôle ; les formules de Lorentz sont alors identiques aux nôtres, qui correspondent également à $k = 0$. Quant aux conséquences relatives à la stabilité, exigeant $k \geqq 0$, elles ne peuvent s'appliquer qu'à la valeur de k figurant dans les phénomènes d'induction (il suffit, pour le voir, de supposer les courants sensiblement nuls) ; nos formules y satisfont donc *toujours*, et notre paramètre k reste *entièrement* indéterminé.

Il est intéressant de remarquer que, dans les corps au repos, *les phénomènes d'induction en circuit fermé proviennent uniquement de la vitesse finie de propagation* dans notre théorie. En effet, si l'on se reporte aux développements du paragraphe 3, on voit qu'en ce qui concerne les termes du second ordre cette vitesse finie n'introduit que des accélérations, et ce sont celles-ci qui déterminent les phénomènes d'induction, car le terme du second ordre $\frac{w'_r - w'_\rho \cos(\rho, x)}{c^2 \rho} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{w'_\rho}{c^2}$ qui ne provient pas de ces développements donne une force électromotrice nulle pour un circuit fermé. On sait que, dans l'hypothèse des actions à distance, on a déduit des forces électrostatiques et électrodynamiques les phénomènes d'induction, en partant de l'équation de l'énergie : dans notre théorie elles se déduisent de la propagation.

On pourrait déterminer le facteur k en adoptant la théorie des métaux, proposée par MM. Riecke et Drude, suivant laquelle la vitesse des électrons dans leur mouvement moléculaire irrégulier serait très supérieure à celle des ions positifs, et se chiffrerait par dizaines ou centaines de kilomètres à la seconde. Soient

$d\tau'$ un élément de volume du métal ;

$E' d\tau'$ la charge totale des électrons de cet élément ;

v' leur vitesse moyenne.

Le corps n'étant pas électrisé, l'action de $d\tau'$ sur une charge e située en xyz sera par symétrie, vu l'irrégularité des mouvements, parallèle à r, et l'équation (VI) donne pour cette force

$$-\frac{e E' \, d\tau}{2 c^2 r^2} \left[\frac{3-k}{2} v'^2 - \frac{3(1-k)}{2} v'^2_r - (k+1) v'^2_r \right].$$

Or, on a, en moyenne,

$$v'^2_x = v'^2_y = v'^2_z = v'^2_r = \frac{v'^2}{3};$$

la force est donc

$$(54)\qquad -\frac{e\mathrm{E}'\,d\tau'\,v'^2(2-k)}{6c^2r^2}.$$

Tout se passera comme si le corps portait une charge électrique $-\frac{\mathrm{E}'(2-k)}{6}\left(\frac{v'}{c}\right)^2$, proportionnelle, comme v', à la température absolue, et très considérable; cela ne pouvant pas être, *il faudrait que k fût égal à deux*. Il est vrai que, si une telle action existait, il ne serait plus guère possible de démontrer, ni même sans doute d'admettre, le théorème de Boltzmann relatif à la répartition de l'énergie entre les coordonnées indépendantes, sur lequel est fondée l'hypothèse de valeurs considérables de v'. Si les vitesses moléculaires des ions positifs et négatifs étaient, au contraire, sensiblement égales, la force (54) cesserait d'exister, sauf peut-être pour les phénomènes électrothermiques.

On a vu que la théorie nouvelle représente bien les oscillations hertziennes. Les particules fictives sont alors distribuées périodiquement dans le temps et dans l'espace; cette distribution provoque à son tour des oscillations d'autres ions ou systèmes d'ions: la combinaison de ces actions par interférence, c'est-à-dire par simple superposition, donne alors lieu aux divers phénomènes de réflexion, réfraction, etc.

Lorsqu'on peut considérer les vitesses et l'amplitude des accélérations des ions comme infiniment petites, la concordance entre les formules de Lorentz et les miennes, démontrée pour les oscillations hertziennes, continue à exister quelle que soit la fréquence: avec cette restriction, toutes deux représenteraient les phénomènes d'Optique. Mais lorsque les vitesses interviennent, par exemple dans l'expérience de Fizeau sur l'entraînement des ondes, l'accord cesse : nos formules exigeront, comme celles de Hertz, l'entraînement total. J'ai dit dans l'Introduction qu'on peut supprimer la difficulté en admettant une certaine réaction des charges électriques sur le mouvement des particules.

Remarquons, en terminant, que notre loi de propagation concilie sans effort le phénomène de l'aberration et l'expérience de Michelson, qui semblent contradictoires dans la théorie de l'éther. En effet, dans la seconde expérience, les sources de lumière étant

entraînées dans le mouvement de la Terre, la vitesse de leur lumière par rapport à celle-ci a une autre valeur que la vitesse de la lumière des étoiles, qui est indépendante du mouvement de la Terre ; l'explication si simple que donnait de l'aberration la théorie émanative de la lumière subsistera dans ses traits essentiels.

XIX.

RECHERCHES CRITIQUES

SUR LES

THÉORIES ÉLECTRODYNAMIQUES

DE CL. MAXWELL ET DE H.-A. LORENTZ.

Archives des Sciences physiques et naturelles, 4e période, t. XXVI, août 1908, p. 209-236.

L'histoire des idées nouvelles introduites par Maxwell dans la science de l'électricité et des théories qui en dérivent constitue certainement un des chapitres les plus intéressants, surtout au point de vue psychologique, de l'histoire des sciences. On sait avec quelle répugnance les esprits, habitués à la clarté limpide qui donnait aux théories classiques de la Physique mathématique une si haute valeur esthétique, ont admis ces idées nouvelles, perturbatrices de l'ordre établi, et qui semblaient, il faut bien l'avouer, étrangement confuses à première vue. C'est de 1856 que date la première publication de Maxwell, « On Faraday's Lines of Force »; trente ans plus tard encore, il fallut toute l'autorité d'un Helmholtz pour obtenir que la théorie nouvelle fût, non pas admise, mais du moins trouvée digne de quelque intérêt. Ce furent les expériences de Hertz et de ceux qui l'ont suivi qui, en démontrant l'identité de la lumière et des oscillations électriques, et confirmant ainsi les vues géniales de Maxwell, brisèrent les dernières résistances et donnèrent à cette théorie droit de cité en Physique. On reconnut ensuite que l'origine des obscurités de l'œuvre de Maxwell résulte en grande partie de ce qu'on y trouve réunies deux tendances très

différentes : celle d'une tentative d'explication des actions électriques par les propriétés du milieu qui en est le véhicule (explication qui conduit Maxwell à des hypothèses accessoires diverses et où, malgré ses efforts, il a complètement échoué en ce qui concerne l'électrostatique), et celle d'une description purement phénoménologique au moyen d'équations aux dérivées partielles et d'une hypothèse sur l'énergie électromagnétique, et où interviennent certains vecteurs qui caractérisent l'état électrique et magnétique du corps. Il n'y a qu'à choisir cette seconde méthode pour être à l'abri de bien des difficultés.

La théorie de Maxwell, étendue par Hertz aux corps en mouvement, ne s'accorde pas avec certaines expériences optiques (aberration, expérience de Fizeau, etc.), ni avec celles d'Eichenwald sur l'action des diélectriques mobiles. La forme nouvelle que H.-A. Lorentz donna à la théorie de Maxwell, au contraire, est en parfait accord avec ces expériences ; de plus, en reprenant l'hypothèse de Fechner et de Weber, que tout courant électrique est un courant de convection, c'est-à-dire est dû au transport de l'électricité, hypothèse que les recherches récentes confirment de plus en plus, il simplifia considérablement les équations ; la constitution atomique qu'il attribua à l'électricité permet une vue plus claire et plus précise des phénomènes. Enfin, en considérant l'éther comme immobile et présent même à l'intérieur des atomes, il supprima une indétermination de la théorie de Maxwell qui n'avait pu être corrigée jusqu'alors, indétermination résultant des mouvements de l'éther, qu'exigeait aussi, sans les préciser suffisamment, la théorie de Hertz, mais qu'aucune expérience n'avait jamais pu mettre en évidence. Enfin, la compénétrabilité réciproque et complète de l'éther et de la matière explique que les corps se meuvent à travers l'éther sans éprouver de résistance, et que le « vent d'éther » de 30^{km} à la seconde qui, selon Fresnel et Lorentz, traverse la terre emportée dans son mouvement autour du Soleil, n'ait jamais pu être mis en évidence, même par les expériences les plus délicates.

En réduisant ainsi la théorie de Maxwell à son expression la plus simple, et en supprimant bien des difficultés mathémathiques, M. H.-A. Lorentz a comblé l'abîme qui séparait la théorie de Maxwell des théories classiques, fondées sur la notion d'action à

distance, et précisé les rapports réciproques des équations de Weber et de Clausius d'une part, de celles de Maxwell et des siennes d'autre part. Ce rapport est, comme on le verra, bien plus étroit qu'on n'aurait cru au premier abord.

Mais la théorie ainsi simplifiée présente un autre avantage : c'est celui de permettre une critique plus rigoureuse des principes sur lesquels elle s'édifie. Ces principes sont de diverses sortes. Ce sont, d'abord, les bases expérimentales de la théorie : l'expérience, qui semble à première vue avoir si pleinement confirmé la théorie, n'aurait-elle pas, sans qu'on s'en doutât, porté toujours sur certains points en laissant d'autres, tout aussi importants, dans l'ombre ? Quelles sont les modifications qu'on pourrait apporter aux formules de Lorentz sans toucher à aucun fait d'expérience ?

En second lieu, quelle est la signification *vraie* des vecteurs force électrique E, force magnétique H, qui entrent dans les équations ? Et comment se fait le passage de celles-ci aux faits d'expérience qu'elles doivent représenter ? Des questions analogues se sont posées, on le sait, pour la Mécanique, et n'ont reçu leur solution que bien récemment. Or, par la notion de masse électromagnétique, par l'impuissance où la théorie se trouve d'expliquer les phénomènes par les propriétés mécaniques de l'éther, a Physique moderne a été amenée à concevoir inversement une or gine électromagnétique des lois de la mécanique, et à faire ains de l'Electrodynamique le pivot d'une conception nouvelle de la nature, remplaçant l'ancienne conception mécanique. Il est donc particulièrement important qu'aucun nuage ne voile les fondements logiques de ce vaste édifice intellectuel.

On sait que, parmi ces bases, se trouve l'hypothèse d'un système absolu de coordonnées et que l'expérience de Michelson et Morley, et d'autres plus récentes, ont sur ce point donné un démenti formel à la théorie : comme en Mécanique, la translation uniforme d'un système ne semble pas avoir d'influence sur les phénomènes optiques et électromagnétiques qui s'y passent. MM. Lorentz, Einstein, Poincaré et d'autres se sont donc demandé quelles hypothèses nouvelles il faudrait introduire pour rendre raison de ce fait, *sans toucher aux équations fondamentales*. Il se trouva qu'il faut renoncer à la notion classique d'un temps universel ; faire de la simultanéité une notion toute relative, supprimer la conception de

l'invariabilité de la masse, supprimer celle de corps rigides et supprimer les axiomes de la cinématique, le parallélogramme des vitesses, etc. Lorsqu'un grain de radium émet dans deux sens opposés des rayons β de 250000 km : sec. de vitesse, on ne dira plus que la vitesse relative de ces rayons est de 500000 km : sec., mais elle sera égale à 294000 km : sec. De même, deux temps égaux pour un observateur A ou deux événements simultanés ne le seront plus pour un observateur B, mobile par rapport à A. Et, chose curieuse et digne de remarque, alors que, il y a peu d'années, on aurait cru suffisant, pour réfuter une théorie, de montrer qu'elle entraîne seulement l'une ou l'autre de ces conséquences : à l'heure qu'il est, les équations de Maxwell sont considérées comme si absolument intangibles, que ces conséquences n'ont effrayé personne. Plutôt que de conclure que les équations ont besoin d'être modifiées plus ou moins profondément, on se décide à sacrifier la cinématique, la notion de temps, etc. Après avoir ignoré plus ou moins systématiquement, pendant trente ans, une théorie féconde, nous tombons dans l'extrême opposé. Ces équations méritent-elles vraiment une confiance si excessive ?

La réponse est nettement négative, et je me propose de présenter ici un résumé des critiques auxquelles donne lieu la théorie de Maxwell et de Lorentz et des incertitudes expérimentales qu'elle comporte. Le lecteur trouvera dans un autre Mémoire [1] le détail des démonstrations.

Rappelons d'abord, en quelques mots, les équations fondamentales de M. Lorentz. Soient H le vecteur magnétique, E le vecteur (ou force) électrique, c la vitesse de la lumière, $\rho(x, y, z, t)$ la densité électrique en un point x, y, z à l'instant t, v la vitesse de cette charge liée à un ion ou électron ; enfin désignons par A_l la composante d'un vecteur A dans la direction l. On a

$$
(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathrm{H}_z}{dy} - \frac{d\mathrm{H}_y}{dz} &= \frac{1}{c}\frac{d\mathrm{E}_x}{dt} + 4\pi\rho\frac{v_x}{c}, \\ \frac{d\mathrm{H}_x}{dz} - \frac{d\mathrm{H}_z}{dx} &= \frac{1}{c}\frac{d\mathrm{E}_y}{dt} + 4\pi\rho\frac{v_y}{c}, \quad \ldots, \end{aligned} \right.
$$

---

[1] W. Ritz, *Recherches critiques sur l'Électrodynamique générale* (*Œuvres*, XVIII, p. 317). Consulter aussi un article de l'auteur intitulé *Du rôle de l'éther en Physique* (*Œuvres*, XX, p. 447.)

et

$$\text{(II)} \quad \frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} = \frac{-1}{c}\frac{dH_x}{dt}, \qquad \frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} = \frac{-1}{c}\frac{dH_y}{dt}, \qquad \ldots,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} = 4\pi\rho,$$

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dH_x}{dx} + \frac{dH_y}{dy} + \frac{dH_z}{dz} = 0,$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho v_x)}{dx} + \frac{d(\rho v_y)}{dy} + \frac{d(\rho v_z)}{dz} = 0.$$

Le champ ainsi créé dans l'éther exerce sur l'élément de charge $\rho\, d\tau$ la force mécanique représentée par le vecteur $F\rho\, d\tau$, où

$$\text{(VI)} \quad F_x = E_x + \frac{1}{c}(v_y H_z - v_z H_y), \qquad F_y = E_y + \frac{1}{c}(v_z H_x - v_x H_z), \qquad \ldots$$

M. Lorentz considère uniquement une certaine intégrale particulière du système I à V, qui s'obtient par la considération des « potentiels retardés ». On démontre, en effet, que toute intégrale de ce système peut s'écrire sous la forme

$$\text{(VII)} \qquad E_x = -\frac{d\Phi}{dx} - \frac{1}{c}\frac{dA_x}{dt}, \qquad E_y = -\frac{d\Phi}{dy} - \frac{1}{c}\frac{dA_y}{dt}, \qquad \ldots$$

$$\text{(VIII)} \qquad H_x = \frac{dA_z}{dy} - \frac{dA_y}{dz}, \qquad H_y = \frac{dA_x}{dz} - \frac{dA_z}{dx}, \qquad \ldots,$$

les fonctions Φ (potentiel scalaire) et $A_x\, A_y\, A_z$ (composantes du potentiel vecteur) étant continues avec leurs dérivées premières dans tout l'espace, s'annulant à l'infini, et satisfaisant aux équations

$$\text{(IX)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{d^2\Phi}{dt^2} - \Delta\Phi = 4\pi\rho,$$

$$\text{(X)} \quad \frac{1}{c^2}\frac{d^2 A_x}{dt^2} - \Delta A_x = \frac{4\pi\rho v_x}{c}, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{d^2 A_y}{dt^2} - \Delta A_y = \frac{4\pi\rho v_y}{c}, \qquad \ldots,$$

$$\text{(XI)} \qquad \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Les fonctions

$$\text{(XII)} \qquad \Phi(x, y, z, t) = \int\int\int \frac{[\rho']\, d\tau'}{r},$$

$$\text{(XIII)} \quad A_x = \frac{1}{c}\int\int\int \frac{[\rho' v'_x]}{r}\, d\tau', \qquad A_y = \int\int\int \frac{[\rho' v'_y]}{r}, \qquad \ldots$$

sont des intégrales *particulières* du système IX, X, XI : elles ont la forme de potentiels newtoniens, avec cette différence qu'au lieu de prendre la valeur de ρ au point $x'y'z'$ à l'instant t, il faut le prendre à l'instant *antérieur* $t - \frac{r}{c}$, où r est la distance des points xyz, $x'y'z'$; c'est ce qu'avec M. Lorentz nous indiquons par la notation $[\rho']$, $[\rho' v'_x]$, etc. ; on a plus généralement

$$[f] = f\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right).$$

Le champ est dès lors complètement déterminé, et, en introduisant ces valeurs dans VII, VIII et VI, on obtient une expression analogue, c'est-à-dire une intégrale triple étendue à des « forces retardées », expression assez compliquée, et que nous n'écrirons pas, mais qui exprime la force subie par un point électrique de charge égale à l'unité, au moyen d'actions Élémentaires analogues à celles que l'on considérait dans l'ancienne électrodynamique, à la notion de transmission non instantanée près, qu'on retrouve d'ailleurs chez Gauss. De cette formule résulte, dans le cas où deux électrons sont à une distance finie l'un de l'autre, et sous certaines conditions générales qui sont ici sans importance, l'expression suivante [1] de la force qu'exerce l'électron e' dont la vitesse est v'_x, v'_y, v'_z, et l'accélération w'_x, w'_y, w'_z, sur l'électron e, de vitesse v :

$$\text{(XIV)} \quad F_x = ee' \left\{ K_x + \frac{1}{c}\left[\left(v_x K_x + v_y K_y + v_z K_z\right)\cos(rx) - v_r K_x\right]\right\};$$

où K est la force électrique en x, y, z et a pour expression

$$\text{(XV)} \quad K_x = -\frac{w'_r}{c^2 r\left(1 - \frac{v'_r}{c}\right)^2} - \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2} + r\frac{w'r}{c^2}}{r^2\left(1 - \frac{v'_r}{c}\right)^2}\left[\cos rx - \frac{v'_x}{c}\right], \quad K_y = \ldots$$

La distance r est dirigée dans le sens de e' à e et les quantités v', w' doivent être prises à un instant antérieur t' tel que l'onde émanée

---

[1] Cette expression a été donnée par K. Schwarzschild, *Göttinger Nachr. Math. physik. Klasse*, 1903, p. 126; voir aussi H. Poincaré, *Rendiconti del Circ. math. di Palermo*, t. XXI, p. 129 (1906), et P. Langevin, *Journal de Physique*, 1904.

de e' à cet instant atteigne e à l'instant t. Les coordonnées x', y', z' de e', x, y, z de e et leurs dérivées, les vitesses et les accélérations étant des fonctions bien déterminées du temps, l'instant d'émission t' est donné en fonction implicite de t par l'équation

$$(\text{XV}\,a)\quad c^2(t-t')^2=[x(t)-x'(t')]^2+[y(t)-y'(t')]^2+[z(t)-z'(t')]^2.$$

Dans le cas où les vitesses sont très inférieures à celle de la lumière, et où les changements ne sont pas trop rapides (états quasi-stationnaires), c'est-à-dire dans la plupart des cas qui se présentent en électrodynamique (en exceptant les oscillations hertziennes et les expériences de M. Kaufmann sur les rayons β), on peut développer une fonction telle que $f\left(t-\frac{r}{c}\right)$ par la formule de Taylor

$$f\left(t-\frac{r}{c}\right)=f(t)-\frac{r}{c}f'(t)+\frac{r^2}{2c^2}f''(t)-\ldots$$

et négliger les termes ayant $\frac{1}{c^3}$ en facteur. On obtient alors l'action élémentaire exercée par e' sur e sous la forme d'une action à distance, ρ étant la distance et v, v', w' les vitesses et accélérations *actuelles* de e et e' :

$$(\text{XVI})\quad F_x=ee'\left\{\frac{\cos(\rho,x)}{\rho^2}\left(1+\frac{v'^2-3v_\rho'^2-2v_xv'_x-2v_yv'_y-2v_zv'_z}{2c^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{v_xv'_\rho}{\rho^2c^2}-\frac{w'_x-w'_\rho\cos(\rho,x)}{2\rho c^2}\right\},\qquad F_y=\ldots.$$

Cette forme est particulièrement propre à la discussion et à une comparaison avec les théories classiques.

Ce qui vient d'être dit de la théorie de Lorentz suffira pour permettre au lecteur de s'orienter sur les critiques qui doivent être adressées à cette théorie.

Et d'abord, comme il a été dit plus haut, M. Lorentz ne considère que les intégrales particulières XII et XIII du système d'équations aux dérivées partielles IX, X et XI; par hypothèse, il écarte toute autre intégrale. Remarquons l'importance fondamentale de cette restriction. Par opposition aux phénomènes mécaniques, les phénomènes électromagnétiques sont en général irréversibles à cause de la radiation. Mais les équations de Lorentz ne changent pas quand on y change le signe du temps : elles contiennent l'affir-

mation de la réversibilité. Au contraire, dans les potentiels retardés et les actions élémentaires XIV, les directions positive et négative du temps jouent des rôles tout différents. On y a *introduit une vitesse dont il est, par hypothèse, impossible* de changer le sens : c'est la vitesse avec laquelle les ondes *s'éloignent* constamment des corps qui les ont émises : c'est de là que découle l'irréversibilité des phénomènes électromagnétiques. Or, on vérifie facilement que le système IX, X et XI admet une infinité d'autres intégrales que XII et XIII, satisfaisant aux conditions de continuité et aux conditions à l'infini : l'intégrale générale comporte, en effet, deux fonctions arbitraires. Parmi ces intégrales, les unes correspondent à des ondes convergentes : au lieu de l'argument $t - \frac{r}{c}$ elles dépendent de l'argument $t + \frac{r}{c}$ et ont, du reste, la forme XII et XIII : ces ondes viennent donc de l'infini et convergent uniquement vers les points où se trouvent des charges électriques, de même que les potentiels retardés correspondent uniquement à des ondes qui s'éloignent de tels points. D'autres intégrales, au contraire, peuvent être considérées comme correspondant à des ondes qui convergent vers des points de l'éther ou s'en éloignent. Or, on démontre que toutes ces ondes sont physiquement absurdes, car elles entraînent la possibilité d'un perpetuum mobile. En particulier, si dans XII et XIII on change $t - \frac{r}{c}$ en $t + \frac{r}{c}$, c'est-à-dire si l'on change le signe de c, on vérifie sans peine que le signe du vecteur radiant de Poynting change. Puisque la première solution correspond à des corps qui *perdent* de l'énergie lorsqu'ils rayonnent (c'est-à-dire lorsqu'ils contiennent des particules animées de mouvements non uniformes), la seconde correspond à un *gain d'énergie*, et cette énergie n'est perdue par aucun autre corps, elle vient de l'infini, et est fournie uniquement par l'éther, réservoir inépuisable d'énergie électromagnétique. Or, un système qui, dans de telles conditions, gagne de l'énergie est un perpetuum mobile. *Les équations de Maxwell et de Lorentz admettent donc une infinité de solutions satisfaisant à* toutes *les conditions de la théorie, mais incompatibles avec l'expérience.*

Il est donc certainement indispensable de faire, soit sur l'état initial, soit sur les conditions à l'infini, des hypothèses supplémen-

taires qui écartent d'une manière absolument générale et complète toute autre solution que XII et XIII. Or, il semble que cela soit impossible sans renoncer aux bases mêmes de la théorie. J'ai montré, en effet (*loc. cit.*, p. 166 et suiv.), que la seule condition admissible et suffisante est que les formules XII et XIII soient vérifiées pour l'état initial à l'instant $t = t_0$ et pour l'instant consécutif $t_0 + dt$. Toutes les autres hypothèses proposées jusqu'ici, en particulier l'hypothèse faite par Poincaré, Abraham et d'autres, que les champs sont nuls à grande distance pour l'instant initial t_0 sont inadmissibles; la dernière, par exemple, conduit pour $t < t_0$ à des ondes *uniquement convergentes*. Mais exiger qu'aux instants t_0 et $t_0 + dt$ le champ corresponde aux formules XII, XIII, c'est exprimer une condition qui n'a pas de sens, surtout dans les idées de Maxwell. Celui-ci, en effet, considérait comme un point essentiel de sa doctrine qu'elle n'entraîne pas la considération des actions élémentaires et de l'origine du champ, et qu'elle n'a à se préoccuper que de l'entourage immédiat du point considéré. On voit qu'il n'en est rien et que, pour éliminer les solutions physiquement impossibles de ces équations, il ne reste qu'à adopter *a priori* les formules des potentiels retardés, qui distinguent les actions élémentaires comme les théories classiques, et à vérifier qu'elles satisfont aux équations. Ces actions élémentaires peuvent donc complètement remplacer les équations aux dérivées, tandis que la proposition inverse n'est pas vraie. *Les équations aux dérivées partielles sont essentiellement impropres à exprimer l'*ensemble *des lois de la propagation des actions électriques et lumineuses*.

Mais adoptons la formule des potentiels retardés. Quelle est la signification des vecteurs E, H, qui semblent être des conceptions si essentielles de la théorie? Je dis que ces vecteurs s'éliminent complètement et ne jouent que le rôle d'une construction mathématique utile dans un certain nombre de cas particuliers [1]. En effet, sans connaître la signification de E et H, on peut par

---

[1] Ordinairement, on définit E comme force mécanique s'exerçant sur l'unité de charge en un point, cette charge étant en repos par rapport à l'éther. Or, nous ne savons réaliser cette condition; la définition doit donc être rejetée. En réalité, on n'observe jamais que F, et l'on en déduit E, H par VI; ces vecteurs sont définis par les équations, à quelque point de vue qu'on se place.

hypothèse intégrer les équations au moyen de XII, XIII; on n'aura qu'à introduire ces valeurs dans VII, VIII, VI pour obtenir la quantité F (ou force mécanique exercée sur l'unité de charge) exprimée comme somme d'actions élémentaires exercées par les autres éléments de la charge. Or, F s'élimine lui-même, car le repos et le mouvement de l'électron ou du système électrisé est, par hypothèse (qu'il existe ou non des masses réelles), déterminé par le principe d'Alembert

$$\text{(XVII)} \qquad \sum \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} - F_x - P_x \right) \delta x + \ldots = 0,$$

où l'on suppose F_x remplacée par sa valeur donnée par les actions élémentaires et où P représente la résultante des forces non électriques. Or, c'est seulement ce mouvement ou ce repos qui font l'objet de l'expérience ; le champ dans l'éther pur ne joue jamais de rôle. En effet, pour connaître le champ en un point, nous sommes obligés d'y placer une charge électrique. Il en serait autrement si E, H, modifiant l'éther, le mettaient en mouvement ou changeaient ses propriétés, comme le supposait Maxwell. On pourrait alors, par exemple par des interférences d'ondes lumineuses, mettre en évidence ces modifications sans placer une charge au point considéré. De nombreuses expériences entreprises dans ce sens ont constamment donné des résultats négatifs ; l'hypothèse de tels mouvements n'a, d'autre part, conduit à aucune explication mécanique des lois électrodynamiques. M. Lorentz et avec lui beaucoup de physiciens ont donc été amenés à en faire abstraction.

Nous voyons donc qu'en se plaçant uniquement au point de vue des faits, on peut se passer complètement des notions de champ électrique et magnétique et des équations aux dérivées partielles, avec leurs conditions de continuité : ces éléments sont insuffisants, nous l'avons vu, pour déterminer la solution ; ce sont les actions élémentaires, ou plus exactement l'équation XVII, et non les équations aux dérivées partielles, qui sont l'expression complète et adéquate de la théorie de Lorentz. Les premières ont d'ailleurs le grand avantage de ne contenir que des relations de temps et d'espace, avec certains coefficients invariables nommés charges électriques. La notion de force s'en élimine complètement.

Or, comme l'a montré M. Schwarzschild (*loc. cit.*), ces actions

élémentaires se rattachent de la façon la plus immédiate aux théories classiques. Clausius avait indiqué une formule qui exprime, dans l'hypothèse des actions à distance, l'action d'une charge en mouvement sur une autre (formule analogue à la célèbre formule de Weber, mais qui part de la considération de mouvements absolus) ; il suffit d'y introduire la loi de propagation de la lumière, pour obtenir la formule de Lorentz. Si l'on songe que cette même idée était déjà venue à Gauss et à Riemann, on s'étonnera de voir combien, sous ce rapport, la science s'est éloignée du développement en ligne droite, et par quels chemins détournés, par quelles broussailles logiques elle a passé pour revenir si près de son point de départ.

Mais, à suivre ces chemins détournés, elle a gagné sous bien des rapports. Elle a appris à concevoir la lumière comme un phénomène électromagnétique, et cette conception fondamentale a modifié profondément l'Optique elle-même. Car tout ce qui a été dit plus haut des phénomènes électriques s'appliquera à l'Optique. L'éther, les équations aux dérivées partielles pourront être considérés comme secondaires ; en réalité, ce qui s'observe, ce ne sont que des actions élémentaires entre les ions ou électrons de la source de lumière, ceux de l'appareil optique et ceux de la rétine ou de la plaque photographique. Tous les phénomènes optiques dérivent de là par le principe de superposition.

L'éther, qui semblait une conception essentielle de la théorie, s'est dérobé à toute expérience, et, d'étape en étape, il a fallu réduire son rôle à celui d'un système de coordonnées absolues, c'est-à-dire indépendantes de la matière ordinaire, système par rapport auquel il faut mesurer les vitesses des ondes et des électrons. Faut-il s'étonner que l'expérience n'ait pas voulu de ce fantôme mathématique et que, contrairement aux formules de Lorentz, le mouvement absolu ne semble pas jouer de rôle en Physique ?

Mentionnons, en passant, d'autres objections auxquelles donne lieu la notion de l'éther telle qu'elle est généralement admise par les physiciens modernes : la répartition et le mouvement de l'énergie restent, dans une large mesure, arbitraires ; il existe même plusieurs solutions *simples* du problème (*loc. cit.*, p. 172-179) ; de plus, en supprimant le mouvement de l'éther, on a supprimé le principe de l'action et de la réaction, alors que d'autres

images que l'on peut se faire de la propagation des ondes permettent de sauvegarder ce principe, comme on le verra plus loin. Enfin, la notion de champ ne peut s'appliquer à la gravitation (*loc. cit.*, p. 179), comme l'a remarqué Maxwell lui-même : l'éther devrait se trouver en équilibre instable, à cause du signe négatif de l'énergie de gravitation. Cette notion de champ ne saurait donc constituer une base générale capable de remplacer la Mécanique [1].

Les formules XIV, XV des actions élémentaires de charges ponctuelles qui, d'après ce qui vient d'être dit, résument la théorie de Lorentz, contiennent les vitesses absolues soit explicitement, soit par la loi de propagation XV*a*. Puisque, jusqu'ici, les vitesses relatives seules ont joué un rôle dans l'expérience, il est évident, *a priori*, qu'il doit être possible, sans entrer en contradiction avec les faits observés, d'apporter des changements importants à ces formules, en ce qui concerne les vitesses, c'est-à-dire que ces formules sont *hypothétiques* dans une large mesure. Pour préciser ces changements, considérons d'abord les phénomènes quasi-stationnaires où la formule XVII s'applique. Il n'a jusqu'ici été possible d'observer les actions électrodynamiques ou électromagnétiques qui dépendent des vitesses des ions que dans le cas où le champ magnétique est dû à un courant fermé ou sensiblement fermé, et où certaines vitesses sont négligeables par rapport à d'autres. Les expériences sur l'induction par le mouvement, sur les rayons cathodiques, celles de Rowland, d'Eichenwald, etc., appartiennent à cette catégorie. On trouve alors que dans XVI :

1° les termes en v'^2, ${v'_\rho}^2$, introduits par le développement en séries de $f\left(t-\frac{r}{c}\right)$, restent sans influence sensible;

2° aux termes

$$\frac{ee'}{\rho^2 c^2}\left\{-[v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z]\cos\rho x + v'_x v_\rho\right\} = f_x. \quad \ldots.$$

---

(1) Je ne puis exposer ici les difficultés auxquelles donne lieu la notion de l'éther élastique, ni montrer combien est superficielle l'analogie des équations de Maxwell ou de l'optique avec celles des corps élastiques, analogie qui a donné à Maxwell et à tant d'autres l'espoir vain, on n'en saurait plus douter, d'une explication mécanique des actions électriques. Le lecteur trouvera un exposé de la question dans les mémoires cités plus haut et dans la seconde édition de *Électricité et Optique*, de H. Poincaré (4e partie). Paris, 1901.

on peut substituer

$$ee'\frac{\cos\rho x}{\rho^2 c^2}\{-(v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z) - 3 v_\rho v'_\rho\} = f_{1x}, \quad \dots$$

(ce qui correspond à la formule d'Ampère pour l'action de deux éléments de courant), et plus généralement, on peut ajouter à ces termes la différence $A(f_x - f_{1x})$, $A(f_y - f_{1y})$, ..., où A est une constante *arbitraire*, sans que cette addition modifie l'accord de la théorie et de l'expérience. Enfin, on peut compléter ces expressions par des termes en v'^2, v^2, etc., de manière à ce qu'elles ne contiennent plus *que les vitesses relatives*, et que l'action soit égale à la réaction, ce qui n'est pas le cas pour f. En posant

$$v_x - v'_x = u_x, \quad \dots, \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2$$

et désignant par k une constante arbitraire, l'expression la plus générale des termes électrodynamiques qui ne contient que les vitesses relatives devient

$$f_{2x} = \frac{\cos\rho x}{4\rho^2 c^2}[(3 - K)u^2 - 3(1 - K)u_\rho^2] - \frac{(K + 1)u_x u_\rho}{2c^2\rho^2}.$$

Mais on pourrait supposer aussi que la rotation des électrons mobiles dans un courant engendre seule un champ magnétique. On s'en rend compte si l'on songe que l'action du champ magnétique n'ayant été observée que lorsque celui-ci est dû à des courants fermés, il existe dans tous ces cas un potentiel magnétique égal à l'angle solide sous lequel est vu le courant c' (pour ne considérer que le cas de courants linéaires). Or, la surface d'une figure polygonale tracée sur une sphère s'exprime par la somme des angles que forment, chacun avec le suivant, les côtés du polygone ; pour une courbure continue, ces angles deviennent les angles de contingence de la courbe sphérique, et ceux-ci s'expriment au moyen du rayon de courbure de C et de sa direction par rapport au rayon vecteur. Les hypothèses moléculaires permettent d'exprimer cette courbure soit par l'accélération de l'électron, soit, pour un électron dissymétrique, par sa rotation. On obtient ainsi une décomposition entièrement nouvelle de l'action du courant fermé en actions élémentaires, qu'on considérera comme valable pour tout élément de courant fermé ou non, et qui, par intégra-

tion le long du courant, fournira dans tous les cas de potentiel magnétique. Le champ magnétique créé par un élément de courant étant ainsi déterminé, la force exercée sur une charge e en mouvement sera, comme dans la théorie de Lorentz, $\frac{e}{c}(v_y H_z - v_z H_y), \ldots,$ où v désigne la vitesse *relative* par rapport à l'élément.

En somme, sur ces termes dépendant des vitesses, nous ne sommes pas mieux renseignés qu'au temps de Weber et de Helmholtz.

Il en est autrement du terme

$$\varphi_x = \frac{ee'}{2\rho c^2}[w'_x - w'_\rho \cos\rho x], \qquad \varphi_y = \ldots$$

dépendant des accélérations. On peut dire que tout l'effort de l'expérience, tout ce que nous savons des oscillations électriques, des équations de la lumière, de l'induction en circuit ouvert ou fermé, a porté *uniquement* sur ce terme. Il se décompose en deux autres :

1° en $ee'\left[\frac{-w'_x - w'_\rho \cos\rho x}{c^2\rho}\right] = \Psi_x \ldots$ qui n'est autre chose, à des termes en $\frac{1}{c}$ près, que le terme

$$\frac{-w'_x - w'_r \cos r x}{c^2 r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)^2}$$

de XV, et joue le rôle du vecteur de Fresnel en Optique. C'est de lui que dépendent tous les phénomènes présentés par les oscillations hertziennes à grande distance de la source. Ce terme ne joue par contre aucun rôle dans l'induction en circuit fermé, car il peut s'écrire

$$\frac{-d}{dx}\frac{w_\rho}{c^2}; \qquad \frac{-d}{dy}\frac{w'_\rho}{c^2}, \qquad \frac{-d}{dz}\frac{w_\rho}{c^2};$$

l'expression

$$\Psi_x\, dx - \Psi_y\, dy - \Psi_z\, dz$$

de la force électromotrice devient dès lors une différentielle totale et s'annule pour tout circuit fermé.

2° en $\frac{ee'}{2c^2\rho}\left[w'_x - 3w'_\rho \cos\rho x\right] = \chi_x$, qui provient entièrement du

développement en série, et par conséquent de la vitesse *finie de propagation*, et qui détermine les phénomènes d'induction en circuit fermé et les forces électriques dans le voisinage immédiat d'un oscillateur hertzien (avec le terme électrostatique $\frac{ee' \cos \rho x}{\rho^2}$, dont la forme ne fait l'objet d'aucun doute).

Mais il importe de remarquer *qu'une loi de propagation où le centre de l'onde émise par un ion à un instant τ reste constamment animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, de vitesse égale à celle de l'ion à l'instant τ, donne aussi, par le développement du terme électrostatique, le terme γ_x, et ce résultat peut même être généralisé.* On ne peut donc conclure que ce centre reste en repos, comme le veut la théorie de l'éther immobile.

La réaction d'un système électrisé sur lui-même, lorsqu'il y a accélération, c'est-à-dire l'expression de la *masse électromagnétique* pour des vitesses faibles, dépend exclusivement de φ_x; l'existence d'une telle réaction ne saurait donc être douteuse ; elle est absolument indépendante de toute incertitude relative au mouvement absolu, aux termes électrodynamiques et à la loi de propagation.

Revenons maintenant à la formule générale XIV et XV ; *on peut, dans cette dernière, tracer tous les v'* sans qu'aucun fait d'expérience, soit dans le domaine de l'Optique, soit dans celui de l'électrodynamique, n'en soit modifié de façon sensible : seul, $\frac{-v'_x}{cr^2}$ doit être conservé. Ce terme de premier ordre par rapport aux vitesses ne joue d'ailleurs aucun rôle en Optique et dans les oscillations hertziennes ; et il ne reste dans la formule XVII aucun terme de ce genre. Une autre loi de propagation, n'entraînant pas la considération d'un système absolu de coordonnées, le rendrait inutile.

Quant au terme de XIV linéaire en v (force électromagnétique proprement dite), il contient $\frac{1}{c^2}$ en facteur et ne joue de rôle que dans les phénomènes quasi-stationnaires ; nous avons vu combien sa forme reste incertaine.

Les derniers énoncés comportent deux restrictions, relatives à des termes d'ordre supérieur au second. La pression de la lumière correspond à un tel terme, dépendant du produit des accélérations

et des vitesses. Mais sa forme reste bien incertaine. En second lieu, les expériences de M. Kaufmann sur les rayons β du radium mettent en évidence dans XIV l'ensemble des termes. Malheureusement, il n'y a aucune conclusion à tirer de là ; car on peut ajouter, soit à la formule de Weber, soit à celle de Clausius ou de Riemann, soit enfin à f_{2x}, une suite infinie de termes dépendant des puissances supérieures à la seconde et paires des vitesses, divisées par les puissances correspondantes de c : ces termes ne joueront de rôle que lorsque les vitesses sont comparables à c, c'est-à-dire dans l'expérience de Kaufmann. Chacune de ces théories pourra, par un choix convenable de ces séries, satisfaire aux observations, ce qui montre (voir *loc. cit.*, pp. 189-197, 260-270) que si l'existence d'une réaction d'inertie électromagnétique est, comme on l'a vu, hors de doute, la variabilité de cette réaction avec la vitesse, par contre, est hypothétique ; elle ne saurait être déduite des expériences de M. Kaufmann que lorsqu'on adopte *a priori* les hypothèses de Lorentz sur le mouvement absolu et sur les forces f_x. Cette théorie de la *variabilité de la masse électrodynamique s'appuie donc sur les points les plus faibles de la théorie de Lorentz. On explique tout aussi bien, et même mieux, les observations faites en changeant convenablement dans l'expression de la force les termes dépendant des vitesses, de manière à n'introduire que des mouvements relatifs.*

Il est à peine utile d'ajouter que le peu que nous connaissons des forces moléculaires ne nous permet pas d'affirmer que les lois connues de l'électricité sont valables à toute distance, si petite soit-elle. En réalité, c'est toujours à la loi des charges ponctuelles que nous aurons affaire, et l'on ne connaît aucune expérience où les conditions restrictives qu'elle comporte ne soient pas remplies.

Nous avons enfin à nous demander ce que l'expérience nous apprend sur la loi de propagation, ou, en d'autres termes, sur l'équation qui lie l'instant d'émission t' à l'instant t où l'action a lieu. Dans la théorie de Lorentz, l'onde émise par un électron en mouvement uniforme à l'instant t' reste à tout instant postérieur de forme sphérique, le centre de la sphère étant le point de l'éther où l'onde a été émise, et ne participant pas au mouvement de

l'électron. Cette hypothèse introduit donc le mouvement absolu, et, si l'on admet que les expériences futures ne mettront pas plus ce mouvement en évidence qu'elles ne l'ont fait jusqu'ici, il faudra la rejeter et considérer le mouvement de propagation de la lumière comme purement relatif et dépendant du mouvement des corps qui ont produit la lumière — à moins de renoncer, avec Lorentz et Einstein, à la cinématique et à la notion de temps. Le principe de la *relativité du mouvement*, dans sa forme *classique*, exigera que les ondes émises par un système en mouvement uniforme, soustrait à toute influence extérieure sensible, se meuvent avec ce système, de manière que le centre de chaque onde sphérique continue à coïncider avec l'électron qui l'a émise, et que la vitesse radiale soit universelle et égale à c. Si le mouvement de l'électron est quelconque, le principe de relativité ne détermine plus la vitesse avec laquelle se déplace le centre de l'onde ; toutefois, cette vitesse doit être constante (sinon il y aurait action à distance entre l'électron et l'onde émise). Il ne sera plus possible, il est vrai, de conserver l'image « éther » ou « ondes dans un corps élastique » pour cette loi de propagation ; mais, si même nous voulions la conserver, et avec elles les équations aux dérivées partielles, il serait nécessaire d'ajouter l'hypothèse nouvelle de la transformation Lorentz-Einstein qui, à vrai dire, change si profondément les conditions du problème, que l'image « éther » ou « corps élastique » devient entièrement inapplicable. Bien plus, la propagation de la lumière, dans les vues de MM. Lorentz et Einstein, ne comporte plus d'image mécanique du tout. Au contraire, la loi de propagation que nous avons énoncée plus haut correspond simplement à l'image de particules émises dans tous les sens avec une même vitesse radiale, et qui continuent à se mouvoir uniformément : elle se rapproche donc, sous ce rapport, de la théorie émanative de Newton. J'ai montré (*loc. cit.*, 2[me] partie) qu'en supposant cette loi vraie quel que soit le mouvement de l'électron et admettant que ces particules fictives agissent sur les charges électriques avec lesquelles elles entrent en contact, on n'a aucune peine à construire une infinité de théories électrodynamiques en parfait accord avec l'expérience, sauf en ce qui concerne l'optique des corps en mouvement. Ici l'expérience, interprétée dans la conception atomique de l'électricité que nous avons adoptée jusqu'ici,

énonce ce résultat unique et simple [1]: lorsqu'un rayon lumineux met en vibration les ions d'un corps quelconque qui, à leur tour, émettent de nouvelles ondes, les centres de ces ondes se meuvent, non avec la vitesse de ce corps (comme le voulait notre hypothèse), mais avec la vitesse de la source de lumière. Or, c'est ce que le principe de l'action et de la réaction permettait de prévoir. En effet, ce principe se trouve lésé par notre hypothèse, puisqu'à l'action de nos particules fictives (pour nous servir de cette image) sur les ions ne correspondait aucune réaction des ions sur les particules. Il faudra, comme dans la théorie de Lorentz, attribuer à l'énergie rayonnante une *quantité* de mouvement, ce qui est bien plus naturel lorsqu'on considère cette énergie comme *projetée* que lorsqu'on la considère comme propagée ; et les vitesses initiales des particules fictives émises par un ion se détermineront par le principe de *la conservation de la quantité de mouvement*, ou principe de réaction. Dans le cas de l'Optique, toute l'énergie rayonnante provient de la source, et les écrans ou appareils optiques ne fournissent aucun apport; il est donc naturel de penser que le principe de réaction, quel que soit son énoncé précis, aura pour effet que la vitesse des particules fictives émises par les ions des écrans, etc., sera uniquement déterminée par celle de la source de lumière.

Évidemment, tant qu'une théorie générale et simple basée sur ces vues nouvelles fera défaut, il y aura lieu d'étudier la question sous toutes ses faces, et en particulier de ne pas se laisser arrêter par la nécessité d'une cinématique et d'une dynamique entièrement nouvelles, comme le veut l'hypothèse Lorentz-Einstein [2]. Mais il importe de savoir que *rien*, jusqu'ici, ne nous oblige à considérer cette dernière hypothèse comme vraie, ni même comme particulièrement probable. Et je crois qu'il serait regrettable pour

---

[1] On vérifie facilement ce théorème en suivant de près les démonstrations de M. Lorentz (*Versuch einer Theorie der elektr. u. opt. Vorgänge in bewegten Körpern,* Leiden, 1895).

[2] Il faut d'ailleurs noter que la théorie Lorentz-Einstein n'est également, en partie, qu'à l'état de programme : le principe de d'Alembert, et plus généralement la dynamique classique des systèmes, sont incompatibles avec cette théorie. comme l'a remarqué M. Einstein, et rien n'est encore venu remplacer ces principes fondamentaux. Ils subsistent sans changement, au contraire, dans l'hypothèse de l'auteur.

la Physique qu'il ne se trouvât pas, pour représenter les lois électriques et électrodynamiques, de méthode plus simple que celle qui consiste à admettre d'abord des coordonnées absolues, à écrire un système de 11 équations, dont 9 aux dérivées partielles ; à les intégrer moyennant des hypothèses qu'il faut rejeter ensuite, pour ne pas introduire de solutions impossibles ou exclure des solutions possibles ; et à compliquer enfin la formule déjà bien longue, ainsi obtenue, par une transformation destructrice des principes de la cinématique, et dont l'unique but est de faire disparaître du résultat le système absolu de coordonnées si malencontreusement introduit au commencement. Encore ne sont-ce pas là les seuls motifs pour lesquels la théorie ne me paraît pas satisfaisante. L'égalité du rapport des unités à la vitesse c de la lumière trouve, dit-on, son explication dans les théories de Maxwell et de Lorentz. Les complications de la première rendent difficile une vue nette de la manière dont la théorie atteint ce résultat. Mais considérons les équations de Lorentz. La vitesse cy figure de diverses manières, et il n'est pas difficile de voir qu'en conservant c dans les équations aux dérivées partielles, mais changeant dans l'expression VI de la force $\frac{1}{c}$ en $\frac{1}{c'}$ où c' est différent de c, on n'a modifié ni la vitesse de propagation, ni les unités, ni l'énergie [1], mais bien le rapport de l'unité électrostatique à l'unité électrodynamique ; et la théorie ainsi exposée ne contient rien qui nous fasse comprendre pourquoi ce coefficient de $v_y H_z - v_z H_y$ est précisément égal à $\frac{1}{c}$. On le choisit ainsi, parce que l'expérience l'exige — exactement comme c'était le cas pour la formule de Weber, de Clausius, etc. Ce n'est que lorsqu'on exige que le principe de Hamilton s'applique, sous une certaine forme spéciale, que l'on trouve *a priori* ce coefficient $\frac{1}{c}$. Seulement le principe, tel qu'il est utilisé par Lorentz, est nettement différent du principe dans le sens ordinaire, les variations sont prises tout autrement que pour les fluides, par exemple, et, de plus, comme l'a montré

[1] Le terme en $\frac{1}{c'}$, en effet, donnera un travail constamment nul. Il faut d'ailleurs se rappeler que H, comme il a été dit, est défini par la théorie elle-même; si on le définissait *a priori* comme force (exprimée en gauss) s'exerçant sur le pôle d'un aimant permanent, le coefficient de ρv deviendrait à son tour un coefficient empirique et les conclusions resteraient les mêmes.

M. Schwarzschild, il existe différents modes d'application de ce principe. L'un d'eux détermine directement les forces élémentaires, sans passer par la considération du champ; nous lui donnerions la préférence au point de vue qui a été exposé dans cette étude; la fonction de Lagrange a la même forme (à la propagation près) que celle dont était parti Clausius,

$$\int\int \frac{dE\, dE'}{r}\left[1 - \frac{v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z}{c^2}\right],$$

où dE, dE' sont des éléments de charge, et où v, v' doivent être pris à des instants convenables.

Changeons $\frac{1}{c^2}$ en $\frac{1}{c'^2}$; la formule ne satisfera plus aux expériences, le rapport des unités cessera d'être c, mais le principe de la moindre action continuera à s'appliquer et la vitesse de propagation restera égale à c; ce sont les équations aux dérivées partielles qui, cette fois, ne sont plus satisfaites.

En résumé, on voit que cette remarquable relation ne résulte de la théorie de Lorentz que d'une façon si indirecte, qu'elle se réduit à une détermination de coefficients, comme chez Weber et Clausius, lorsqu'on n'ajoute pas la condition relative au principe de la moindre action : dans les ouvrages didactiques, par exemple le traité de M. Abraham, et même dans l'exposé que donne M. Lorentz de sa théorie dans le Mémoire cité plus haut, cette condition n'est pas mentionnée et semble considérée comme absolument secondaire.

Gauss, dans sa célèbre lettre à W. Weber, avait indiqué que, sans doute, les termes électrodynamiques résultaient uniquement de la vitesse finie de propagation, conçue suivant une loi convenablement choisie, par des développements en série tels que nous les avons considérés plus haut et qui, on l'a vu, introduisent effectivement des vitesses et des accélérations avec des coefficients dépendant de c. La relation entre le rapport des unités et la vitesse de la lumière aurait alors eu une signification immédiate. Chez Maxwell, les termes électrodynamiques, dépendant du potentiel vecteur, s'introduisent tout autrement : la profonde conception de Gauss (il importe de le constater, car le contraire a souvent été soutenu) n'a pas été réalisée par Maxwell et Lorentz. C'est à elle, peut-être, qu'appartient l'avenir en électrodynamique.

XX.

DU

RÔLE DE L'ÉTHER EN PHYSIQUE.

Rivista di Scienza « *Scientia* », Vol. III, Anno II, 1908, N. VI.

Un jour viendra sans doute où l'éther
sera rejeté comme inutile.
H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*.

Parmi les hypothèses les plus importantes en Physique et les plus généralement admises, il en est deux qui jouent un rôle particulièrement essentiel : l'hypothèse atomique, et l'hypothèse de l'éther. Nées toutes deux de conceptions métaphysiques qui, de nos jours, ne trouveraient plus guère d'adhérents, elles ont connu, dans le cours des temps, des vicissitudes nombreuses, et l'expérience aussi bien que la critique leur ont fait, pendant ces dernières années, un sort très inégal. On sait combien a été féconde, dans presque tous les domaines de la Physique et de la Chimie, la conception atomique ; et le développement qu'a pris récemment la théorie des ions et électrons a constitué un nouveau triomphe de cette conception en nous faisant presque toucher du doigt l'existence de charges électriques atomiques. Cependant la critique philosophique semble encore à l'heure qu'il est ne pas pouvoir pardonner entièrement à cette hypothèse ses origines un peu douteuses. M. Ostwald [1] en particulier la traite avec une sévérité qu'il

[1] *Voir* en particulier l'article de M. Ostwald dans cette Revue, N° I, p. 16.

est loin d'appliquer à d'autres conceptions, et en particulier à celle de l'éther. C'est à peine si la critique a effleuré cette dernière. Le succès de la théorie ondulatoire de la lumière, et, plus récemment, celui de la théorie de Maxwell, ont fait taire les objections, et l'on ne s'est guère demandé dans quelle mesure cette notion d'éther, essentielle, il est vrai, dans la forme *actuelle* de ces théories, est aussi exigée par l'expérience, indépendamment de cette forme particulière. Et cependant, une brève analyse historique suffira à nous montrer combien peu, en vérité, l'hypothèse de l'éther mérite la faveur universelle qui lui est accordée.

D'origine philosophique, l'éther n'a acquis droit de cité en Physique qu'avec Huygens, créateur de la théorie ondulatoire de la lumière; il n'était, d'ailleurs, à cette époque, à côté des fluides magnétique, calorique, électrique, etc., qu'une nouvelle conception toute analogue, et qui eût certainement été acceptée sans grande difficulté par les physiciens, si la grande autorité de Newton n'était intervenue, faisant dominer pour longtemps la théorie émanative de la lumière. Le motif qui a porté Newton à rejeter les conceptions d'Huygens vaut qu'on s'y arrête; il est caractéristique.

L'observation de divers phénomènes de diffraction, et en particulier des anneaux de Newton, avait montré dès cette époque que la lumière est certainement un phénomène périodique, c'est-à-dire consiste en une succession d'états qui, au bout d'un certain temps, extrêmement court d'ailleurs, se renouvellent exactement de la même manière au même point de l'espace. C'est ce qui a eu lieu également pour le son, et c'est ce qu'exigeait la théorie d'Huygens; les profondes recherches mathématiques de ce savant, qui ont été la première base de la théorie ondulatoire, s'appliquent quelle que soit l'hypothèse faite sur la *nature* du phénomène, pourvu que l'on conserve cette notion de périodicité dans le temps et dans l'espace suivant la loi mathématique d'Huygens. Mais ce savant avait de plus admis qu'il fallait considérer la lumière comme étant une vibration d'un corps impondérable, répandu dans tout l'espace; et comme les corps pondérables n'éprouvent aucune résistance de la part de cet « éther », soit que l'on considère les mouvements relatifs des corps à la surface de la terre, soit que l'on étudie à cet égard les mouvements célestes — et ici la pré-

cision de l'observation est extrêmement grande — il fallait concevoir l'éther comme un *fluide* extrêmement subtil. Or les fluides ne peuvent exécuter que des vibrations longitudinales, c'est-à-dire des vibrations dont la direction est toujours celle dans laquelle se propage l'onde, et qui sont caractérisées en chaque point par une seule donnée : la densité du fluide en ce point. Telles sont les vibrations de l'air qui provoquent en nous l'impression du son; tandis que les vibrations produites lorsqu'on pince une corde de violon, lorsqu'on frappe une barre, ou qu'on jette une pierre dans une pièce d'eau, sont d'un caractère tout différent : elles ne sont pas accompagnées d'un changement de densité, et leur direction n'est pas déterminée par celle de la propagation : dans un corps solide indéfini, elle est dans un plan perpendiculaire à cette dernière, et il faut, pour la caractériser, se donner sa *direction* dans ce plan, ou ses deux composantes suivant des axes de coordonnées situés dans le plan : dans une corde vibrante, la propagation a lieu dans la direction de la corde même, la vibration est perpendiculaire à celle-ci, et dépend de la direction dans laquelle a été pincée la corde. Dans aucun cas, une *seule* donnée ne suffit, comme pour les vibrations longitudinales, à déterminer le phénomène; il en faut au moins deux. Or les recherches d'Huygens lui-même sur les phénomènes optiques que présente le spath d'Islande (polarisation) montraient que la lumière est caractérisée par une direction, ou, comme on dit, par un *vecteur*, c'est-à-dire par plusieurs quantités, et non par une seule. Aussi Huygens ne put-il expliquer la variété des phénomènes que présente le spath, et Newton, qui certainement connaissait les vibrations transversales des solides, mais ne pouvait admettre qu'un solide se laissât pénétrer par les corps les plus divers sans leur opposer la moindre résistance, rejeta-t-il la théorie d'Huygens malgré ses avantages évidents. Ainsi, dès l'origine, cette matérialisation d'une conception mathématique d'ailleurs si féconde a été funeste à celle-ci. C'est une particularité que nous retrouverons presque à chaque pas de l'histoire de cette conception, et jusque dans ses développements les plus récents.

Pendant près d'un siècle, l'éther ne joua, dès lors, qu'un rôle extrêmement modeste, et lorsqu'enfin les travaux de Fresnel le remirent en honneur, et donnèrent une immense supériorité aux

conceptions d'Huygens sur celles de Newton, c'est au sans-gêne génial avec lequel le grand savant traita ce côté de la théorie qu'il faut attribuer une partie de son succès. Uniquement guidé par l'étude des phénomènes, il en chercha et en trouva les lois mathématiques, qu'on peut exprimer, sous leur forme la plus générale, par une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, et par certaines conditions auxquelles la lumière est assujettie lorsqu'elle se trouve à la surface de séparation de deux corps différents ou d'un corps et de l'éther. La difficulté de faire mouvoir librement les corps à travers un éther solide ne l'arrêta pas; il admit même, pour expliquer l'aberration, que l'éther ne partage pas le mouvement de la terre dans son orbite, en sorte que tous les objets et l'air qui nous entoure seraient parcourus par un vent d'éther à la vitesse de 30 kilomètres à la seconde, sans que nous puissions nous en apercevoir même par les expériences les plus délicates. Sa théorie était conforme à l'expérience, donc l'objection ne pouvait être insurmontable. Des expériences plus exactes mettraient en évidence, pensait-il, ce mouvement relatif des corps par rapport à l'éther, ou une analyse plus parfaite expliquerait tout. Et à vrai dire, nous en sommes encore au même point.

La théorie de Fresnel était purement phénoménologique, nous l'avons dit. Il s'agissait maintenant de déduire cet ensemble de formules d'une théorie complète de l'élasticité de l'éther, et les problèmes qui se posaient dans ce sens ont été pour beaucoup dans le vaste développement que prit alors, entre les mains de Navier, Poisson, Green et Cauchy, la théorie générale de l'élasticité des corps solides, qui n'existait auparavant qu'à un état rudimentaire. Le résultat de ces recherches fut qu'on peut caractériser le mouvement vibratoire le plus général d'un solide — et par conséquent de l'éther — par des équations du second ordre aux dérivées partielles, et par certaines conditions à la surface des corps — comme l'avait montré Fresnel pour la lumière. Malheureusement, il n'y avait pas identité des deux ordres de phénomènes, et des divergences subsistaient précisément aux points importants. On montre facilement que des considérations d'ordre général, telles que la réversibilité d'un phénomène caractérisé par un vecteur, l'isotropie, la continuité, etc., suffisent pour déterminer

à deux coefficients arbitraires près, la forme de l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait le vecteur. Aussi des équations analogues reviennent-elles dans les domaines les plus divers de la Physique mathématique — par exemple dans la théorie de la chaleur, du potentiel, de l'équilibre des corps élastiques, etc. — sans qu'on puisse conclure, loin de là, à un rapport entre ces phénomènes. Or, pour passer des équations de l'éther, supposé un corps élastique, à celles de Fresnel, il faut donner à l'une des constantes une valeur impossible : la résistance qu'oppose le corps à une compression uniforme, ou, ce qui revient au même, la vitesse des oscillations longitudinales, doit être nulle. Aussi Cauchy et Green ont-ils rejeté cette hypothèse, et ont-ils admis qu'au contraire l'éther est incompressible, et que des ondes de compression ne peuvent s'y produire. A vrai dire, les principes généraux de la Mécanique exigent, dans cette hypothèse, l'introduction d'une pression hydrostatique, qui serait ce qu'on appelle le facteur de Lagrange correspondant à la condition d'incompressibilité à laquelle est soumis le mouvement. Mais il n'y aurait plus eu identité avec les équations de Fresnel; sans beaucoup d'explications, on laissa cette pression de côté. Malheureusement, cela ne suffit pas. Parmi les conditions qui doivent être satisfaites à la surface de séparation de deux milieux, les unes, qui expriment simplement la continuité, sont bien communes à la théorie de l'élasticité et à l'optique; mais ce sont — comme nous l'avons dit plus haut de la forme générale des équations — précisément celles qui ne sont à aucun degré caractéristiques, et ne contiennent pas les constantes physiques des deux corps. Quant aux deux conditions qui contiennent ces dernières, il a fallu les abandonner; elles étaient inconciliables avec les expériences de Fresnel. On les a remplacées par d'autres principes, impliquant des hypothèses nouvelles, et c'est en particulier l'hypothèse atomique qui a permis à Kirchhoff d'énoncer l'explication mécanique la plus plausible de ce problème si difficile. Plus tard, Lord Kelvin, trouvant que, pour les cristaux, malgré tous ces « coups de pouce », l'hypothèse de l'incompressibilité de l'éther ne donnait rien de satisfaisant, revint à la solution rejetée par Cauchy et Green, d'un éther infiniment compressible; il montra que, si l'éther est *infini*, l'hypothèse cesse d'être nécessairement absurde. Mais elle reste fort étrange, car

elle revient à attribuer toute l'énergie potentielle de l'éther aux changements d'orientation de ses éléments de volume, changements qui, pour l'élasticité des corps solides finis, sont sans influence aucune, mais peuvent jouer un rôle, au moins apparent, lorsqu'il s'agit de l'éther : car celui-ci, par hypothèse, ne peut tourner dans son ensemble à la manière d'un solide. Il reste, il est vrai, cette objection qu'il suffit, pour provoquer en un point de l'éther un changement de densité fini, d'une compression infiniment faible. Lord Kelvin suppose par conséquent que l'énergie de l'éther contient des termes qui s'opposent à la compression, mais sont d'un degré supérieur au second, en sorte qu'en Optique où les déformations sont supposées infiniment petites, ils restent négligeables. Les conditions aux limites deviennent alors identiques à celles de Fresnel; aucune difficulté ne semblait plus subsister et, si la conception d'un éther élastique n'avait joué aucun rôle effectif dans la découverte des lois de l'Optique, du moins semblait-elle capable de les expliquer après coup. Cependant Lord Kelvin abandonna cette hypothèse pour la remplacer par une autre plus subtile, celle de l'éther gyrostatique; il semble que ce soit l'identité des phénomènes lumineux et des oscillations électriques, découverte par Maxwell, qui l'y aient amené.

On sait que Maxwell part de ce principe, énoncé par Faraday, que les attractions et répulsions électriques et électromagnétiques sont dues, non à une action à distance, mais à une sorte de pression qu'exerce sur les corps électrisés le milieu dans lequel ils sont plongés; ce milieu est lui-même, de proche en proche, modifié par la présence de charges électriques. Maxwell montra comment on peut transformer et compléter les équations de l'Électricité de manière à ce qu'elles expriment cette nouvelle manière de voir; pour les oscillations électriques, il trouva exactement la forme d'équation et les conditions données par Fresnel; il ne s'agissait plus, comme dans la théorie de l'éther élastique, d'un à-peu-près : les constantes, déterminées par des méthodes purement électriques, étaient identiques elles-mêmes à celles de l'Optique. Cette belle découverte constitue la théorie électromagnétique de la lumière; elle laisse d'ailleurs ouverte la question d'une explication mécanique par les propriétés élastiques de l'éther, mais exige que cette explication s'applique, non seulement à

l'Optique, mais à l'ensemble, bien plus compliqué, des lois de l'électricité et du magnétisme. Pour des corps au repos parcourus par des courants, Maxwell a donné une telle explication; mais la structure extrêmement compliquée qu'il a été obligé de donner à l'éther permet de sonder toute la difficulté du problème, plutôt qu'elle n'en constitue une solution; pour les corps en mouvement, et pour les actions électrostatiques, Maxwell n'avait d'ailleurs pas réussi à trouver une explication analogue, et, dans l'exposé définitif de la Théorie dans son célèbre Traité, il ne mentionne plus son explication primitive. Il est impossible de décider dans quelle mesure ces spéculations sur la structure de l'éther l'ont aidé dans ses découvertes; l'existence d'une relation étroite entre la lumière et l'électricité avait été entrevue par Gauss, et la découverte remarquable, faite par W. Weber et Kohlrausch, que le rapport des unités électrostatique et électrodynamique est égal à la vitesse de la lumière, avait porté un mathématicien célèbre, B. Riemann, à des spéculations sur le même sujet, et a dû vivement frapper Maxwell.

Les équations de l'Optique n'étant qu'un cas très particulier de celles de l'Électrodynamique, il faut que les interprétations mécaniques de ces dernières soient des généralisations de théories mécaniques de la lumière. Le choix, on l'a vu, n'est pas grand, et, malgré les efforts de nombreux savants, parmi lesquels il faut citer en première ligne Lord Kelvin, aucune solution n'a été trouvée. J'écarte, bien entendu, les mécanismes ingénieux et compliqués relatifs à tel ou tel cas particulier; j'écarte encore les considérations générales, où interviennent des masses imperceptibles à nos sens, et dont on ne précise pas le mouvement, parce que, affirme-t-on, seule l'expression de leur énergie cinétique et potentielle importe. On a pu dire, il est vrai, qu'il suffit de montrer que le principe de la moindre action s'applique à un phénomène lorsqu'on introduit dans l'expression de l'énergie du système des termes de ce genre, pour avoir par là même démontré la possibilité d'une réduction aux lois de la Mécanique. Mais il faut s'entendre : si l'on exclut les actions à distance entre les parties de ce mécanisme, si l'on exige, de plus, l'impénétrabilité et l'indestructibilité de ces masses invisibles, cette réduction cesse *en général* d'être possible, et le problème reste tout entier. Il est d'ailleurs facile de voir où gît la

difficulté, lorsqu'on veut passer d'une théorie élastique de la lumière à une théorie électrodynamique : partout où il existe une charge électrique, les équations deviennent inhomogènes; quelle que soit l'hypothèse que l'on fasse sur le mouvement et la déformation de l'éther dans un champ donné, tout se passe comme si, aux réactions élastiques, venait s'ajouter une force nouvelle, exercée par la charge électrique sur l'éther qui est en contact avec elle. Considérons, par exemple, une charge électrique sphérique. Son action sur l'éther environnant se réduira, par symétrie, à une pression ou une tension dans la direction du rayon. Si l'éther est incompressible — c'est l'une des deux hypothèses admissibles en Optique — cette pression ne le modifiera pas. Si, au contraire, comme le voulait Lord Kelvin, il est infiniment compressible, un flux continuel d'éther dirigé radialement s'établira, et il faudra renoncer à l'indestructibilité de l'éther. Aura-t-on recours à des termes d'ordre supérieur comme en Optique? Ces termes, ici, ne pourront plus être considérés comme négligeables, puisque ce sera d'eux que dépendra le phénomène; et nous nous trouverons en contradiction avec les lois de l'Electricité, qui n'admettent pas de tels termes. M. Poincaré, dans ses Leçons sur l'Électricité et l'Optique [1], a nettement mis en lumière le caractère général de ces difficultés, et il nous suffira de dire qu'elles n'ont pas reçu de solution, même dans la théorie de Larmor. Cette dernière repose sur la conception mentionnée plus haut, de *l'éther gyrostatique*, conception qui mérite qu'on s'y arrête. On sait que lorsqu'un appareil contient une masse en rotation rapide il tend à conserver son orientation, et oppose une résistance à la main qui cherche à le faire tourner dans un certain sens : la toupie, de même, résiste à l'action de la gravitation qui ne la fera tomber que lorsque les frottements auront suffisamment réduit sa vitesse de rotation. Supposons de telles masses en rotation dans chaque élément de volume de l'éther : cet élément opposera à un changement d'orientation une certaine résistance, et nous avons vu que c'est précisément ce qu'exige l'Optique quand on renonce à l'incompressibilité. Cette ingénieuse explication a été appliquée par M. Larmor

---

(1) H. Poincaré, *Electricité et Optique*, 2e édition, Paris 1901, 4e Partie, p. 578 et suiv.

aux phénomènes électriques; mais il n'est pas parvenu à vaincre diverses difficultés (*voir* M. Poincaré, *loc. cit.*), et l'on ne voit pas comment la notion de charge électrique, en particulier, peut se déduire de ces considérations, à moins de renoncer à l'indestructibilité de l'éther. Effectivement il est remarquable que si l'on admet que la matière est une source continuelle d'éther, ou absorbe continuellement ce corps, on arrive avec B. Riemann (dont les recherches ont été récemment reprises par M. Brill) à l'explication hydrostatique des attractions et des répulsions que nous étudions en Électrostatique et dans la théorie de la Gravitation. Mais ici le mot « explication » ne s'applique certainement plus; il faudrait dire « analogie ».

La Gravitation, dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici, complique encore le problème. Lorsqu'un milieu quelconque, après avoir été soustrait à toute influence extérieure, est soumis à une déformation, la stabilité du milieu exige que son énergie potentielle s'accroisse. Or, et c'est Maxwell qui l'a remarqué, pour un champ de Gravitation, cette énergie diminuerait, au contraire; aussi Maxwell considère-t-il ses conceptions comme inapplicables à la Gravitation, qui reste ainsi encore plus « inexplicable » que les phénomènes électriques. On n'évite la conclusion qu'en renonçant, comme on l'a vu, à l'indestructibilité de l'éther. Quant aux idées de Lesage, qui font de l'éther une sorte de gaz très raréfié, où les corps matériels se protègent mutuellement contre les chocs des atomes d'éther et sont ainsi poussés les uns vers les autres, il est douteux qu'elles expliquent réellement la Gravitation; mais, certainement, elles sont absolument incompatibles avec les lois de l'Optique. Enfin, citons les travaux de Bjerknes qui, comme d'autres auteurs l'avaient déjà fait, trouve une analogie de la Gravitation avec un système de corps vibrants, plongés dans un fluide incompressible. Il considère, en particulier, des sphères qui s'étendent et se contractent alternativement : mais il faut qu'il y ait non seulement identité de période pour toutes les molécules ou sphères, mais encore identité de phase, et cette dernière condition est plus inexplicable que la Gravitation elle-même.

En résumé, aucune conception mécanique de l'éther n'a conduit au but. L'expérience a-t-elle réussi là où la théorie a échoué? Beaucoup de recherches ont été entreprises pour mettre en évi-

dence, par le moyen si délicat des interférences, un mouvement de l'éther, soit dans le voisinage de corps aimantés ou électrisés, entraînés dans un mouvement de rotation rapide ; soit près de courants électriques, ou dans un champ d'oscillations hertziennes. Le résultat a été constamment négatif, et cet échec, confirmant celui de la théorie, et s'ajoutant aux difficultés nombreuses déjà signalées, telles que le passage libre des corps à travers l'espace matériellement vide, a amené un grand nombre de savants à renoncer définitivement à une conception mécanique de l'éther, et à en faire ce que M. Drude appelle un *espace physique*, c'est-à-dire un espace qui ne se distingue de celui de la Géométrie qu'en ce qu'il est le siège d'une énergie spéciale, l'énergie électromagnétique. Son état est défini par la « force électrique » et la « force magnétique ». A vrai dire, ces vecteurs n'y produisent par hypothèse aucun changement qui soit susceptible de tomber sous nos sens ; et l'on peut se demander ce que de tels énoncés renferment de réel et quelle est la part des mots lorsqu'on continue à parler d'une action de ce « milieu » sur les corps. C'est ce que nous allons examiner en partant de la théorie électrodynamique de Lorentz qui est établie sur cette conception de l'éther. Nous trouverons que le rôle de l'éther, bien modeste déjà, doit encore être réduit, et, d'abstraction en abstraction, nous arriverons à n'y plus voir qu'un système de coordonnées absolues, un fantôme mathématique, qui, à son tour, ne subsistera pas devant l'expérience.

L'éther est considéré, nous l'avons dit, comme étant le réservoir de toute l'énergie électrodynamique, optique, etc. Nous pourrions donc nous attendre à ce que certains points de l'éther, situés soit à distance finie, soit à l'infini, soient l'origine de perturbations électrodynamiques. Un corps rayonnant, au lieu de perdre constamment de son énergie, pourrait aussi en gagner constamment, par l'apport d'ondes convergeant vers lui, et venant, par conséquent, de l'infini. Un tel appareil, tirant son énergie de l'éther sans que d'autres corps en perdent une quantité équivalente, serait bien précieux : il constituerait un *perpetuum mobile*. Il est facile de montrer [1] qu'effectivement les équations de Maxwell, de Hertz et

---

[1] Pour plus de détails sur ces questions, consulter un Mémoire de l'auteur : *Recherches critiques sur l'Electrodynamique générale*, *Œuvres*, XVIII, p. 317.

de Lorentz admettent de telles solutions, ce qui constitue certainement une grave objection à ces théories, d'autant plus que, pour les écarter d'une manière absolument générale il faut introduire de nouvelles hypothèses qui ne supportent guère une critique rigoureuse. Pour la théorie de Maxwell et pour celle de Hertz on n'y a pas réussi jusqu'ici; dans celle de Lorentz, on n'y réussit qu'en admettant par hypothèse que toute solution qui ne peut pas se mettre sous la forme de « potentiels retardés », c'est-à-dire d'actions des divers éléments de charge tout analogues aux anciennes actions à distance, mais non instantanées, doit être écartée. Nous voilà donc revenus aux actions élémentaires, que Maxwell s'était fait fort d'écarter de la théorie; et il est bon de remarquer qu'aucun énoncé équivalent à cette hypothèse, et plus conforme aux idées de Maxwell, ne semble possible. La difficulté est, en effet, essentielle : l'hypothèse nouvelle rend les phénomènes électromagnétiques essentiellement irréversibles, tandis que les équations primitives énonçaient leur réversibilité. Mais admettons l'hypothèse comme un fait d'expérience; alors les équations s'intègrent complètement, et, comme l'a fait remarquer M. Lorentz lui-même, le champ, les vecteurs électrique et magnétique, disparaissent du résultat, qui n'énonce plus que des relations d'espace et de temps, où interviennent certains coefficients invariables dits « charges électriques ». Ces actions « retardées » peuvent *complètement* remplacer les équations aux dérivées partielles; tandis que la proposition inverse n'est pas vraie. Ainsi, en Optique, nous n'aurons plus à nous préoccuper de ce qui se passe dans l'éther pur; tout se réduira à des actions exercées par les charges mobiles ou ions de la source de lumière sur celles de l'écran, de l'appareil optique, de la rétine ou de la plaque photographique. Les points de l'éther ne sont plus, comme l'admettaient Huygens et Fresnel, autant de centres d'ébranlement, émettant de nouvelles ondes dans toutes les directions : seuls, les points électrisés sont centres d'ondes; malgré cela, les deux manières de voir conduisent au même résultat, conforme à l'expérience. Mais combien est profonde la différence entre le rôle joué par l'éther dans l'une et l'autre théorie! Chez Lorentz, en fait, il n'est plus qu'un système de coordonnées absolu, c'est-à-dire indépendant de la matière au sens ordinaire, et par rapport auquel il faut mesurer toutes les

vitesses (et en particulier celle de la lumière) qui entrent dans les équations. L'éther, qui aurait pu manifester son existence par des ondes émanant de lui, se dérobe une fois de plus.

Il faut avouer que nous sommes bien loin de toutes les conceptions auxquelles l'étude de la nature a jusqu'ici conduit les savants; et, peut-être, n'avons nous pas le droit de nous étonner beaucoup que l'expérience, interrogée souvent et avec un soin et une précision extrêmes, ait donné un démenti formel à une hypothèse si étrange et abstraite. Le mouvement de translation si rapide de la Terre dans son orbite est sans influence sur les phénomènes optiques et électriques, de même qu'il est sans influence en Mécanique. La théorie de Lorentz n'explique que quelques-uns de ces résultats négatifs; aussi ce savant a-t-il cherché quelles hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour que l'influence d'un mouvement de translation uniforme d'un système soit rigoureusement nulle. Il a trouvé qu'il faut :

1° Renoncer à l'existence de corps solides, dont les dimensions ne sont altérées par aucun mouvement : notion qui est à la base de la Géométrie;

2° Renoncer à l'invariabilité de la masse, qui devient fonction de la vitesse — de même, d'ailleurs, que dans la théorie primitive de Lorentz [1];

3° Faire du temps, de la simultanéité, de l'égalité de deux temps des notions toutes relatives, définies différemment suivant le mouvement de l'observateur;

4° Renoncer enfin au parallélogramme des vitesses, qui ne serait qu'une approximation admissible aux faibles vitesses; deux électrons émis par un grain de radium en sens inverse avec une vitesse de 250000^{km} par seconde, auront une vitesse relative non de 500000^{km}, mais d'environ 296000^{km}. C'est dire que la signification de tous ces mots a totalement changé.

Les physiciens consentiront-ils, pour sauver l'éther et les équations de Maxwell, ou du moins le peu qui en reste, à admettre de gaieté de cœur de telles complications? Ne se diront-ils pas plutôt

(1) Lorsqu'on renonce au mouvement absolu et à la notion d'éther, les expériences de M. Kaufmann ne permettent plus d'affirmer la variabilité de la masse. Celle-ci peut être d'origine électromagnétique, mais elle est constante; ce sont les forces qui varient avec la vitesse.

que, une fois de plus, l'image « *éther* » qu'ils s'étaient faite pour expliquer la non-instantanéité de la lumière, loin de les conduire à prévoir des résultats nouveaux confirmés ensuite par l'expérience, comme c'est le cas pour la théorie atomique et en général pour toute théorie qui mérite d'être retenue, ne leur a même pas permis d'expliquer les résultats de l'observation et leur a créé des difficultés toujours nouvelles?

La théorie émanative de la lumière n'introduisait pas le mouvement absolu. Si au contraire la lumière se *propage*, ce ne peut être que dans un corps différent des corps matériels, et remplissant tout l'espace; ce corps introduira nécessairement le mouvement dit absolu; l'expérience démontre donc qu'il n'y a pas *propagation*. Nous sommes ainsi amenés à considérer l'énergie lumineuse comme *projetée*, et non comme *propagée;* nous reviendrons, dans un certain sens, à une théorie émanative de la lumière et de l'électricité, mais sous une forme nécessairement toute nouvelle, et sans oublier un instant qu'il ne s'agit que d'une image destinée à nous rendre sensible le retard qu'éprouvent les actions lumineuses et électriques, retard qui seul est l'objet des expériences. Cette image satisfera en même temps à ce besoin de notre esprit d'introduire partout la notion de substance, besoin auquel nous devons les anciens fluides calorique, magnétique, etc. et le nouveau fluide énergie. Une telle entreprise semblait, au point de vue de la théorie ondulatoire classique, condamnée d'avance; il en est tout autrement dans les vues nouvelles que nous devons à Lorentz. Pour ne nous occuper que de l'Optique, la considération des actions élémentaires retardées nous permettra de scinder le problème en deux autres : il faudra d'abord conserver la formule analytique qui exprime la force subie par un ion au moyen d'une somme d'actions dépendant de la position et de l'accélération (périodiques) des autres ions, pris à de certains instants antérieurs; puis, parmi les diverses lois de propagation que peut nous suggérer l'hypothèse émanative, et qui toutes satisferont au principe de la relativité du mouvement, nous choisirons celle qui sera conforme à l'expérience. Les instants antérieurs ou instants d'émission déterminés par la nouvelle loi ne différeront jamais beaucoup de ceux qu'exigerait la loi adoptée par Lorentz, et basée sur la notion de système de coordonnées absolues; dans beaucoup d'expériences,

où les vitesses sont négligeables, il y aura identité complète. Les ondes de l'éther seront remplacées par une distribution de l'émanation, périodique dans le temps et dans l'espace. J'ai d'ailleurs montré (*loc. cit.*) que sur ces bases on peut édifier non pas une, mais une infinité de théories électrodynamiques; conservant la théorie des électrons et les autres hypothèses physiques si fécondes introduites par Lorentz, conservant même son principe de superposition, on n'a qu'à discuter séparément d'une part l'influence des divers termes qui constituent ensemble l'expression de la force subie par un électron, et de l'autre celle de la loi de propagation, pour déterminer les changements, très étendus d'ailleurs, qu'il est permis d'y apporter sans qu'il y ait contradiction avec aucune expérience faite jusqu'ici. Ce nouveau retour à des conceptions plus anciennes n'est, en somme, que le prolongement tout naturel d'une évolution dans laquelle M. Lorentz a eu la plus large part, et qui nous a écartés progressivement des idées primitives de Maxwell, en nous ramenant à la considération des charges électriques et en reléguant de plus en plus à l'arrière-plan l'influence du milieu. Il ne s'agit pas, bien entendu, d'un retour aux actions à distance; mais que l'on choisisse comme milieu intermédiaire un « espace physique » ou une émanation fictive, dès l'instant où l'action éprouvée par une charge électrique ne dépend que de la disposition et de l'état du milieu dans son entourage immédiat, on pourra dire qu'il n'y a pas action à distance. Peut-être cet énoncé contiendra-t-il même, dans la nouvelle hypothèse, une plus grande part de réalité que dans l'ancienne. Car l'éther, nous l'avons vu, n'est pas modifié, suivant les vues de Lorentz, par l'action de la matière; il reste immobile. La matière, au contraire, est mise en mouvement par l'action de l'éther : le principe de l'égalité de l'action et de la réaction n'est pas satisfait. Or M. Poincaré a montré qu'en attribuant à l'énergie rayonnée une quantité de mouvement, on rétablit le principe. Un système, dit-il, qui rayonne de l'énergie dans une certaine direction, recule comme une pièce d'artillerie. Ce recul, les expériences sur la pression de la lumière l'ont mis en évidence. Or n'est-il pas plus naturel d'attribuer une quantité de mouvement à une énergie *projetée*, comme le veut l'image émanative, qu'à une énergie *propagée?* L'émanation agira donc sur les corps électrisés, mais son mouvement sera,

d'après le principe de l'action et de la réaction, modifié lui-même, au moins en général; et cette modification (p. ex. la réflexion du rayon lumineux qui exerce une pression sur un miroir) sera perceptible à nos sens, alors que celle de l'éther, en supposant qu'elle existe (c'est le cas dans la théorie de Hertz), ne l'était pas. Dans la théorie de l'éther, ainsi que l'a montré M. Poincaré, le principe de l'action et de la réaction semble inconciliable avec l'expérience de Fizeau sur l'entraînement des ondes par les corps en mouvement : la théorie de Hertz, qui satisfait au principe, est inconciliable avec l'expérience; celle de Lorentz, qui n'y satisfait pas, explique très bien l'observation de Fizeau. Dans l'hypothèse nouvelle, c'est l'inverse qui a lieu : supprimons la réaction de l'électricité sur l'émanation, et la théorie ne sera pas en accord avec l'expérience.

Concluons. L'expérience ne nous a jamais révélé trace de quelque chose qui subsisterait dans les espaces vides de matière au sens ordinaire. Il nous sera toujours loisible, cependant, d'y supposer un intermédiaire servant de véhicule aux actions des corps les uns sur les autres, et cette conception pourra même être fort utile, à la condition de ne pas trop la prendre au sérieux, c'est-à-dire à la condition de ne pas oublier qu'il s'agit d'une simple construction mentale et non d'une réalité, construction qu'il faudra abandonner, pour la remplacer par une autre, dès que l'expérience ou l'économie de la pensée l'exigeront.

XXI.

DIE GRAVITATION.

« *Scientia* », Vol. V, N° X-2 (3e Année), 1er Avril 1909, p. 241-255.

Als Newton entdeckte, dass die Bewegungen der Himmelskörper mit einer ausserordentlichen Genauigkeit vorausberechnet werden können unter der Annahme, dass sie sich nach seinem berühmten Gesetz gegenseitig anziehen, betrachteten weder er noch seine Zeitgenossen die Frage als erschöpft. Trotz ihrer grossen Einfachheit hatte diese Erklärung der Bewegungen der Himmelskörper durch die Einführung einer Kraft, die ohne Zwischenmedium in der Ferne, oder, was beinahe auf dasselbe hinauskommt, momentan wirkt, für jene Männer etwas höchst unwahrscheinliches und abstossendes. Diese Abneigung gegen Fernwirkungen, die man noch heute findet, entbehrt nicht einer tieferen psychologischen Begründung : sie entspringt einem starken Empfinden für die Wesenseinheit der physikalischen Kräfte, die, bei all ihrer grossen Verschiedenheit, stets eine gewisse Zeit brauchen, um ihre Wirkung auszuüben, und, wenn diese Wirkung zwischen zwei Körpern, die durch irgend ein Medium getrennt sind, statthat, dieses Medium in wahrnehmbarer Weise verändern (¹). Das Licht schien zu Galileis Zeiten, eine Ausnahme zu bilden; doch hat dieser

(¹) Als vor hundert Jahren die Gravitation allgemein als wirkliche Fernkraft aufgefasst wurde, hat dieselbe Empfindung für die Einheit der Naturkräfte dazu geführt, alle Kräfte, auch die Molekularkräfte, als Fernwirkungen zu betrachten. Dass hier das unmittelbarere Empfinden Recht hatte gegen das künstlich anerzogene, hat der Erfolg Faradays und Maxwells gelehrt.

Forscher keinen Augenblick gezweifelt, dass dies nur scheinbar der Fall sei, und die Erfahrung hat ihm Recht gegeben. Der Wunsch, sich von dem Zwischenmedium und von der Ausbreitung ein genaueres Bild zu machen, hat, von Huygens zu Newton und Fresnel, zu den Gesetzen der Optik geführt. Für die elektrischen Kräfte hat die Erfahrung gleichfalls gegen eine Fernwirkung entschieden. Die Gravitation allein bildet eine Ausnahme. Es ist schwer anzunehmen, dass hier mehr als ein trügerischer Schein vorliege, und zahlreiche Erklärungsversuche sind gemacht worden, die meist eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit und bestimmte kleine Veränderungen des Newtonschen Gesetzes bedingen, die der experimentellen Prüfung zugänglich sind. Wir werden sie im Folgenden besprechen; durch geeignete Gruppierung lassen sie sich auf wenige Typen zurückführen, bei welchen wir uns insbesondere fragen werden, welchen Einfluss auf wirklich wahrnehmbare Vorgänge wir dabei zu erwarten haben.

Man kann natürlich nicht daran denken, die Frage nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit durch direkte Versuche zu entscheiden, wie dies für das Licht und die elektrischen Kräfte geschehen ist. Aber die indirekten Folgerungen aus jeder Hypothese genügen im allgemeinen, wegen der ausserordentlichen Genauigkeit der astronomischen Beobachtungen, um ein Urteil zu erlangen. Die Störungen, welche die neuen Glieder einführen, dürfen im allgemeinen die Fehlergrenze der Beobachtungen nicht überschreiten. Doch bestehen Ausnahmen. Die jahrhundertelang fortgesetzten astronomischen Beobachtungen haben einige Abweichungen zwischen Beobachtung und Rechnung nachgewiesen, die sich durch das Newtonsche Gesetz bis jetzt nicht erklären lassen, und die ein neues Gesetz, welches dieses ersetzen soll, wird erklären müssen. Unter diesen Anomalien ist die bei weitem grösste die des Planeten Merkur, dessen Ellipse langsam, unter der Einwirkung der übrigen Planeten, sich in ihrer Ebene dreht; doch ist die beobachtete Drehung um ungefähr 42 Bogensekunden pro *Jahrhundert* grösser als die berechnete. Die Differenz ist zwar gering, aber doch unzweifelhaft und unerklärlich. Es ist möglich, dass die nächsten Planeten, Venus und Erde, eine ähnliche, wenn auch 5 bis 10 mal kleinere Anomalie aufweisen. Die Exzentrizität der Ellipsen dieser Planeten ist nämlich eine sehr geringe,

etwa $\frac{1}{100}$: es sind beinahe Kreise. Nun ist es offenbar unmöglich, die Drehung einer Kreisbahn in sich selbst zu beobachten : es genügt, in geeigneter Weise die Umlaufszeit des Planeten zu verändern, um denselben beobachtbaren Effekt herbeizuführen. Im vorliegenden Falle könnte die sehr kleine Veränderung, die die Lagen von Venus und Erde durch diese Anomalie erfahren würden, wenn ihre Bahnen sehr exzentrisch wären, noch auf ein hundertstel etwa ihres Betrages herabgedrückt werden, wenn man die angenommenen Umlaufszeiten in ganz unbedeutender Weise veränderte. Für Mars, dessen Exzentrizität 0,09 ist, wäre dagegen vielleicht eine ähnliche, sehr leichte Anomalie zu erwarten, was auch die Beobachtung bestätigt.

Die übrigen beobachteten Abweichungen von der Theorie betreffen die Mondbewegung und die Bewegung des Enckeschen Kometen. Wir werden darauf nicht eingehen.

Die Erfahrung zeigt, dass es für die Gravitation nicht, wie für die elektrischen Kräfte, eine Schirmwirkung gibt, und nie hat irgend welcher Einfluss des Mediums konstatiert werden können. Würde ein Teil der Materie eines Planeten gegen die Anziehung der Sonne durch den andern teilweise geschützt, so wäre die gesamte Kraft nicht mehr der Gesamtmasse proportional, was sehr bedeutende Störungen zur Folge hätte ; wie Laplace berechnet hat, muss man, um diese Störungen zur Fehlergrenze herabzudrücken, annehmen, dass die Gravitation beim Durchdringen des Erdballs höchstens um ein Millionstel ihres Betrages geschwächt werde.

Diese Tatsachen sind von grosser Wichtigkeit für alle Theorien, besonders für diejenigen, welche, in einer oder der andern Weise, nicht eine « mechanische Erklärung » im gewöhnlichen Sinne suchen, sondern eine Zurückführung der Schwerkraft auf elektrische Kräfte erstreben, so dass z. B. die Gravitationskonstante aus elektrischen oder magnetischen Messungen ableitbar wäre : eine Reduktion des Problems, die für die Einheit unserer physikalischen Vorstellungen von grösster Bedeutung wäre.

Die bisher vorgeschlagenen mechanischen Erklärungen lassen sich in *statische* und *dynamische* einteilen.

In den ersteren soll die Materie den umgebenden Äther deformieren, und diese Deformation soll sich stetig ausbreiten und auf

andere Teile der Materie so wirken, dass der *Anschein* einer Anziehung entsteht. Ist *die wägbare Materie im Gleichgewicht, so gilt dies auch vom Äther*, wenigstens nach einer genügend langen Zeit. Diese Annahme ist die nächstliegendste und geht auf Newton zurück. Die Gravitationsenergie ist die potentielle Energie der Deformation des Äthers. Dies genügt aber, wie Maxwell bemerkt hat, um jede solche Theorie von vornherein abzuweisen. Denn nach einem allgemeinen Prinzip der Statik muss die Energie *nach* der Deformation *grösser* sein als im nicht deformierten Zustande, d. h. in Abwesenheit materieller Körper; sonst ist das Gleichgewicht des Mediums nicht stabil. Hier müsste aber das Gegenteil stattfinden : da die Gravitationskräfte anziehend wirken, wird die potentielle Energie eines Systems von Körpern *kleiner*, wenn ihre Massen, und somit die Deformation des Äthers, vergrössert werden. Für die elektrischen Kräfte ist das Vorzeichen umgekehrt; die Energie nimmt unter ähnlichen Umständen *zu*. Darauf hat Maxwell die Möglichkeit einer statischen Erklärung der elektrostatischen Kräfte gestützt; es ist ihm allerdings selbst hier nicht gelungen, eine solche zu finden. Man sieht also, dass ein « Äther », welcher die Wirkungen der Schwerkraft vorzutäuschen vermöchte, selbst in Abwesenheit materieller Körper in instabilem Gleichgewicht sich befinden müsste : damit aber ist diese Erklärungsweise ausgeschlossen.

Wir werden also notwendig dazu geführt, verborgene Bewegungen einzuführen, um es mit einer Energie *kinetischer* Art zu tun zu haben, und zwar auch dann, wenn die wägbaren Massen, die allein unseren Sinnen zugänglich sind, ruhen. Das Kriterium des Energieminimums ist dann nicht mehr anwendbar, und das Problem wird, im Prinzip wenigstens, lösbar.

Die älteste dieser *kinetischen* Theorien ist die von Lesage, die später Gegenstand vielfacher Arbeiten von Isenkrahe und andern gewesen ist. Sie setzt voraus, der Raum werde in allen Richtungen von kleinen Teilchen *corpuscules ultramondains*, mit grosser Geschwindigkeit durchlaufen. Wenn ein einzelner Körper A den Stössen derselben ausgesetzt ist, so bleibt er in Ruhe, da sich die Stösse im Mittel aufheben; ist aber in einiger Entfernung ein zweiter Körper B vorhanden, so schützt er A vor

den Korpuskeln, die, von aussen kommend, in der Richtung BA sich bewegen; es überwiegen die übrigen Stossrichtungen, und A wird gegen B gedrängt, ebenso B gegen A : es wird eine scheinbare Anziehung bewirkt.

Eine genauere Betrachtung [1] zeigt, dass die Korpuskeln mehr oder weniger *unelastisch* sein müssen, sodass ihr Stoss Wärme erzeugt; sonst wirft der Körper B gegen A ebensoviele Korpuskeln zurück als er in ihrem Laufe aufhält, und der Gesamteffekt auf A ist Null. Ferner, da für die Gravitation keine merkliche Schirmwirkung existiert, müssen die Atome der wägbaren Körper in Abständen voneinander stehen, die gross gegen ihre Dimensionen sind; endlich müssen sie aus Teilchen bestehen, die untereinander identisch, aber viel grösser als die *corpuscules ultramondains* sind. Für ruhende Körper ergibt sich dann das Gravitationsgesetz. Für bewegte Körper muss, wie in einem Gas, eine Reibung entstehen. Ferner wird sich die Schwerkraft mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten, die höchstens der der Korpuskeln gleich ist, und die Wirkung auf einen Körper wird nur von seiner relativen Geschwindigkeit gegen die Korpuskeln abhängen. Laplace hat schon eine ähnliche Annahme in Betracht gezogen: sie führt, wie gesagt, zu einer Art Reibung, welche die Bewegung der Planeten und des Mondes mehr und mehr verlangsamen müsste. Dies lässt sich mit grosser Genauigkeit an den Mond- und Sonnenfinsternissen prüfen, über die wir ja sehr alte Dokumente besitzen. Aus dem Umstand, dass eine solche Wirkung nicht beobachtet ist, ergibt sich bei dieser Annahme eine untere Grenze für die Geschwindigkeit der Ausbreitung der Gravitation; sie muss mindestens hundert millionenmal grösser sein als die des Lichtes! Die Korpuskeln selbst haben eine noch viel unglaublichere Geschwindigkeit : indem er alle Störungen berücksichtigt, die sich aus der Annahme ergeben müssten, findet Herr Poincaré eine untere Grenze von 24.10^{17} mal die Lichtgeschwindigkeit. Gleichzeitig würde die Reibung eine solche Menge Wärme erzeugen, dass sie

[1] Man vergl. H. POINCARÉ, *Science et Méthode*, p. 263, Paris, 1908. — J. ZENNECK, Artikel *Gravitation* der *Enzyklop. der math. Wissensch.*, t. V, p. 57, Leipzig, 1903.

für die Erde allein in einer gegebenen Zeit 10^{20} mal grösser wäre als die *gesamte* in derselben Zeit von der Sonne ausgestrahlte Wärme!

Solche Ergebnisse schliessen diese Theorie nebst allen für sie vorgeschlagenen Modifikationen definitiv aus. Insbesondere gilt dies auch von einer Hypothese, die schon auf Hooke, den Zeitgenossen Newtons, zurückgeht, und die neuerdings von H. A. Lorentz genauer untersucht worden ist. Sie ersetzt die Korpuskeln durch Wellen, die den Äther in allen Richtungen durchkreuzen sollen. Diese Wellen würden, teilweise wenigstens, von der Materie absorbiert, sonst käme keine Wirkung zustande.

Es wird also Wärme entwickelt. Anderseits soll keine merkliche Absorption der Gravitationskraft stattfinden. Wir würden es also mit Strahlen zu tun haben, die beim Durchgang durch die ganze Erde höchstens um ein millionstel ihres Betrags geschwächt werden. Dies ist höchst unwahrscheinlich, daher verwirft H. A. Lorentz diese Hypothese. Nach den Rechnungen von Herrn Poincaré würde auch hier die entwickelte Wärme ungeheuer gross sein, so dass die Temperatur der Erde sich um 10^{13} Grad pro Sekunde erhöhen würde.

In diesen Theorien war die Gravitation von *irreversiblen* Vorgängen abhängig. Dem ist nicht mehr so in den *hydrodynamischen* Erklärungsversuchen von Bjerknes und Riemann.

Die ersteren seien nur kurz erwähnt. Wenn man in einer inkompressiblen, reibungslosen Flüssigkeit ein System von Kugeln annimmt, deren Radien periodisch sämtlich und gleichzeitig zu- und abnehmen, und wenn die Intensität der Pulsationen den Massen dieser mit den Atomen zu identifizierenden Kugeln proportional gesetzt wird, so erhält man das Newtonsche Gesetz für die scheinbaren Kräfte, die diese Kugeln durch die Einwirkung der Flüssigkeit aufeinander ausüben. Diese Gleichzeitigkeit der Pulsationen aber ist entschieden noch unverständlicher als das Newtonsche Gesetz und noch entfernter von allem, was wir in der Natur sonst beobachten. Herr T. H. Weber findet allerdings, dass, wenn man den Versuch anstellt, dieser Synchronismus, falls er anfangs nicht vorhanden war, sich rasch von selbst herstellt durch die gegenseitigen Einwirkungen der Kugeln.

Dies geschieht aber nur infolge der Reibung, die in jeder wirklichen Flüssigkeit eine grosse Rolle spielt, und deren Einführung wieder zu den oben besprochenen, bei irreversiblen Vorgängen sich anhäufenden Schwierigkeiten führen würde.

Man kann die Pulsationen der Kugeln durch ein alternierendes Ein-und Ausströmen des Äthers ersetzen; lässt man dann die Periode immer länger werden, so wird man schliesslich zu den Anschauungen von J. Bernoulli und B. Riemann geführt, die neuerdings von Herrn A. Brill genauer untersucht wurden. In dieser Theorie erscheint jedes Atom als eine fortwährende Quelle (oder Senke) des Äthers. Derselbe ist ausserhalb der Atome inkompressibel; im Innern muss er fortwährend erschaffen oder zerstört werden, ist also dem Gesetz der Erhaltung der Materie nicht mehr unterworfen. Um das Newtonsche Gesetz zu erhalten, genügt die Annahme, dass diese Atome bzw. Quellen klein gegen ihre Abstände sind. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit bei ihrem Austritt aus den Atomen spielt dann die Rolle einer sogenannten *zyklischen Koordinate*, für welche das zugehörige Moment nach den Gesetzen der Mechanik konstant bleibt; diesem Moment (nicht der Ausflussgeschwindigkeit) muss die Masse des Atoms proportional gesetzt werden. Unter diesen Umständen werden die Quellen sich scheinbar gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, und, wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit, wird die Wirkung eine *momentane* sein; es werden also weder endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, noch Perturbationen, noch Reibung stattfinden.

Eine *mechanische Erklärung* der Gravitation ist das natürlich nicht. Selbst in einer verallgemeinerten Mechanik wird die Unzerstörbarkeit aller Materie eines der Axiome sein, welches wir am schwersten aufgeben werden. Ferner besteht auch noch die Schwierigkeit, dass man einen solchen Äther, wie er hier verlangt wird, mit den Anforderungen der Optik nicht vereinbaren kann.

Wir haben damit alle die für die *mechanische Erklärung* der Schwerkraft eingeschlagenen Richtungen kennen gelernt. Es ergibt sich, glaube ich, aus dieser Übersicht, dass das Problem in dem heutigen, zu engen Sinn nicht gelöst werden kann, aber

anderseits auch, dass die Lösung vielleicht glücken wird, wenn jener Sinn in geeigneter Weise verallgemeinert wird. Was für eine *mechanische Erklärung* wesentlich ist, damit sie unserem unklaren Bedürfnis nach einer einheitlichen Naturanschauung genüge, ist nicht, dass die Gesetze der Mechanik, so wie wir sie heute kennen, unmittelbar anwendbar seien, sondern eher, dass die einzigen veränderlichen Grössen Raum und Zeit seien, neben welchen nur Invarianten ([1]), nämlich die Menge Materie in gewöhnlichem Sinne, oder die Energie ([2]), oder elektrische Ladungen usw. vorkommen.

Eine *Mechanik der Energie*, welche diese als ein im Raum stetig verbreitetes bewegliches Fluidum betrachtet, wird vielleicht zur Lösung der Frage führen.

Statt eine mechanische Erklärung zu suchen, kann man die bescheidenere und vielleicht, vorderhand wenigstens, fruchtbarere Frage sich stellen, ob die Schwerkraft nicht auf elektrische Kräfte zurückführbar sei. Die Gravitation müsste sich dann mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, und das Newtonsche Gesetz wäre durch Glieder zu vervollständigen, die von den Geschwindigkeiten und den Akzelerationen materieller Körper, dividiert durch die Geschwindigkeit des Lichtes, abhängen. Geht hierbei die Lichtgeschwindigkeit in den Nenner mit der ersten Potenz ein, so sprechen wir von einem Glied erster Ordnung; bei der zweiten Potenz, von einem solchen zweiter Ordnung usw. Für das Sonnensystem bleiben die Glieder erster Ordnung meist kleiner als $\frac{3}{10000}$; die Glieder zweiter Ordnung kleiner als 10^{-7} usw.

Wir müssen uns nun zunächst fragen, wie denn diese Annahme sich mit dem Resultat von Laplace, welches oben besprochen wurde, verträgt, wonach die Geschwindigkeit der Gravitation 10^8 mal die des Lichtes übertreffen müsste. Denn wir wissen, durch die Gesetze der Aberration, dass die relative Richtung der Gravi-

---

([1]) Das Wort *Substanz* würde demselben Begriff der Unzerstörbarkeit entsprechen, es ist aber mit metaphysischen Vorstellungen verknüpft, durch die es für den Physiker unbrauchbar wird.

([2]) Die *Einheit aller Energie*, wie sie z. B. in der Hertzschen Mechanik angestrebt ist, dürfte eines der wichtigsten Postulate sein, denen die Physik zustreben muss. Die bisherigen dynamischen Erklärungsversuche reduzieren die Gravitationsenergie auf gewöhnliche kinetische Energie, und diese Auffassung dürfte wohl zu eng sein.

tationswelle nicht dieselbe ist im bewegten und im ruhenden Zustand, und dass der Unterschied von der ersten Ordnung ist. Dies ist gerade die Laplacesche Annahme, und es ist wahrscheinlich, dass die Aberration Laplace auf sie geführt hat. Allein eine genauere Untersuchung zeigt, dass dieses Resultat in der Optik dadurch bedingt ist, dass die Wellenlängen sehr klein in bezug auf die Entfernungen sind. Für die Planeten und ihre Satelliten sind dagegen die Perioden (Umlaufszeiten) derart, dass die entsprechenden Wellenlängen gross gegen die Dimensionen des Sonnensystems wären. Die Rechnung zeigt dann, dass die Änderungen in der Ausbreitungsrichtung der Kraft, d. h. die Aberration, durch Änderungen in deren Intensität und in der Entfernung vom Ursprung der Welle derart kompensiert werden, dass die Glieder erster Ordnung verschwinden. Das neue Gravitationsgesetz wird sich vom Newtonschen nur durch sehr kleine Glieder zweiter und höherer Ordnung unterscheiden. Überdies sind diese Glieder, soweit sie überhaupt zu wahrnehmbaren Störungen Veranlassung geben könnten, keine Reibungsglieder; die Laplacesche Berechnung ist also nicht anwendbar, und man wird aus dem Folgenden ersehen, dass in der Tat *nichts uns hindert, der Schwerkraft die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes zuzuschreiben*; dass aber auch nichts uns dazu zwingt, da diese Hypothese, zur Zeit wenigstens, zu keiner Erklärung der Anomalie des Merkur führt.

Um die Gravitation auf elektrische Kräfte zurückzuführen, haben Mossotti, Zöllner und neuerdings Lorentz die Hypothese vorgeschlagen, dass die Anziehung von Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens die Abstossung gleich grosser Ladungen mit gleichem Vorzeichen etwas überwiege. Da ein Atom Wasserstoff, zum Beispiel, nach den heutigen Ansichten als eine Verbindung zweier gleich grosser, entgegengesetzter elektrischer Ladungen aufzufassen ist, so würden, nach den gewöhnlichen elektrostatischen Gesetzen, zwei Atome, die in einer gegen ihre Dimensionen grosser Entfernung voneinander sich befinden, keinerlei dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionale Kraft aufeinander ausüben. Nach der neuen Hypothese dagegen ist die Kompensation der anziehenden und abstossenden Wirkungen keine vollständige mehr : die ersteren überwiegen. Da Ladung und

Masse eines Wasserstoffions ungefähr bekannt sind, kann man berechnen, um wieviel Prozent die Anziehung zweier Ladungen, wenn sie entgegengesetztes Vorzeichen haben, ihre Abstossung bei gleichem Vorzeichen übersteigt. Es ist dies eine ausserordentlich kleine Grösse; der Unterschied beträgt nur 10^{-34} Prozent. Die Gravitationskräfte sind also ausserordentlich gering gegen die elektrischen Kräfte, die entstehen würden, wenn es gelänge, die engverbundenen positiven und negativen Ladungen irgend eines Körpers vollständig voneinander zu trennen. Dies gelingt uns (durch Reibung usw.) nur in einem verhältnismässig äusserst geringen Maasse.

Eine so kleine Dissymmetrie, deren Existenz aber unzweifelhaft wäre, würde unserem physikalisch-ästhetischen Gefühl sehr wenig entsprechen. In Wirklichkeit genügt aber eine kleine Veränderung in den Bezeichnungen (¹), um zur Superposition zweier Kräfte, einer *gewöhnlichen* elektrostatischen, und einer Gravitationskraft, zurückgeführt zu werden. Es liegt also in dieser Mossottischen Annahme nur eine veränderte Bezeichnung vor; was sie Positives aussagt ist nur, dass auf die Gravitation die Gesetze der elektrischen Kräfte anzuwenden seien, indem man Ladungen durch Massen ersetzt. Ferner muss man den Körpern für die Gravitation wie für die Elektrizität eine gewisse Leitfähigkeit zuschreiben, so dass prinzipiell Schirmwirkungen gegen die Gravitation möglich sind. Durch geeignete Hilfsannahmen kann man allerdings, wie Herr Gans gezeigt hat, diese Wirkungen sehr herabsetzen; aber eine Absorption von nur einem Millionstel für die ganze Dicke der Erdkugel zu erreichen, wie es die Erfahrung verlangt, scheint unmöglich. Es liegt hierin ein wichtiger Einwand gegen diese Theorie.

Welche Störungen würde unsere Hypothese nun für die Planetenbewegung ergeben? Hier sind die verschiedenen elektrodynamischen Theorien einzeln zu unterscheiden. Man hatte schon die früheren Formeln von Weber und Riemann auf die Gravitation angewendet. Als einzige merkliche Störung ergab sich eine langsame Drehung des Perihels, die für Merkur pro Jahrhun-

(¹) Siehe R. Gans, *Jahresber. deutsch. Math. Vereinigung*, t. XIV, 1905, p. 578.

dert nach dem Weberschen Gesetz 7″ (1), nach dem Riemannschen 14″ beträgt, für die andern Planeten aber unmerklich klein wird. Die Grössenordnung und die Richtung der Drehung stimmen mit der Erfahrung überein; ein schon an sich bemerkenswertes Ergebnis. Aber die beobachtete Anomalie beträgt 42″, ist also bedeutend grösser. Was die gegenseitigen Einwirkungen der Planeten aufeinander betrifft, so sind dieselben schon so wie so schwach, und eine Korrektion zweiter Ordnung, die etwa 10^{-5} Prozent betragen könnte, bleibt ganz ohne Einfluss auf die Beobachtung.

Herr H. A. Lorentz hat ebenfalls seine Gleichungen auf die Bewegung der Planeten angewandt. Bekanntlich führt Herr Lorentz die absoluten Geschwindigkeiten in bezug auf den Äther ein. Eine genauere Betrachtung zeigt nun, dass die einzigen Ursachen merklicher Störungen die folgenden sein können :

1° die Translationsbewegung der Sonne im Raum. Indem er die Bewegung des Sonnensystems in bezug auf die Fixsterne, wie sie sich aus der Astronomie ergibt, mit der Bewegung in bezug auf den Äther identifiziert, eine nicht unwahrscheinliche Annahme, findet Herr Lorentz Störungen, die selbst für Merkur unmerklich sind;

2° die Veränderlichkeit der Masse mit ihrer absoluten Geschwindigkeit. Nimmt man, wie schon für die Elektronen, so auch für die Materie an, es sei die Masse rein elektrodynamischen Ursprungs (die Annahme einer « wahren » Masse würde die Störungen verkleinern), so findet man wieder eine Drehung des Perihels von Merkur, die wenige Bogensekunden pro Jahrhundert beträgt (2), und es ist hierbei gleichgültig ob man die Formeln von Abraham, Bucherer-Langevin oder Lorentz für die elektromagnetische Masse zu Grunde legt.

Endlich hat neuerdings Herr Lorentz seine Theorie so abgeändert, dass die absolute Bewegung keine Rolle mehr spielt. Die Wirkung der Translation des Sonnensystems verschwindet also:

---

(1) Tisserand gibt das Doppelte, 14″; er setzt nämlich die Webersche Konstante gleich dem reziproken Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, während sie nur halb so gross ist. Diese unrichtige Angabe ist überall wiederholt worden, wo diese Frage behandelt wurde.

(2) WILKENS, *Physik. Zeitschr.*, t. VII, 1906, p. 845.

da sie aber so wie so keine merkliche Perturbation ergab, werden unsere Schlüsse dadurch nicht berührt.

Zusammenfassend kann man hieraus schliessen, dass es erlaubt ist, die elektrodynamischen Gesetze auf die Schwerkraft anzuwenden, dass sich daraus aber weder eine Ableitung der Gravitationskonstante aus elektrischen oder magnetischen Messungen noch eine Erklärung der noch unverständlichen Anomalie des Merkur ergeben.

Die elektromagnetischen Theorien sind nun aber allerdings noch zum Teil im Ausbau begriffen, und man kann die Frage aufwerfen, ob fernere Änderungen an denselben diese so sehr wichtige Reduktion der Gravitation auf elektrische Kräfte nicht in befriedigender Weise ermöglichen werden. Wir wollen zeigen, dass dies sehr wahrscheinlich der Fall sein dürfte.

Es ist hierzu nötig, genau zu wissen innerhalb welcher Grenzen man den Ausdruck der Kraft, die zwei elektrische Ladungselemente aufeinander ausüben, verändern kann, ohne mit der Erfahrung in Konflikt zu kommen. Dies hat Verfasser [1] getan. Eine *allgemeinste* Lösung zu geben ist vielleicht unmöglich; man erhält aber genügend allgemeine Ansätze, wenn man gewisse Zusatzhypothesen heranzieht, insbesondere die Annahme der Relativität der Bewegung in ihrem klassischen Sinn (nicht in demjenigen welchen Lorentz und Einstein eingeführt haben) [2], und ihre Anwendbarkeit auf die Lichtausbreitung [3].

Die besprochene Kraft zwischen zwei Ladungselementen oder Elektronen hängt von den Lagen, Geschwindigkeiten und Akzelerationen derselben ab und von dem Gesetz der Ausbreitung. Man findet nun, dass schon die Glieder zweiter Ordnung durch die Erfahrung nicht vollständig bestimmt sind, sondern noch eine

[1] W. Ritz, *Œuvres*, XVIII, p. 317.

[2] Nach dem Prinzip der Relativität bleibt die gleichförmige Translation eines Systems ohne Einfluss auf die sich darin abspielenden Vorgänge. Die Herren Lorentz u. Einstein nehmen darüber hinaus noch eine neue Definition der Zeit, der Geschwindigkeit usw. an.

[3] Man vergleiche hierüber den Aufsatz des Verfassers *Du rôle de l'Éther en Physique*, *Œuvres*, XX, p. 447.

willkürliche Konstante enthalten. Die Glieder höherer Ordnung spielen nur in den Kaufmannschen Versuchen über die Veränderlichkeit der Masse eine Rolle und bleiben grösstenteils unbestimmt. Unter diesen Umständen eröffnen sich zwei Wege, um die Gravitation auf elektrische Kräfte zurückzuführen und gleichzeitig die Bewegung des Merkur und den numerischen Wert der Gravitationskonstante abzuleiten.

Nach den heute allgemein angenommenen Vorstellungen besteht das chemische Atom aus einer gewissen Anzahl negativer Elektronen und positiver Ladungen, die deren negative Ladung kompensieren. Die Erscheinungen des Magnetismus insbesondere erfordern ferner, dass man diesen Atomladungen rotierende oder Umlaufs-Bewegungen zuschreibe. Nehmen wir an, um eine bestimmtere Vorstellung zu Grunde zu legen, dass die Elektronen ruhen, während einige der positiven Ladungen in einer gleichförmigen, sehr rapiden, allen gemeinsamen Rotation begriffen sind. Wenn zwei solche Atome A und B aus grosser Entfernung aufeinander wirken, ergibt sich Folgendes.

Die elektrostatischen Kräfte verschwinden, oder, genauer gesagt, entsprechen sehr kleinen Dipolen und hängen von der Entfernung nach einem ganz andern Gesetz ab als das Newtonsche. Für ein System, bestehend aus einer grossen Anzahl Atome, ist diese Kraft gleich Null. Aber diejenigen Kräfte, die von den Geschwindigkeiten und von den Akzelerationen abhängen, und wovon die ersteren umgekehrt proportional sind dem Quadrat der Entfernung, die letzteren der Entfernung selbst, müssen auch in Betracht gezogen werden. Zur ersteren Kategorie gehören zum Beispiel die von Ampère untersuchten Wirkungen, die zwei konstante Ströme, und somit zwei bewegte Ladungen, aufeinander ausüben. Zur letzteren sind die elektrischen Kräfte, die von Hertzschen Oszillatoren ausgehen, zu zählen; ebenso die im Licht wirkenden Kräfte, endlich der Lichtdruck.

Damit diese Kräfte zu einer Gravitationswirkung Veranlassung geben, dürfen dieselben zunächst nicht im Mittel verschwinden, wenn die Rotationsachsen der Ladungen alle möglichen Richtungen haben, was notwendig eintreten muss in einem Körper, der von einer grossen Anzahl Atome gebildet wird. Weder in der

ersten noch in der neuen Theorie von Lorentz existieren Glieder, die dieser Bedingung genügen. Wird dem aber notwendigerweise immer so sein? Eine genauere Betrachtung zeigt, dass dies Resultat in der ersten Theorie dadurch bedingt wird, dass die absoluten Geschwindigkeiten auftreten; in der neuen dadurch, dass die Prinzipien der Kinematik und der Begriff einer universellen Zeit aufgegeben werden. Dies sind aber zweifellos die unsichersten Punkte der heutigen Elektrodynamik. Sobald man, unter Beibehaltung der klassischen Kinematik, die *relativen* Bewegungen einführt, erscheinen Glieder, die einen von Null verschiedenen Mittelwert ergeben. Es gibt deren schon von der zweiten Ordnung; die resultierende Kraft ist proportional dem Mittelwert des Quadrats der Geschwindigkeiten der Ladungen [1], und hängt von einer willkürlichen Konstante ab. Die thermische Molekularbewegung genügt allerdings schon (wenn man die hierüber allgemein angenommenen Ansichten beibehält), um eine bedeutende resultierende Kraft zwischen irgend zwei Körpern A, B hervorzubringen, die der Temperatur proportional ist; dies widerspricht der Erfahrung, und es wird daher nötig, die willkürliche Konstante so zu wählen, dass diese Kraft verschwindet. Aber weitere Glieder, von 4ter oder 6ter Ordnung, mit noch unbekannten Koeffizienten würden diesem Einwand nicht ausgesetzt sein, falls die Bewegungen der Ladungen im Innern der Atome gross sind gegen die Wärmebewegung, was von vornherein wahrscheinlich ist. Man wird somit eine resultierende Kraft erhalten, die dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist, der Anzahl rotierender Ladungen, die die Körper A und B enthalten, direkt proportional, wobei der Koeffizient zunächst noch unbekannt ist. Es genügt, anzunehmen, dass diese Anzahl in jedem Atom der Masse desselben proportional ist, und über den Koeffizienten in geeigneter Weise zu verfügen, um das Newtonsche Gesetz zu erhalten [2]. Selbstverständlich wird eine zukünftige Theorie diesen

(1) Siehe *Œuvres*, XVIII, p. 424, 425.

(2) Wenn die rotierenden Ladungen unveränderlich an die Atome gebunden sind, werden für die Gravitation keine Schirmwirkungen möglich sein. Denn dieselben entstehen bei elektrischen Kräften durch die Verschiebungen der Elektronen innerhalb der Körper; für die magnetischen Kräfte durch die Orientation der Elementarmagnete unter dem Einfluss der von aussen einwirkenden Kräfte. Keine dieser beiden Wirkungen käme hier zu stande.

Koeffizienten *a priori* bestimmen müssen oder ihn aus elektrischen oder magnetischen Messungen ableiten : die so erhaltene Gravitationskonstante wird mit der direkt beobachteten identisch sein müssen. Da die betreffenden Glieder von so hoher Ordnung sind, ist es erklärlich, dass, wie wir oben auseinander gesetzt haben, die Gravitationswirkung zweier Atome aufeinander um so viel kleiner ist als die elektrostatischen Wirkungen ihrer Ladungen es einzeln wären.

Neben dem Glied 4ter (oder 6ter) Ordnung, aus welchem wir die Gravitation abgeleitet haben, wird auch noch das nächste Glied 6ter (oder 8ter) Ordnung zu berücksichtigen sein, welches ja in bezug auf die Gravitationskräfte zweiter Ordnung ist. Über seinen Koeffizienten wissen wir nichts. Es wird wieder eine Rotation des Perihels von der beobachteten Grössenordnung bedingen, wie in allen schon behandelten Fällen, und es genügt, dass der Koeffizient grösser sei wie in jenen Fällen, um die Anomalie des Merkur zu erhalten.

Bisher haben wir nur die elektrodynamischen Glieder berücksichtigt, die von den Geschwindigkeiten abhängen und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional sind. Andere Glieder aber sind der Akzeleration eines der beiden Ladungselemente und einer gewissen Potenz von deren relativen Geschwindigkeit proportional; sie sind dritter oder höherer Ordnung und der Entfernung umgekehrt proportional. Aber in einem rotierenden Elektron wird die Akzeleration des einen Teiles durch die entgegengesetzte des andern kompensiert, und zwar um so mehr, als die Entfernung der beiden Elektronen grösser gegen ihren Durchmesser a sein wird. Eine genaue Rechnung, bei der nach Potenzen von $\frac{a}{r}$ entwickelt wird, zeigt dass das Glied in $\frac{1}{r}$ verschwindet, und dass im allgemeinen ein Glied in $\frac{a}{r^2}$ bleibt, für welches der Mittelwert, über alle möglichen Lagen der Rotationsachsen genommen, von Null verschieden ist. Wir erhalten also eine dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportionale Kraft, deren Koeffizient der Grösse a, d. h. den Dimensionen des Elektrons, und einer Potenz der reziproken Lichtgeschwindigkeit proportional ist, die mindestens gleich drei ist, woraus sich wieder eine Erklärung der Gravitation und ihres relativ ausserordentlich

geringen Betrags ergibt. Der Koeffizient dieses Gliedes, ebenso wie sämtlicher Glieder von höherer als der zweiten Ordnung (mit Ausnahme des Lichtdrucks, der uns hier nicht interessiert) ist vorderhand unbekannt, und so erhalten wir dasselbe Resultat wie oben : *es wird eine Reduktion der Gravitation auf elektrische Kräfte, eine Ableitung der Gravitationskonstante aus elektromagnetischen Messungen und eine Erklärung der Merkuranomalie durch die Anwendung der Gesetze der Elektrodynamik voraussichtlich möglich sein, wenn erst diese Gesetze mit genügender Genauigkeit bekannt sind.*

In allen Fällen würde dann die Gravitationswirkung auf der dynamischen Konstitution der Atome beruhen.

Wenn also zwei Jahrhunderte eifriger Forschung uns noch keinen Anhalt über irgend einen etwaigen Zusammenhang der Gravitation mit andern Erscheinungen, und besonders mit den elektrischen Kräften, gegeben haben, und auch über eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit derselben uns nichts bekannt ist, so ist es doch wahrscheinlich, dass dies nur von unserer unvollkommenen Kenntnis der Gesetze der Elektrodynamik herrührt. In absehbarer Zeit dürfen wir also hoffen, wenn auch vielleicht nicht eine « mechanische Erklärung », so doch eine Zurückführung der Gravitation auf elektrische Kräfte zu erzielen. Für die Einheit unserer Weltanschauung wird dies ein Schritt von der grössten Tragweite sein.

XXII.

LA GRAVITATION [1].

Supplément français de la « Scientia », Vol. V, N° X-2 (3e Année), 1er Avril 1909, p. 152-165.

Lorsque Newton découvrit que les mouvements des corps célestes peuvent être calculés et prévus avec une précision étonnante, en admettant qu'ils s'attirent suivant sa loi célèbre, ni lui ni ses contemporains ne considérèrent la question comme épuisée. Malgré son extrême simplicité, cette solution du problème du mouvement des astres, en faisant intervenir une action agissant sans intermédiaire ou, ce qui revient presque au même, de façon *instantanée* à toutes les distances, répugnait aux esprits. Et cette répugnance, qu'on constate encore de nos jours, n'est pas sans fondement psychologique : elle est l'expression d'un sentiment profond de l'unité des forces physiques, qui, dans leur extrême diversité, ont toujours besoin d'un certain temps pour manifester leur action, et, si l'action a lieu entre deux corps séparés par un milieu intermédiaire, modifient ce milieu de façon sensible [2]. La lumière faisait, semblait-il, exception ; mais Galilée ne douta pas un seul instant que ce ne fût là qu'une apparence, et l'on sait que l'expérience lui a donné raison. Le désir de se faire du milieu

[1] Traduit par l'auteur lui-même.

[2] Lorsque, il y a cent ans, l'action à distance était communément admise pour la gravitation, ce même sentiment de l'unité de la nature a amené les physiciens à considérer toutes les forces comme agissant à distance, même les forces moléculaires. Mais on sait que ce point de vue a été relativement stérile.

hypothétique et de la propagation une vue précise a conduit, de Newton à Fresnel, aux lois de l'Optique. Pour les actions électriques, l'expérience a encore donné raison au sentiment dont nous parlons ; seule, la gravitation ne s'y conforme pas. On a peine à croire qu'il y ait là plus qu'une apparence, et de nombreuses théories ont été proposées, dont la plupart entraînent un temps fini de propagation et certaines corrections de la loi de Newton, susceptibles d'une vérification expérimentale. Nous allons les passer en revue, en les groupant convenablement, ce qui les réduit à quelques types simples, et en cherchant surtout à préciser la *réalité* qu'elles prétendent exprimer, c'est-à-dire les conséquences susceptibles de vérification expérimentale qui en découlent.

Evidemment, on ne peut songer à aborder par une expérience directe la question de la vitesse de propagation de la gravitation comme on l'a fait pour la lumière et l'électricité. Mais les conséquences indirectes qui découlent de chaque hypothèse suffisent en général, vu l'extrême précision des observations astronomiques, pour une première vérification. Les perturbations provenant des termes nouveaux introduits par chacune de ces hypothèses doivent, en général, ne pas dépasser la limite des erreurs d'expérience ; mais il y a des exceptions. Les observations astronomiques, accumulées pendant des siècles, ont permis de mettre en évidence certaines anomalies que n'explique pas la loi de Newton, et que devra expliquer la loi qui prétend la remplacer. Parmi ces anomalies, la plus considérable, de beaucoup, est celle de la planète Mercure, dont l'ellipse tourne très lentement dans son plan, sous l'influence des autres planètes ; mais la rotation calculée est inférieure à la rotation observée ; l'excès est d'environ $42''$ d'arc *par siècle*. C'est bien peu de chose, mais il a été impossible d'éliminer cette différence. Il est d'ailleurs possible que Vénus et la Terre présentent une anomalie analogue, bien que de 5 à 10 fois plus faible. Car l'excentricité des ellipses de ces planètes est extrêmement petite, de l'ordre de $\frac{1}{100}$; ce sont presque des cercles. Or il est manifestement impossible d'observer la rotation d'une orbite circulaire sur elle-même ; il suffira d'augmenter ou de diminuer dans un rapport convenable le temps de révolution de la planète pour obtenir l'effet de la rotation supposée. Dans

l'espèce, la correction, déjà minime, que subiraient du fait d'une telle anomalie les positions de Vénus et de la Terre si leurs orbites étaient aussi excentriques que celle de Mercure, pourra être réduite au centième environ de sa valeur par une correction insignifiante (même en Astronomie) des temps de révolution. Pour la planète Mars, dont l'excentricité est 0,09, on sera ainsi conduit à prévoir une perturbation légère, analogue à celle de Mercure, mais bien plus faible : c'est en effet ce qu'a donné l'observation.

Les autres irrégularités observées concernent le mouvement de la Lune et celui de la comète Encke. Nous n'en parlerons pas ici.

Les expériences montrent qu'il n'existe pas, pour la gravitation, d'écrans protecteurs comme pour l'électricité [1], et aucune influence du milieu matériel ne peut être mise en évidence. Ce sont là, pour les théories dont nous allons parler, deux points importants : cela est vrai avant tout pour l'hypothèse qui, d'une manière ou d'une autre, cherche non à donner une explication de la gravitation dans le sens ordinaire, mais à la réduire à des actions électriques, de manière à déduire par exemple la constante de gravitation de mesures d'un tout autre genre. Il y aurait là une réduction du problème fort importante pour l'unité de nos conceptions physiques.

Les explications mécaniques proposées peuvent se grouper en *statiques* et *dynamiques*. Dans les premières, la matière déformerait l'éther environnant, et cette déformation, se propageant de proche en proche, agirait sur d'autres portions, de manière à donner l'*apparence* d'une attraction. Si la matière pondérable se trouve en équilibre, *il en sera de même* (du moins au bout d'un certain temps) *de l'éther*. Cette hypothèse, la plus simple, remonte à Newton. Mais Maxwell a montré que, sans la préciser davantage, on peut la rejeter d'emblée. Car elle exige que l'énergie de gravitation soit l'énergie de déformation du milieu : d'après un principe général de la Statique, cette énergie devra

(1) Si une partie de la matière d'une planète était protégée en partie contre l'attraction du Soleil par l'autre, la force totale ne serait plus proportionnelle à la masse totale, d'où une perturbation très sensible, à moins que l'absorption de la gravitation ne soit excessivement faible, de l'ordre du millionième pour toute l'épaisseur de la Terre.

toujours être, après la déformation, plus grande qu'en l'état non déformé, c'est-à-dire en l'absence de corps matériels. Or, c'est le contraire qui serait vrai ici : les forces de gravitation étant *attractives*, l'énergie potentielle d'un système de corps devient plus petite lorsque les masses — et par conséquent, la déformation de l'éther — augmentent; elle augmente lorsque la déformation diminue. Pour les actions électriques, qui suivent, *au signe près*, la même loi que la gravitation, l'énergie, au contraire, suit une marche inverse ; c'est ce qui faisait entrevoir à Maxwell la possibilité d'une explication des forces électrostatiques, où il a d'ailleurs échoué. On voit donc, en résumé, qu'un « éther », capable de donner les apparences de la gravitation, serait, même en l'absence de corps matériels, en état d'équilibre instable, ce qui est inadmissible.

Nous sommes donc nécessairement conduits à introduire des mouvements cachés, de manière à avoir affaire à une énergie de nature cinétique même lorsque les masses pondérables, seules perceptibles à nos sens, sont au repos. Le critérium du minimum de l'énergie, dès lors, ne s'applique plus, et le problème devient résoluble en principe.

La plus ancienne en date de ces théories *dynamiques* est celle de Lesage, reprise depuis par Isenkrahe et d'autres. Elle admet que l'espace est parcouru en tous sens par des « corpuscules ultramondains » doués de très grandes vitesses ; lorsqu'un corps pondérable A unique subit le choc de ces corpuscules, il restera au repos, par raison de symétrie ; mais s'il existe, à quelque distance, un autre corps B, ce corps arrêtera les corpuscules marchant dans la direction BA; le corps A ne subissant plus autant de chocs dans cette direction, la compensation n'a plus lieu, et A sera poussé vers B; de même B vers A. Il semblera y avoir attraction.

Une analyse plus attentive [1] montre qu'il faut considérer les corpuscules comme dénués plus ou moins complètement d'élasticité, de sorte que leur choc engendre de la chaleur ; sinon B

---

[1] Comparer H. Poincaré, *Science et Méthode*, p. 263, Paris 1908; J. Zenneck, Article *Gravitation* de l'*Encyclopédie des Sciences mathém.*, t. V, p. 57. Leipzig, 1903.

réfléchira vers A autant de corpuscules qu'il en arrête, l'effet est nul. De plus, comme il n'existe pas d'écrans pour la gravitation, les atomes des corps pondérables doivent se trouver à de très grandes distances les uns des autres, par rapport à leurs dimensions ; enfin, les atomes chimiques doivent être composés de particules identiques entre elles, et beaucoup plus grandes que les « corpuscules ultramondains ». On obtient bien alors la loi de gravitation pour des corps au repos. Dans le cas de corps mobiles, il y aura frottement, comme dans un gaz. De plus, la gravitation se propagera avec une vitesse finie, au plus égale à celle des corpuscules, et l'action subie par un corps ne dépendra que des vitesses relatives du corps et des corpuscules. C'est là une hypothèse envisagée déjà par Laplace ; elle conduit, nous l'avons dit, à une sorte de frottement qui devrait retarder de plus en plus la marche des planètes et de la Lune. Une telle action serait décelée avec une précision extrême par les éclipses, sur lesquelles nous possédons des renseignements très anciens, comme on sait ; on conclut de là à une limite inférieure de la vitesse de l'onde de gravitation ainsi conçue : cette vitesse est, d'après Laplace, au moins cent millions de fois celle de la lumière. Quant aux corpuscules eux-mêmes, leur vitesse est bien plus invraisemblable encore. En combinant l'ensemble des perturbations que l'hypothèse de Lesage introduit en Astronomie, M. Poincaré arrive, pour cette vitesse, à une limite inférieure égale à 24.10^{17} fois celle de la lumière. En même temps, le frottement produirait une quantité de chaleur telle que, pour la Terre, elle serait 10^{20} fois plus grande que celle que le Soleil émet dans toutes les directions dans le même espace de temps.

De tels résultats permettent de déclarer cette théorie définitivement inadmissible. La même conclusion s'impose pour une modification des hypothèses de Lesage, proposée d'abord par Hooke (contemporain de Newton), et examinée récemment par M. H.-A. Lorentz, qui remplacerait les corpuscules par des ondes sillonnant l'éther dans toutes les directions. Ces ondes devront être absorbées, du moins en partie, par la matière gravitante, sinon il n'y a point d'action résultante ; il y aura donc production de chaleur, et d'autre part, il ne devra pas exister d'écrans pour la gravitation. Nous aurons donc affaire à des rayons qui, en passant à

travers la Terre, ne seront affaiblis que dans la proportion de 1 millionième : cela est absolument invraisemblable : aussi M. Lorentz rejette-t-il cette hypothèse. D'après les calculs de M. Poincaré, la chaleur produite, ici encore, serait telle que la température de la Terre s'accroîtrait de 10^{13} degrés par seconde. Dans toutes ces théories, le phénomène de gravitation est accompagné de phénomènes *irréversibles* très considérables. Il n'en est plus de même pour les explications *hydrodynamiques* de Bjerknes et de Riemann.

Nous ne citons les premières que pour mémoire. Si l'on suppose dans un fluide incompressible et sans frottement un système de sphères dont les rayons augmentent et diminuent périodiquement et *simultanément*, et si l'intensité des pulsations est supposée proportionnelle aux masses des sphères-atomes, on obtient bien la loi de Newton pour les actions apparentes que ces corps, par l'intermédiaire du fluide, exercent les uns sur les autres. Mais cette simultanéité est bien plus incompréhensible encore que la loi de Newton elle-même, et bien plus éloignée de tout ce que nous observons dans la nature. M. T.-H. Weber, il est vrai, trouve que lorsqu'on fait l'expérience, ce synchronisme, s'il n'existait pas au début, s'établit rapidement par les actions même des sphères les unes sur les autres ; mais ce n'est qu'en vertu du frottement, facteur important dans tous les fluides réels, dont l'introduction nous ramènerait aux difficultés signalées pour les théories précédentes.

On peut remplacer la pulsation des sphères par une émission et une absorption alternatives d'éther ; en prolongeant de plus en plus la période de pulsation, on est ainsi amené à la conception de J. Bernoulli et B. Riemann, dont l'étude a été récemment reprise par M. Brill. Dans cette manière de voir, tout atome serait une source continuelle d'éther (ou en absorberait continuellement). Cet éther est incompressible hors des atomes ; à leur intérieur, il se détruit ou se crée continuellement, c'est-à-dire n'est plus soumis à la loi de la conservation de la masse.

Pour obtenir la loi de Newton, il faut que les dimensions des atomes-sources soient petites par rapport à leurs distances. La vitesse du fluide à sa sortie des atomes joue alors le rôle de ce qu'on appelle une *coordonnée cyclique*, et, d'après les principes

généraux de la Mécanique, le *moment* correspondant reste constant en l'absence de forces extérieures. C'est ce moment (et non la vitesse initiale) qui doit être supposé proportionnel à la masse de la source. Dans ces conditions, les sources sembleront graviter les unes vers les autres conformément à la loi de Newton, et l'action, grâce à l'incompressibilité du fluide, semblera *instantanée;* il n'y aura ni perturbations, ni frottement.

Ce n'est évidemment pas là une *explication mécanique* de la gravitation : même dans une mécanique généralisée, l'indestructibilité de la matière sera certainement un des axiomes que nous consentirons le plus difficilement à sacrifier. Il est, de plus, impossible d'identifier ce fluide avec l'éther de l'Optique.

Arrivés au bout de cette étude des explications mécaniques de la gravitation, nous croyons qu'il s'en dégage d'un côté l'impossibilité d'une résolution du problème dans le sens trop restreint où on l'entend aujourd'hui ; de l'autre côté, l'impression que cette résolution pourra devenir facile le jour où une généralisation convenable de ce que nous entendons par « explication mécanique » aura été donnée. Car ce qui est essentiel à une telle explication, pour qu'elle satisfasse au sentiment confus mais profond que nous avons de l'unité de la Nature, ce n'est pas que les lois de la Mécanique, telles que nous les admettons aujourd'hui, y soient directement applicables : c'est plutôt que les seules quantités variables soient l'espace et le temps, et qu'à côté d'elles ne subsistent plus que des *invariants* [1] qui seront soit la quantité de matière au sens ordinaire, soit l'énergie [2], soit des charges électriques, etc., etc. Une *mécanique de l'Énergie*, qui considérerait celle-ci comme un fluide répandu dans l'espace, donnera peut-être un jour la solution cherchée.

Au lieu de chercher une explication mécanique, on peut se poser la tâche plus modeste, et peut-être, pour l'instant du moins,

---

[1] Le mot *substance* serait à peu près équivalent, mais possède un sens métaphysique qui le rend impropre à l'usage des physiciens.

[2] *L'unité de l'Énergie*, réalisée, par exemple, dans la Mécanique de Hertz, est un des postulats les plus importants que devra réaliser la Physique de l'avenir. Les explications dynamiques de la gravitation exposées plus haut réduisent l'Énergie de gravitation à de l'Énergie cinétique ordinaire, et c'est là, sans doute, un point de vue trop particulier.

plus féconde en aperçus et en conséquences nouvelles, de réduire la gravitation aux actions électriques. On sera ainsi amené à attribuer à la gravitation une vitesse de propagation égale à celle de la lumière, et à compléter la loi de Newton par de nouveaux termes dépendant des vitesses et des accélérations. Lorsque la vitesse d'un corps matériel, divisée par la vitesse de la lumière, entre dans les équations, nous dirons que c'est là un terme du premier ordre; pour les corps du système solaire, ce quotient ne dépasse guère 3 dix-millièmes. Son carré (10^{-7}) sera dit *du second ordre*, etc.

Cela posé, il faut d'abord se demander comment cette hypothèse peut se concilier avec le résultat énoncé plus haut, dû à Laplace, et qui exigeait une vitesse 10^8 fois supérieure à celle de la lumière ? Car enfin, nous savons, par le phénomène de l'aberration, que la direction de l'onde de gravitation différera, lorsqu'il y a un mouvement relatif, de ce qu'elle serait s'il y avait repos, et que la différence est proportionnelle à la vitesse relative, c'est-à-dire *du premier ordre*. C'est précisément ce qu'avait admis Laplace : c'est même l'aberration qui a dû le conduire à son hypothèse. Mais une analyse plus détaillée montre que ce résultat tient à ce que, en Optique, les longueurs d'onde sont très petites par rapport aux distances. Pour les planètes et leurs satellites, les périodes ou temps de révolution, au contraire, sont telles que les longueurs d'ondes correspondantes seraient grandes par rapport aux dimensions du système solaire. Le calcul montre qu'alors le changement de direction de l'onde, ou aberration, est compensé, en ce qui concerne les termes du premier ordre, par des changements de la distance au point origine de l'onde, et de l'intensité des forces ; dans la nouvelle hypothèse, la loi de Gravitation ne diffère de celle de Newton que par des termes très petits du second ordre. Encore ces termes, en tant qu'ils jouent un rôle effectif dans les perturbations, ne sont-ils pas des termes de frottement ; le calcul de Laplace n'est plus applicable dans ces conditions, et l'on va voir qu'en effet *rien n'empêche d'attribuer à la gravitation la vitesse de propagation de la lumière*, mais que, en revanche, rien ne nous y oblige non plus, cette hypothèse ne donnant pas, du moins à l'heure qu'il est, une explication de l'anomalie de Mercure.

Pour réduire la gravitation aux actions électriques, Mossotti, Zöllner, puis Lorentz ont proposé d'admettre que l'attraction des charges de signe contraire est un peu plus grande que la répulsion des charges de même signe. Un atome d'hydrogène, par exemple, résultant, dans les vues actuelles, de la réunion d'une charge négative et d'une charge positive égale, deux atomes, placés à une distance grande par rapport à leurs dimensions, n'exerceraient l'un sur l'autre aucune action proportionnelle à l'inverse du carré des distances, d'après les lois ordinaires de l'Électrostatique; d'après l'hypothèse nouvelle, la compensation des actions attractives et répulsives ne serait plus complète. La charge et la masse d'un ion d'hydrogène étant connues, du moins approximativement, on peut calculer de combien diffère l'attraction des ions de même signe : cette différence est extrêmement petite, elle n'est que de 10^{-34} pour 100. Les forces de gravitation sont donc extrêmement faibles par rapport aux forces électriques qui se produiraient s'il nous était possible de séparer complètement les électricités intimement unies dans les corps. Nous n'y réussissons que dans une mesure relativement très faible, par le frottement, etc.

Une si minime dissymétrie, mais dont l'existence serait supposée hors de doute, serait bien contraire à nos sentiments esthétiques, si j'ose m'exprimer ainsi. Et, en réalité, il suffit d'un petit changement de notations ([1]) pour être ramené à la superposition de deux forces, l'une électrostatique dans le sens ordinaire, l'autre gravifique. Il n'y a donc dans cette hypothèse de Mossotti qu'un changement purement verbal; ce qu'elle énonce de positif, c'est qu'il convient d'appliquer à la gravitation les lois de l'Électrodynamique en remplaçant les charges par des masses. Seulement, il faudra attribuer aux corps une certaine conductibilité par rapport à la gravitation; il existera, en principe, des écrans. Par des hypothèses appropriées, on peut bien diminuer considérablement leur imperméabilité, comme l'a montré M. Gans; mais il me semble impossible de n'obtenir qu'une absorption de 1 millionième de la force pour toute l'épaisseur du globe terrestre, comme nous avons vu que l'expérience l'exige. C'est là une première grave objection à cette théorie.

([1]) *Voir* R. Gans, *Jahresber. deutsch.* (*Math.-Vereinigung*, t. XIV, p. 578, 1905).

Quelles sont les perturbations qu'entraînerait notre hypothèse pour le mouvement des planètes? Ici, il faut distinguer les diverses théories électrodynamiques les unes des autres. Les anciennes lois électrodynamiques de Weber et de Riemann avaient déjà été appliquées à la gravitation. La seule perturbation sensible s'est trouvée être une rotation lente du périhélie, de 7″ par siècle pour Mercure [1], d'après la loi de Weber, de 14″ d'après celle de Riemann, insensible d'ailleurs pour les autres planètes. C'est bien l'ordre de grandeur que donne l'expérience, et le sens de la rotation est également exact; cela est déjà remarquable. Mais l'anomalie observée est de 42″, c'est-à-dire considérablement plus grande. Quant aux actions des planètes les unes sur les autres, elles sont déjà bien faibles, et une correction du second ordre, c'est-à-dire de la grandeur 10^{-5} pour 100 environ, est absolument insensible.

M. Lorentz a également appliqué ses équations au mouvement des planètes. On sait que M. Lorentz introduit les vitesses absolues par rapport à l'éther; un examen attentif montre alors que les seules causes perturbatrices sensibles sont :

1° le mouvement de translation du Soleil dans l'espace. En identifiant le mouvement par rapport à la moyenne des étoiles fixes, donné par l'Astronomie, avec le mouvement par rapport à l'éther, hypothèse assez plausible, M. Lorentz trouve des perturbations insensibles, même pour Mercure;

2° la variabilité de la masse, fonction de la vitesse absolue. Si l'on admet l'hypothèse extrême, adoptée généralement pour les électrons, d'une masse entièrement électro-magnétique, on trouve encore une rotation du périhélie de Mercure de quelques secondes d'arc par siècle [2], et il est indifférent, pour ce résultat, que l'on applique les formules d'Abraham, de Bucherer-Langevin ou de Lorentz pour la masse électro-magnétique;

3° enfin, M. Lorentz a modifié récemment sa théorie de manière à la rendre conforme au principe de la relativité du mouvement. La translation du Soleil dans l'espace ne jouera donc plus de rôle

---

[1] Tisserand donne le double, 14″; cela tient à ce qu'il identifie la constante de Weber avec la réciproque du carré de la vitesse de la lumière, alors qu'elle n'en est que la moitié. Cette indication erronée a passé dans tous les ouvrages qui ont traité de cette question.

[2] WILKENS, *Physik. Zeitschr.* t. VII, 1906, p. 846.

du tout ; mais comme ce rôle était déjà insensible dans la première théorie, nos conclusions ne sont pas modifiées. En résumé, il est loisible d'appliquer les lois électrodynamiques à la gravitation ; mais elles ne peuvent servir, actuellement, ni à supprimer les divergences qui subsistent entre le calcul et l'expérience, ni à déduire la constante de gravitation de mesures électriques ou magnétiques.

Pourtant, les théories électrodynamiques sont en pleine évolution, et l'on peut se demander si les changements futurs ne permettront pas d'effectuer cette réduction si importante de la gravitation aux forces électriques d'une façon plus satisfaisante. Nous allons voir que cela est, en effet, *très probable*.

Pour cela, il faut savoir exactement dans quelles limites on peut faire varier l'expression de la force que deux charges élémentaires exercent l'une sur l'autre (expression qui dépend des positions, vitesses, accélérations et de la loi de propagation), sans entrer en contradiction avec les données de l'expérience. C'est ce qu'a fait l'auteur de cet article [1]. Sans chercher à donner la solution la plus générale, ce qui, peut-être, est impossible, on est conduit à des résultats suffisamment instructifs en admettant certaines hypothèses accessoires, telles que le principe de la relativité du mouvement dans son sens classique (et non dans celui que lui donnent MM. Lorentz et Einstein [2]), et en le considérant comme applicable également à la propagation de la lumière [3]. On trouve alors que les termes du second ordre, déjà, ne sont pas déterminés entièrement par l'expérience et contiennent un facteur arbitraire ; quant aux termes d'ordre supérieur, ils ne jouent de rôle que dans l'expérience de M. Kauffmann sur la variabilité de la masse, et restent presque entièrement arbitraires. Dès lors, voici comment on peut espérer réduire la gravitation aux forces électriques et expliquer en même temps le mouvement de Mercure et la valeur numérique de la constante de gravitation.

---

(1) W. Ritz, *Œuvres*, XVIII, p. 317.

(2) La translation uniforme d'un système, d'après le principe de relativité, est sans influence sur les phénomènes qui s'y passent. MM. Lorentz et Einstein supposent en outre une définition nouvelle du temps, de la vitesse, etc.

(3) *Voir*, à ce sujet, l'article de l'auteur *Du rôle de l'Éther en Physique*, *Œuvres*, XX, p. 447.

Dans les idées communément admises aujourd'hui, l'atome chimique est composé d'un certain nombre d'électrons négatifs et de charges positives qui compensent la charge négative. Les phénomènes du Magnétisme, entre autres, exigent de plus qu'on attribue aux charges atomiques des mouvements de rotation ou de circulation. Supposons, pour fixer les idées, que les charges négatives soient au repos, et que quelques-unes des charges positives tournent sur elles-mêmes avec une grande vitesse, la même pour toutes. Lorsque deux atomes A, B, ainsi constitués agissent l'un sur l'autre à une distance grande par rapport à leurs dimensions, que va-t-il se passer ? Les forces électrostatiques sont nulles, ou plus exactement, elles correspondent à des dipoles très petits et dépendent de la distance, suivant une loi toute différente de celle de Newton ; ces forces sont nulles pour un système d'atomes nombreux. Mais les forces dépendant des vitesses et des accélérations, dont les premières sont inversement proportionnelles au carré de la distance, les secondes à la distance elle-même, doivent être prises également en considération. A la première catégorie appartiennent, par exemple, les forces étudiées par Ampère, que deux courants constants, et par conséquent deux électrons en mouvement, exercent l'un sur l'autre ; à la seconde, les forces électriques émanant des oscillateurs hertziens, celles qui constituent les ondes lumineuses, enfin la pression de la lumière.

Pour que ces forces donnent lieu au phénomène de gravitation, il faudra tout d'abord qu'elles ne soient pas nulles en moyenne lorsque les axes de rotation auront toutes les directions possibles, ce qui arrivera nécessairement dans un corps composé d'un grand nombre d'atomes. Dans la première théorie de Lorentz, pas plus que dans sa nouvelle théorie, conforme au principe de relativité, il n'existe de termes donnant, dans ces conditions, une moyenne différente de zéro. L'explication échoue donc pour ces théories. Mais est-ce là un résultat nécessaire ? Une analyse plus exacte montre qu'il est obtenu par l'introduction des vitesses absolues, dans l'ancienne théorie ; par l'abandon des principes de la cinématique et de la notion d'un temps universel, dans la nouvelle. Et ce sont là, certainement, les parties les plus hypothétiques de l'Électrodynamique actuelle. Dès qu'on introduit des vitesses relatives en conservant la cinématique classique, on voit apparaître des

termes donnant une résultante différente de zéro. Il y en a du second ordre ; la résultante est proportionnelle à la moyenne du carré des vitesses des charges (¹), et dépend d'une constante arbitraire. Mais ici une objection se présente : l'agitation thermique suffit, lorsqu'on admet les idées généralement reçues à ce sujet, pour donner lieu à une action considérable des corps A et B l'un sur l'autre, dépendant de la température, ce qui est contraire à l'observation ; il faut donc disposer du facteur arbitraire de manière à annuler l'effet de ces termes de second ordre. Mais d'autres termes, du 4ième ou du 6ième ordre, à coefficients inconnus encore, ne prêteront plus à cette objection, à la condition que les vitesses intra-atomiques soient grandes par rapport aux vitesses produites dans l'agitation thermique, ce qui est probable *a priori*. On aura alors une résultante inversement proportionnelle au carré des distances, affectée d'un coefficient encore inconnu, et proportionnelle aux nombres de charges en rotation que contiennent les corps A et B. Il suffira d'admettre que ce nombre est, dans tout atome, proportionnel à la masse de cet atome, et de disposer convenablement du coefficient pour obtenir la loi de Newton (²). Bien entendu, les théories futures devront déterminer ce coefficient *a priori*, ou par des expériences électriques ou magnétiques ; la constante de Gravitation ainsi obtenue devra être identique avec la constante expérimentale. Les termes étant d'un ordre si élevé, on s'explique aisément que, comme nous l'avons dit plus haut, la force de gravitation de deux atomes soit si petite par rapport aux actions électrostatiques de leurs charges.

A côté du terme de 4ième (ou 6ième) ordre qui nous aura servi à expliquer la gravitation, il faudra considérer encore le terme suivant, du 6ième (ou 8ième) ordre, qui, par rapport aux phénomènes de gravitation, sera du second. Sur son coefficient, nous ne savons rien ; il donnera lieu à une rotation du périhélie des planètes de l'ordre de grandeur voulu, et il suffira que ce coefficient soit plus

(¹) Voir *Œuvres*, XVIII, p. 317.

(²) Si les charges en relation sont indissolublement liées aux atomes, il n'existera pas d'écrans pour la gravitation. Car les écrans pour les forces électriques ou magnétiques sont dus aux déplacements des électrons dans les corps, ou aux orientations des aimants élémentaires, sous l'influence des forces électromagnétiques. Ni l'un ni l'autre de ces effets n'aurait lieu ici.

grand qu'il ne l'est dans les lois étudiées plus haut, pour obtenir l'anomalie de Mercure.

Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que les termes électrodynamiques dépendant des vitesses et inversement proportionnels aux carrés des distances. D'autres, proportionnels à l'accélération d'un des deux éléments de charge qui agissent l'un sur l'autre, et à sa vitesse relative par rapport à l'autre, élevée à une certaine puissance, sont du 3ième ordre ou d'un ordre supérieur, et inversement proportionnels à la simple distance. Mais dans un électron en rotation, l'accélération d'une des parties sera compensée par l'autre d'autant plus complètement que la distance r des électrons sera plus grande par rapport à leur diamètre a. En faisant le calcul exact, par un développement en série procédant suivant le rapport $\frac{a}{r}$, on trouve que le terme en $\frac{1}{r}$ s'évanouit, et qu'il reste, en général, un terme en $\frac{a}{r^2}$, pour lequel la moyenne prise par rapport à toutes les directions possibles des axes de rotation est différente de zéro. Nous aurons donc une force inversement proportionnelle au carré des distances, contenant en facteur les dimensions de l'électron et une puissance au moins égale à 3 de l'inverse de la vitesse de la lumière : ce sera encore une explication possible de la gravitation et de sa petitesse extrême. D'ailleurs, le coefficient de ce terme, de même que celui de tous les termes supérieurs au second (sauf celui qui donne la pression de la lumière et qui ne nous intéresse pas ici), reste encore indéterminé, *et l'on en conclura, comme plus haut, qu'une explication de l'anomalie de Mercure et une détermination de la constante de gravitation par des mesures électromagnétiques pourront sans doute être déduites des lois de l'Électrodynamique, lorsque celles-ci seront connues avec plus d'exactitude.*

Dans l'une et l'autre hypothèse, la Gravitation tiendrait essentiellement à la constitution dynamique des atomes.

En résumé, si deux siècles de recherches ne nous ont donné encore aucune indication d'une connexion entre la gravitation et d'autres phénomènes, en particulier les phénomènes électromagnétiques ; si la propagation de cette force dans un temps fini reste problématique, il est probable que cela tient à l'imperfection

de nos connaissances des lois exactes des phénomènes électriques, et que nous pouvons, dans un avenir plus ou moins prochain, espérer, à défaut d'une explication mécanique de a gravitation, une réduction de cette force aux actions électriques. Ce sera là, pour l'unité de nos conceptions physiques, un pas de la plus haute importance.

XXIII.

ÜBER DIE

GRUNDLAGEN DER ELEKTRODYNAMIK

UND DIE

THEORIE DER SCHWARZEN STRAHLUNG.

Physikalische Zeitschrift, 9. Jahrgang, No 25, Seite 903-907.

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift [1] erschienenen Mitteilung « Zur Strahlungstheorie » kommt Herr H.-A. Lorentz zum Schluss, dass die von Jeans [2] und ihm [3] entwickelte Theorie der « schwarzen Strahlung » mit der Erfahrung nicht vereinbar sei; da nun aber die Ableitung der Strahlungsformel auf diesem Wege nur hinfällig werden könne, wenn an den elektromagnetischen Grundgesetzen wesentliche Änderungen angebracht würden, so ergebe sich daraus die Notwendigkeit solcher Änderungen, und zwar müsse, im Sinne der Planckschen Theorie, irgend etwas einem Zeit-Energie-Atom Ähnliches in die Theorie aufgenommen werden.

Bei der grossen Wichtigkeit dieser Frage, und bei den Schwierigkeiten, die, wie Herr H.-A. Lorentz zeigt, auch bei Einführung des Planckschen Atoms noch fortbestehen, sei es gestattet, auf

(1) *Physikal. Zeitschrift*, t. IX, 1908, p. 562.

(2) *Proc. Roy. Soc.*, t. LXXVI, 1906, p. 296, 545.

(3) H.-A. Lorentz, *Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther*. Conférence tenue au congrès de Rome (Roma, Tipografia della R. Accad. dei Lincei), avril 1908.

einen Fehler der Jeans-Lorentzschen Theorie hinzuweisen, der gerade den wesentlichen Punkt des Beweises betrifft, womit dieser hinfällig wird.

Der Ansatz für die elektrischen und magnetischen Kräfte, der in jenem Beweise gemacht wird, ist zu allgemein; er widerspricht den Formeln der retardierten Potentiale, denen jede physikalisch zulässige Lösung der Grundgleichungen genügen muss. Durch diese Bedingung werden aber gerade die Koordinaten des freien Äthers, die Herr Lorentz (*loc. cit.*) mit q_3, q'_3 bezeichnet, in ihrer Anzahl ausserordentlich beschränkt. Diese Koordinaten aber sind es, die schliesslich die Strahlungsformel bestimmen; und der Widerspruch der Theorie mit der Beobachtung wird gerade dadurch bedungen, dass diese Koordinaten, die unendlich zahlreich sind, auf Grund eines dem Boltzmannschen Satze der gleichen Verteilung der Energie auf die verschiedenen Freiheitsgrade ganz analogen, die gesamte Energie des Systems an sich zu ziehen bestrebt sind.

Bekanntlich lassen sich die elektromagnetischen Grundgleichungen der Lorentzschen Theorie durch Einführung der Potentiale unter die gemeinsame Form bringen

$$(1)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = \varphi(x, y, z, t),$$

wo c = Lichtgeschwindigkeit, φ eine gegebene Funktion von x, y, z, t bedeuten, und f im Unendlichen verschwindet. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung, etwa nach der Poissonschen Methode, involviert zwei willkürliche Funktionen von x, y, z, nämlich die Werte von f und $\frac{\partial f}{\partial t}$ für die Anfangszeit t_0. Partikuläre Lösungen derselben sind:

$$f_1(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,dx'\,dy'\,dz';$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\left(x', y', z', t + \frac{r}{c}\right)}{r}\,dx'\,dy'\,dz';$$

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

ferner beliebige lineare Kombinationen aus f_1 und f_2 der Form

$f_3 = f_1 a_1 + f_2 a_2$, wo $a_1 + a_2 = 1$: endlich

$$f_4 = \frac{-1}{4\pi^2} \int \frac{\varphi(x' \, y' \, z' \, t')\, dx' \, dy' \, dz' \, dt'}{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (t - t')^2 c^2}.$$

Die Lösung f_1 entspricht divergenten Wellen, f_2 konvergenten, aus dem Unendlichen kommenden, f_3 beiden Arten ; wieder andere Lösungen würden Wellen entsprechen, die gegen Punkte des reinen Äthers, wo $\varphi = 0$ ist, konvergieren oder von solchen divergieren ; in f_4 ist die Auflösung in Wellen, die nach den Kirchhoffschen und Poissonschen Sätzen stets in unendlich vielen Weisen geschehen kann, nicht vorgenommen. Die Erfahrung lehrt, dass ausschliesslich die Lösung f_1 in Betracht komme, und die Maxwell-Lorentzsche Theorie setzt dies ausdrücklich voraus. Wie notwendig diese Einschränkung ist, geht schon daraus hervor, dass ebenso wie bei der Lösung f_1 ein Körper, dessen Elektronen akzeleriert sind, Energie ausstrahlt, so dass in grosser Entfernung der Poyntingsche Vektor nach aussen gerichtet ist, bei f_2 (Vertauschung von c mit $-c$) dieser Vektor sein Vorzeichen ändert, der Körper somit Energie aus dem Unendlichen empfängt, *ohne dass irgendein anderer Körper ein entsprechendes Quantum Energie verliert*. Ein solcher Körper, welcher in dieser Weise dauernd Energie aus dem Äther zu entnehmen fähig wäre, müsste ein *Perpetuum mobile* genannt werden und ist physikalisch unmöglich.

Um nun solche, allen Bedingungen — auch den Bedingungen im Unendlichen — genügende Lösungen, die trotzdem unmöglich sind, auszuschalten, hat man den zunächst noch willkürlichen Anfangszustand in geeigneter Weise einzuschränken. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit f_1 in allen Zeiten gelte, ist, dass es zur Zeit $t = t_0$ und $t = t_0 + dt$ gelte. Dass diese Anfangsbedingung aber im Maxwellschen Vorstellungskreis keinerlei vernünftigen Sinn hat, ist einleuchtend, und man hat sie daher durch andere zu ersetzen gesucht. Nimmt man, wie es meist geschieht, an, dass zur Zeit t_0 in grossen Entfernungen das Feld gleich Null ist, so folgt allerdings für spätere Zeiten die Formel f_1 ; *für frühere aber die unzulässige Formel* f_2. Ferner ist nun die Gültigkeit auch von f_1 einer ganz unnötigen Einschränkung unterworfen (Feld $= 0$ für $t = t_0$), welcher z. B. die gleichförmige Translation

nicht genügt. Endlich bringt es der Charakter der Gleichung (1) als einer *hyperbolischen* Differentialgleichung mit sich, dass, wenn die Anfangsbedingung nur sehr angenähert erfüllt ist (was ja allein sich konstatieren liesse), daraus keineswegs folgt, dass die Formel f_1 mit einer ähnlichen Annäherung gelte: es könnten z. B. konvergente Wellen, die zur Zeit t_0 sehr schwach und fern sind, zu einer späteren Zeit an einem gegebenen Punkt des Raumes einen beliebigen endlichen Wert annehmen.

Ebensowenig ertragen die andern bisher vorgeschlagenen Zusatzbedingungen eine genaue Kritik ([1]); der Übergang von den reversiblen Differentialgleichungen zu den retardierten Potentialen, *durch welchen erst die Irreversibilität in die Elektrodynamik* eingeführt wird, lässt sich auf dem Boden der Maxwellschen Anschauungen allein *nicht finden*. Es ist also wichtig zu konstatieren, dass der vollständige Ausdruck der Strahlungsgesetze und überhaupt der Maxwell-Lorentzschen Theorie nicht die Differentialgleichungen sind, sondern die Elementarwirkungen, die sich durch Einführung der retardierten Potentiale in den Lorentzschen Ausdruck der ponderomotorischen Kraft ergeben. In dieser Form sind auch der elektrische und der magnetische Vektor eliminiert, welche ja nie direkt beobachtet werden können, sondern bloss die Rolle mathematischer Hilfsfunktionen spielen ([2]), während die eigentlichen Aussagen der Theorie sich nur auf die Grössen Raum, Zeit und elektrische Ladungen beziehen.

Zur Ableitung der Strahlungsformel stellen sich nun Jeans und Lorentz einen parallelopipedischen, durch spiegelnde Wände begrenzten Hohlraum vor, in dem sich ein Körper K befindet; die elektrischen und magnetischen Kräfte im Innern werden als Funktionen von x, y, z in Fourierreihen entwickelt, deren Koeffizienten Funktionen der Zeit sind und die Rolle Lagrangescher Koordinaten spielen, für welche die Differentialgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip abgeleitet werden können. Bei diesem Ansatz ist die wesentliche Bedingung der Darstellbarkeit durch retardierte Potentiale nicht berücksichtigt; diese Bedingung schaltet aber,

---

([1]) Über diese und andere schwache Seiten der Maxwell-Lorentzschen Theorie vergleiche man die Arbeit des Verf.: *Recherches critiques sur l'électrodynamique générale*, *Œuvres*, XVIII, p. 317.

([2]) *Loc. cit.*, p. 318.

wie oben hervorgehoben, aus den Anfangszuständen eine unendliche, durch zwei willkürliche Funktionen von xyz und somit durch unendlich viele Parameter darstellbare Mannigfaltigkeit von Zuständen des Äthers als unzulässig aus. Sie erfordert insbesondere, dass die Kräfte konstant bleiben, wenn die elektrischen Ladungen dauernd ruhen. Dies ist dagegen nach den partiellen Differentialgleichungen nicht notwendig der Fall: man wird stets noch eine Lösung der homogenen Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta = 0$ hinzufügen können, die im vorliegenden Falle den Randbedingungen an den spiegelnden Wänden genügen muss, und sich somit als Gesamtheit der elektrischen Eigenschwingungen des Hohlraumes (ohne den Körper K) ergibt. Solche Lösungen erscheinen in der Jeans-Lorentzschen Ableitung, wie Lorentz (*loc. cit.*, p. 14) hervorhebt, als zulässig, was sie nicht sollten. Vielmehr müssten die unendlich vielen Parameter, die sie involvieren (Koeffizienten der Entwickelung der allgemeinen Lösung von $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta = 0$ nach den Eigenschwingungen des Hohlraumes, also in eine Fourierreihe), dauernd Null sein. Diese unendlich vielen Parameter des « reinen Äthers » aber gerade sind es, die nach dem Satz der gleichmässigen Verteilung der Energie auf die Freiheitsgrade, die ganze Energie zu absorbieren und auf die kürzesten Wellenlängen zu verteilen bestrebt sind. *Die Jeans-Lorentzsche Theorie ist also unzulässig.*

Man könnte einwenden, die eben besprochene, nach Fourierreihen entwickelte Lösung lasse sich auffassen als « retardierte » Kräfte, herrührend von den Elektronen der spiegelnden Wände. Da aber vollkommen spiegelnde Wände *unendlich* viele Leitungselektronen in denselben voraussetzen, so sind sie eben aus diesem Grunde hier als unzulässige Abstraktion zu verwerfen, da in Wirklichkeit die Anzahl der Freiheitsgrade des Körpers K (bzw. die Zahl der darin befindlichen Elektronen) und der des Spiegels nicht als unendlich verschieden betrachtet werden dürfen und es gerade hierauf ankommt. Ist die Anzahl der Elektronen des Spiegels sehr gross, so wird allerdings der Ansatz Jeans-Lorentz gültig bleiben, aber nur für Eigenschwingungen des Hohlraumes, für welche die in Wirklichkeit vorliegende Diskontinuität des Spiegels sowie die Endlichkeit der Elektronenzahl und der Leitfähigkeit noch nicht in Betracht kommen, also *für lange Wellen oder niedere Tem-*

peraturen. Dies ist der Grund, warum jener Ansatz für solche Wellen, und nur für solche Wellen, richtig ist. Für kürzere Wellen ist derselbe dagegen in keiner Weise mit der Bedingung der retardierten Potentiale vereinbar, er stellt eine viel zu grosse Mannigfaltigkeit von Lösungen dar.

Die Bedingung der retardierten Potentiale in die statistische Betrachtung aufzunehmen, scheint allerdings schwierig, und es fragt sich, ob sie auch genügt, um eine spektrale Verteilung der Energie von dem experimentell gegebenen Charakter zu bedingen. Es ist hierzu vor allem nötig, festzustellen, wieviel und was für willkürliche Konstanten die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen eines Systems von Elektronen involviert, wenn für die Kräfte der Ansatz der retardierten Potentiale gebraucht wird. Denn nur auf diese willkürlichen Elemente darf sich die statistische Betrachtung erstrecken. Bei mechanischen Problemen vereinfacht sich die Frage dadurch sehr, dass durch Angabe der Koordinaten q und der Impulse p der weitere Verlauf bestimmt ist. In der Elektronentheorie ist dem anders, und es liegt vielleicht hier wieder ein wunder Punkt derselben. Schon die Gleichungen der kräftefreien Bewegung des starren Elektrons lassen, wie Herr Herglotz ([1]) gezeigt hat, ausser der gleichförmigen Translation noch unendlich viele Lösungen zu; bei sehr kleiner Geschwindigkeit ist die allgemeine Lösung darstellbar als Summe unendlich vieler Schwingungen, mit willkürlichen Amplituden, deren Wellenlängen sämtlich weit jenseits des bekannten ultravioletten Spektrums liegen, nämlich höchstens von der Grössenordnung des Elektronendurchmessers sind, und keine untere Grenze besitzen. Da die Herglotzsche Methode ([2]) auch für allgemeinere Probleme der Elektronentheorie anwendbar bleibt und zu ähnlichen Integralgleichungen führt, dürfte auch allgemein ein ähnliches Verhalten der Lösungen zu erwarten sein. Dasselbe ist nämlich in letzter Instanz dadurch bedingt, dass in der Elektronentheorie die Akzeleration eines Elektrons bestimmt wird durch gewisse *frühere* Lagen, Geschwindigkeiten und Akzelerationen der anderen Elektronen bzw. Ladungs-

---

([1]) G. HERGLOTZ, *Gott. Nachr.*, 1903, Heft 6; 1904, Heft 6; *Math. Ann.*, t. LXV, 1908, p. 87.

([2]) *Loc. cit.*, 1904.

elemente. Beschränkt man sich zunächst auf den Fall, wo alle vorkommenden Funktionen der Form $\psi\left(t-\frac{r}{c}\right)$ nach der Formel

$$\psi\left(t-\frac{r}{c}\right)=\psi(t)-\frac{r}{c}\psi'(t)-\frac{r^2}{1.2.c^2}\psi''(t)-\ldots$$

entwickelbar sind, so ergeben sich Differentialgleichungen von unendlich hoher Ordnung, deren allgemeine Lösung von unendlich vielen Konstanten abhängt ([1]), die in diesem Spezialfall gewissen, durch die Konvergenzbedingungen auferlegten Ungleichungen genügen müssen. Die Untersuchungen von Sommerfeld ([2]) und P. Hertz ([3]) über das starre kugelförmige Elektron zeigen, dass man bei gegebener äusserer Kraft die Bewegung willkürlich vorschreiben kann innerhalb einer Zeit T, welche gleich dem Durchmesser des Elektrons dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit ist; insbesondere bei gleichförmiger Oberflächenladung genügt jede Funktion mit der Periode T den Bewegungsgleichungen des kräftefreien Elektrons, und es kann eine beliebige solche Funktion $P(t)$ jeder Lösung des Problems bei gegebenen äusseren Kräften hinzugefügt werden. Soll die Lösung analytisch sein, so sind zwar nicht die Werte von $P(t)$ innerhalb einer Periode willkürlich, wohl aber kann man P = reeller Teil von Q setzen, wo

$$Q=Q\left(e^{\frac{2\pi i t}{T}}\right)=Q(x)=a_0+a_1x-a_2x^2-\ldots$$

und die a_i (bis auf die Konvergenzbedingung der Reihe) willkürlich sind.

Allgemeiner dürfte die Lösung bei beliebigen Systemen beweglicher Elektronen ebenfalls zu ihrer Bestimmung unendlich vieler Konstanten bedürfen, und oszillierende Lösungen von unbegrenzt kleiner Wellenlänge zulassen. Diese sind eben durch die unendlich vielen « Freiheitsgrade des Äthers » bedingt; und es ist zu befürchten, dass sie, auf Grund des Satzes der gleichförmigen Verteilung der Energie, schliesslich doch wieder eine Tendenz der Strahlung, ganz auf die kürzesten Wellenlängen sich zu konzen-

---

([1]) Vgl. T. Lalesco, *Sur l'equation de Volterra*. Thèse, Paris, 1908.
([2]) *Gött. Nachr.*, 1904, p. 363.
([3]) *Math. Ann.*, t. LXV, 1908, p. 1.

trieren, bewirken möchten, wenn auch die Formel vielleicht eine von der Jeansschen abweichende Gestalt hätte. Aber auch ohne diese Betrachtung muss die Existenz z. B. der kräftefreien Eigenschwingungen des Elektrons, die sich jeder Lösung superponieren lassen und nach denen sich jede Lösung entwickeln lässt, die also überall auftreten müssten, als experimentell unwahrscheinlich betrachtet werden. Sollte auch eine Strahlung von äusserst kurzer Wellenlänge unseren Beobachtungsmethoden unzugänglich sein, so müsste sich doch ein entsprechender merklicher Energiedefekt zeigen, der nirgends wahrgenommen wurde.

Man darf hieraus vielleicht schliessen, dass, *ebenso wie wir schon gezwungen waren, die Mannigfaltigkeit der Lösungen der Maxwellschen Theorie durch die Einführung der retardierten Potentiale ausserordentlich herabzusetzen, eine neue derartige Beschränkung noch nötig ist, um die Anzahl der Bestimmungselemente (Konstanten) der Lösungen auf eine endliche zu reduzieren.*

Dass unter den möglichen, unendlich vielen Lösungen stets eine ausgezeichnet ist, wie unter den Lösungen der partiellen Differentialgleichungen die retardierten Potentiale ausgezeichnet waren, lässt sich leicht plausibel machen. Man denke sich, es wirke die Gravitation nicht momentan, sondern nach den elektrodynamischen Gesetzen. Um alsdann bei gegebenen Anfangswerten der Koordinaten und Geschwindigkeiten die weitere Bewegung zu berechnen, wird man zunächst von der Bewegung nach dem klassischen Gesetz als erster Approximation ausgehen; diese Lösung wird man dann in die (sehr kleinen) Zusatzglieder einsetzen, die das neue Gesetz eingeführt hat; so entstehen neue Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die man mit denselben Anfangswerten integriert usw. Es ergibt sich so schliesslich eine Lösung, in welcher jede Koordinate x eine bestimmte analytische Funktion der Zeit t und der Anfangswerte x_{oi}, x'_{oi} ist, die aber allerdings nur in einem beschränkten Bereich dieser Grössen gilt. Diese Lösung kann dann, sowohl als Funktion von t wie als Funktion der Anfangswerte x_{oi}, x'_{oi}, analytisch fortgesetzt werden und gibt dann für jede Zeit und für beliebige Anfangswerte der Koordinaten und Geschwindigkeiten eine ganz bestimmte, nur von diesen Daten abhängige Lösung des Problems, neben welcher allerdings unendlich viele andere Lö-

sungen existieren, für welche das Verfahren *nie* gültig ist, und welche höchst merkwürdigen Planetensystemen entsprechen würden. Für den Fall des kräftefreien Elektrons erhält man die einfache Translation. Ist diese Lösung die einzig zulässige, *so würde die Anzahl der willkürlichen Konstanten*, *d. h. die Mannigfaltigkeit der Lösung*, *nicht grösser sein wie in der Mechanik*, *nämlich gleich der doppelten Anzahl der Freiheitsgrade der Elektronen.*

Dies lässt sich etwa bewirken, indem man eine Zusatzbedingung in Form eines *Minimalprinzips* einführt, wobei die Variation zwar für alle Lösungen verschwinden, ein wirkliches Minimum aber nur für *eine* bestimmte Lösung eintreten dürfte. Ähnliches gilt z. B. in der Theorie der Schwingungen von Saiten, Membranen usw. [1], wo für sämtliche Eigenschwingungen, in unendlicher Anzahl, die Variation verschwindet, das Minimum aber nur für den Grundton erreicht wird. Ebenso könnte man, neben den Bedingungen im Unendlichen, auch Bedingungen für sehr grosse t einführen, die wieder durch die Variationsrechnung sich ableiten liessen.

Die von Lorentz hervorgehobenen prinzipiellen Schwierigkeiten in der Theorie der schwarzen Strahlung *führen uns also nicht sowohl darauf*, *mit Planck ein Energie-Zeit-Element einzuführen*, *als vielmehr auf die Forderung*, *es müsse das durch die gegenwärtige Elektronentheorie verletzte Prinzip der Eindeutigkeit des Naturgeschehens im Sinne der klassischen Mechanik durch ein Minimalprinzip wieder hergestellt werden,* so dass eine gewisse *endliche* Anzahl Bestimmungsstücke genüge, den Verlauf der Bewegung eines Systems von Elektronen für alle Zeiten zu bestimmen.

Damit würde der letzte Rest dessen, was man einst Äther nannte, aus den Naturgesetzen verschwinden. Sukzessive hatte die Erfahrung schon genötigt, ihm Bewegung und andere Eigenschaften der Materie abzusprechen; aus einem mehr oder weniger komplizierten Mechanismus war er der selbst unveränderliche Träger der elektromagnetischen Erscheinungen geworden. Auf diesem reduzierten

---

[1] Vgl. z. B. RIEMANN-WEBER, *Partielle Differentialgleichungen*, t. II, p. 284, Braunschweig, 1901.

Gebiete hätte seine Existenz sich noch immer durch Lösungen der Gleichungen, die von der Materie bzw. den Elektronen unabhängig wären (der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta = 0$ genügten), zeigen können. Die Erfahrung zwingt uns, diese Lösungen abzuweisen. Dann aber drücken die Gleichungen der Elektronentheorie nur noch Beziehungen zwischen Raum und Zeit aus, die Feldstärken oder « Zustände des Äthers » können vollständig eliminiert werden. Der Äther sinkt zur Abstraktion herab : er ist nur noch ein absolutes Koordinatensystem und eine mathematische Konstruktion, welche in die Formeln unendlich viele Konstanten einführt. Die Erfahrung scheint ihm weder die erste noch die zweite dieser Eigenschaften lassen zu wollen : sie verbannt ihn ganz aus der Physik.

Bei dieser Annahme zerrinnt uns aber in Nichts eine der wesentlichen Grundlagen der Maxwellschen Beschreibung der Vorgänge durch partielle Differentialgleichungen, denen ja nun kein physikalischer Sinn, sondern nunmehr die Bedeutung einer mathematischen Zwischenkonstruktion zukommt, welche überdies für sich allein ungenügend ist. Der Glaube an ihre unbedingte Gültigkeit wird dadurch nicht gefestigt, um so mehr als sich zeigen lässt [1], dass die experimentellen Grundlagen nach gewissen Seiten hin vollständig fehlen.

---

(1) W. Ritz, *loc. cit.; Œuvres*, XIX, p. 427; XX, p. 447; XXI, p. 462.

XXIV.

ZUM

GEGENWÄRTIGEN STAND DES STRAHLUNGSPROBLEMS.

(ERWIDERUNG AUF DEN AUFSATZ DES HERRN A. EINSTEIN.)

Physikalische Zeitschrift, 10. Jahrgang, No 7, Seite 224-225.

Herr Einstein ist der Ansicht [1], dass die von mir [2] betonte Vielfältigkeit der Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = \varphi(x, y, z, t)$$

(c = Lichtgeschwindigkeit) nicht besteht, wenigstens nicht in dem Sinne, dass die partikulären Integrale

$$f_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\left(x'\,y'\,z'\,t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,dx'\,dy'\,dz',$$

$$f_2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\left(x'\,y'\,z'\,t - \frac{r}{c}\right)}{r}\,dx'\,dy'\,dz',$$

endlich

$$f_3 = a_1 f_1 + a_2 f_2 \qquad (a_1 - a_2 = 1)$$

nicht denselben Vorgängen entsprechen. Vielmehr komme der erste

([1]) *Physikal. Zeitschr.*, t. X, 1909, p. 185.
([2]) *Œuvres*, XXIII, p. 493.

Ansatz darauf hinaus, dass man das Feld in (x, y, z, t) berechne aus gewissen früheren Zuständen, der zweite aus späteren, so dass die Wahl zwischen f_1 und f_2 die Art der Berechnung, nicht das Wesen des Vorgangs berühre. Diese Ansicht ist durchaus unhaltbar. Wenn auf einem Körper A zur Zeit t ein mit Strahlung verbundener, sehr kurze Zeit dauernder Vorgang stattfindet, so wird auf die Elektronen eines in grösserer Entfernung r befindlichen Körpers B bei der Annahme von f_1 ein Impuls wirken zur Zeit $t+\frac{r}{c}$; bei der Annahme von f_2 ein solcher zur Zeit $t-\frac{r}{c}$ (bevor der Vorgang auf A stattgefunden hat!); bei Annahme von f_3 dagegen ergeben sich für B *zwei* Impulse, zu den Zeiten $t-\frac{r}{c}$ und $t+\frac{r}{c}$. Der letztere Vorgang ist also wesentlich verschieden von den beiden andern, und auch diese sind in allgemeineren Fällen durch Umkehrung des Vorzeichens der Zeit nicht miteinander zur Deckung zu bringen. Um eine andere Art der *Berechnung* handelt es sich hier nicht, sondern um einen ganz anderen *Vorgang*.

Bei einem endlich begrenzten Raume, meint ferner Herr Einstein, könne man sowohl die Vorgänge durch f_1 wie durch f_2 darstellen. Dem ist nicht so. Nach bekannten Sätzen kommt zu dem über die elektrischen Dichten oder Strömungen erstreckten Integral (f_1 oder f_2) ein Oberflächenintegral hinzu, welches von denselben nicht abhängt. In dieser Form kann man sowohl frühere Zeiten als auch spätere Zeiten zur Berechnung des Feldes heranziehen. Aber die Lorentzsche Annahme besteht eben darin, dass bei der Anwendung von f_1 und Voraussetzung grosser Räume das Oberflächenintegral wegfällt, woraus folgt, dass es dann bei Anwendung von f_2 bei demselben Vorgang im allgemeinen *nicht* verschwindet.

Aber neben diesen Integralen f_1, f_2, f_3 bestehen noch eine unendliche Anzahl anderer, und es ist ganz unstatthaft, zunächst überhaupt, wie Herr Einstein es tut, von emittierten und absorbierten Feldern zu reden. Wäre es erst gelungen, aus dieser Mannigfaltigkeit von Lösungen durch irgendeine neue Annahme f_1, f_2 und f_3 als allein in Betracht kommend herauszuschälen, so ist es nicht mehr schwer, durch Bedingungen über die Richtung des Strahlungsvektors im Unendlichen, f_1 als einziges Integral zu

bestimmen. Es handelt sich aber hier um eine viel schwierigere Frage, und alles was bisher zu ihrer Lösung beigebracht wurde, muss als unhaltbar zurückgewiesen werden, wie ich an anderer Stelle [1] eingehend erörtert habe.

Herr Einstein wirft ferner der mit retardierten Kräften operierenden Theorie vor, sie könne den Zustand (Energie und Bewegungsgrösse) eines Systems nur unter Hinzuziehung früherer Zustände des Systems beschreiben, während die partiellen Differentialgleichungen den Momentanzustand geben. Aber die Frage ist, ob dieser Momentanzustand mit den Formeln der retardierten Potentiale übereinstimmt oder nicht. Im ersteren Falle sagt die eine Darstellung *tatsächlich* genau dasselbe aus wie die andere, in etwas abweichender Form ; im zweiten Fall dagegen ist der Vorgang ein solcher, der tatsächlich *nie* beobachtet wurde. Ist es gelungen, die Tatsache, dass eine Lösung, die sich nicht aus den retardierten Potentialen ableiten lässt, nie beobachtet wurde, in voller Allgemeinheit vermittelst annehmbarer Zusatzhypothesen aus den partiellen Differentialgleichungen streng abzuleiten, so wird die Schwierigkeit behoben sein. Bis dahin erblicke ich vielmehr in der Tatsache, dass die retardierten Kräfte die einzig *wahren* Integrale der Gleichungen sind (gegen den kalten Weltraum), und dass in grosser Entfernung infolgedessen die Energie stets nach aussen hin oder wenigstens nie nach innen strömt, die Wurzel der Irreversibilität und des zweiten Hauptsatzes. Dass man durch Ersatz des Bildes « Äther » durch gewisse energetische Vorstellungen die besprochenen und manche andere Schwierigkeiten vermeiden kann, soll an dieser Stelle nicht ausgeführt werden.

Ich muss daher meinen Schluss aufrecht erhalten, dass, solange man zu f_1 noch irgendein willkürliches Integral der Differentialgleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = 0$$

hinzufügen darf, notwendig (auch wenn man auf beschränkte Räume und vollkommene Spiegel verzichtet) eine der Erfahrung widersprechende Strahlungsformel nach der Methode Jeans-Lorentz

---

[1] W. Ritz, *Œuvres*, XVIII, p. 145.

sich ergeben wird; dass aber bei Voraussetzung retardierter Potentiale jene Methode deswegen unzulässig ist, weil sie mit einer unendlichen Anzahl Elektronen (und einem vollkommenen Spiegel) operiert.

Göttingen, Februar 1909.

XXV.

ZUM GEGENWÄRTIGEN STAND

DES STRAHLUNGSPROBLEMS,

VON W. RITZ UND A. EINSTEIN.

Physikalische Zeitschrift, 10. Jahrgang, N° 9, Seite 323-324.

Zur Aufklärung der Meinungsverschiedenheiten, welche in unsern beiderseitigen Publikationen (1) zutage getreten sind, bemerken wir Folgendes.

In den speziellen Fällen, in denen ein elektromagnetischer Vorgang *auf einen endlichen Raum beschränkt bleibt*, ist die Darstellung des Vorganges sowohl in der Form

$$f = f_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\left(x', y', z', t - \frac{r}{c}\right)}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$

als auch in der Form

$$f = f_2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\varphi\left(x', y', z', t + \frac{r}{c}\right)}{r}\, dx'\, dy'\, dz'$$

und in andern Formen möglich.

Während Einstein glaubt, dass man sich auf diesen Fall beschränken könne, ohne die Allgemeinheit der Betrachtung *wesent-*

(1) W. RITZ, *Œuvres*, XVIII, p. 493, und A. EINSTEIN, *Physikalische Zeitschrift*, t. X, 1909, p. 185-193.

lich zu beschränken, betrachtet Ritz diese Beschränkung als eine *prinzipiell* nicht erlaubte. Stellt man sich auf diesen Standpunkt, so nötigt die Erfahrung dazu, die Darstellung mit Hilfe der retardierten Potentiale als die einzig mögliche zu betrachten, falls man der Ansicht zuneigt, dass die Tatsache der Nichtumkehrbarkeit der Strahlungsvorgänge bereits in den Grundgesetzen ihren Ausdruck zu finden habe. Ritz betrachtet die Einschränkung auf die Form der retardierten Potentiale als eine der Wurzeln des zweiten Hauptsatzes, während Einstein glaubt, dass die Nichtumkehrbarkeit ausschliesslich auf Wahrscheinlichkeitsgründen beruhe.

Zürich, April 1909.

XXVI.

DAS PRINZIP DER RELATIVITÄT IN DER OPTIK.

(ANTRITTSREDE ZUR HABILITATION.)

Ein Grundgesetz der Mechanik, das Prinzip der Relativität, besagt, dass die gleichförmige Translation eines mechanischen Systems ohne Einfluss bleibt auf die Vorgänge innerhalb desselben. Gleiches gilt von der absoluten Orientation des Systems im Raume: eine beliebige Drehung der Koordinatenachsen ändert die Gestalt der Gleichungen der Mechanik nicht. Beide Aussagen kann man dahin zusammenfassen, dass diese Gleichungen unverändert bleiben, wenn man an Stelle der Koordinaten x, y, z neue einführt durch die linearen Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + v_1 t,\\
y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + v_2 t,\\
z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + v_3 t,
\end{aligned}
$$

worin die α, β, γ die Richtungskosinusse sind, die den sog. Orthogonalitätsbedingungen genügen müssen, während v_1, v_2, v_3 die Komponenten der konstanten Translationsgeschwindigkeit des Systems sind.

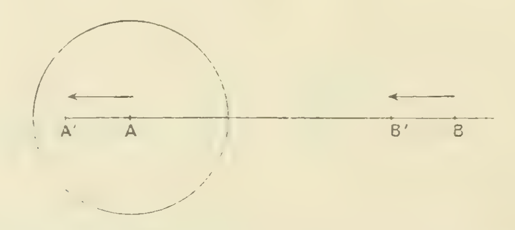
Gleiches gilt natürlich auch für alle diejenigen physikalischen Erscheinungen, die auf mechanische Vorgänge innerhalb der Materie sich zurückführen lassen, wie der Schall, die Wärme usw.

Ganz anders ist es mit den optischen und den mit ihnen verknüpften elektrodynamischen Erscheinungen. Zwei Theorien haben sich bekanntlich lange Zeit das Gebiet der Optik streitig gemacht. Die *Emissionshypothese* und die *Undulations- oder Äthertheorie.* Nach dem ersten wird die Energie von einem

leuchtenden Körper nach allen Seiten fortgeschleudert. Nach der zweiten pflanzt sie sich wellenartig fort in dem das ganze Weltall erfüllenden Lichtäther. Je nachdem wir die eine oder die andere Theorie zu Grunde legen, werden wir für den Einfluss einer Translationsbewegung der Materie ganz andere Resultate erhalten.

Betrachten wir zunächst die Emissionshypothese. Die Energieteilchen werden mit einem konstanten stets gleichen Anfangsimpuls fortgeschleudert, sie bewegen sich geradlinig fort, bis sie einen neuen Körper treffen, der sie dann ablenkt. Alle diese Vorgänge sind rein mechanische, folglich bleibt auch das Relativitätsprinzip erfüllt. Leuchtet ein Körper kurz auf, so werden die ausgesandten Lichtteilchen zu jeder Zeit die Fläche einer Kugel erfüllen, die sich gleichmässig ausbreitet, und deren Mittelpunkt mit dem leuchtenden Körper zusammenfällt, ob derselbe nun in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung begriffen sei. Die optischen Gesetze werden also nach der Emissionshypothese durch eine gleichförmige Translation der Materie nicht beeinflusst.

Anders bei den Voraussetzungen der *Undulationstheorie*. Ruht hier der Äther und auch der strahlende Körper, so breitet sich zwar das Licht auch kugelförmig aus, und der Mittelpunkt der Kugel bleibt im leuchtenden Körper. Bewegt sich aber dieser, so ist das für die Ausbreitung des Lichtes ganz gleichgültig : dieselbe richtet sich nur nach dem Äther, nicht nach der Materie. Eine bestimmte Zeit nach dem Aufleuchten werden wir also folgendes Bild haben :



Die Undulationstheorie fordert also einen Einfluss der Translation der Materie auf die optischen Erscheinungen.

Nun aber ist bekannt, dass die Emissionshypothese, wenigstens in der Gestalt, die ihr Newton gegeben hat, sich nicht bewährt hat, während die Undulationstheorie sämtliche Erscheinungen befriedigend darstellt. Es war daher zu erwarten, dass die Bewegung der

Erde, zum Beispiel, einen Einfluss auf die optischen Vorgänge haben müsste, und dass, auch wenn man Lichtquellen benutzt, die an der Translation der Erde teilnehmen, die Lage der Beugungsbilder, der Interferenzstreifen usw. von der Orientierung des Apparates gegen die Erdbewegung, also schliesslich gegen den Fixsternhimmel abhängen würde. Allerdings zeigt die Theorie in ihrer vollkommensten Gestalt, die ihr Lorentz gegeben hat, dass der Einfluss ein sehr geringer sein muss und durch die sog. Glieder *zweiter Ordnung* gegeben ist, d. h. Glieder, die das Verhältnis Erdgeschwindigkeit : Lichtgeschwindigkeit zum Quadrat enthalten. Das ist ungefähr ein Hundertmillionstel.

Dem amerikanischen Physiker Michelson gelang es zuerst, die Schwierigkeiten eines so feinen Versuches zu überwinden. Das überraschende Resultat war, dass der erwartete Einfluss der Erdbewegung nicht vorhanden war. Andere Versuche, teils optischer teils elektrischer Natur haben dies Ergebnis bestätigt, so dass man die Überzeugung gewinnt, dass auch die optischen Erscheinungen dem Relativitätsprinzip genügen und dass die Natur in diesem Falle strenger an ihren allgemeinen Prinzipien hält als die Physiker es getan hatten.

Wir sind nun vor folgendes *Dilemna* gestellt: die *Emissionshypothese* genügt dem Relativitätsprinzip: soll sie aber sonst auch annehmbar sein, so muss sie tiefgreifende Änderungen in ihrem Aufbau erfahren. Die *Undulationstheorie*, die sonst befriedigend wäre, ist mit dem Prinzip zunächst unvereinbar. Für die Gesetze des Lichtes ist eben nicht nur die Materie, sondern vor allem der Äther massgebend, dessen Bewegung oder Ruhe mitwirkt. Will man diesen Einfluss ausschalten, so erweisen sich tiefgreifende Änderungen in den Begriffen Zeit, Raum und Bewegung als notwendig. Diesen letzteren Weg ist Lorentz gegangen, ferner Einstein, endlich in wesentlich vertiefter Fassung Minkowski, der der Wissenschaft so jäh entrissen worden ist. Um uns zu veranschaulichen, welche Änderungen im Zeitbegriffe nötig sind, wenn man das Relativitätsprinzip in die Undulationstheorie einführen will, kehren wir zurück zu unserer Figur. Wir denken uns in A und B zwei Beobachter mit sehr vollkommenen Uhren versehen. Zur Zeit $t = 0$ lässt der erste ein Lichtsignal leuchten, während der zweite feststellt, zu welcher Zeit er dieses Signal wahrnimmt.

Nun ist zwar bekanntlich wohl möglich, an verschiedenen Punkten der Erde Uhren herzustellen, die genau Schritt halten mit der Umdrehung der Erde um sich selbst und somit denselben Gang haben. Damit sie aber auch *gleichzeitig* dieselbe Stunde angeben, also synchron gehen, ist es notwendig, die Differenz der geographischen Länge festzustellen. Viel genauer erreicht man das Ziel durch ein elektrisches Signal, welches, von dem einen Beobachter abgegeben, sich mit Lichtgeschwindigkeit zum andern fortpflanzt. Wenn aber die Zeit im Punkte B durch dieses Mittel festgestellt ist, so ist es nicht mehr möglich, die Lichtgeschwindigkeit in der besprochenen Weise zu messen: je nach der Bewegung des Systems wird der Beobachter B einfach seine Uhr anders stellen, und um den Einfluss der Bewegung wahrzunehmen, muss der Beobachter über andere Mittel verfügen, um die *Gleichzeitigkeit* in verschiedenen Orten festzustellen. Durch geeignete Hypothesen haben wir ihm nun diese Mittel zu *entziehen*.

Dazu ist zunächst erforderlich, dass alle Kräfte, auch die Gravitationskraft, sich nach demselben Gesetz ausbreiten wie das Licht: so wird eine Kontrolle eines Signals durch ein anderartiges unmöglich. Nun könnte aber der Beobachter B sich nach A mit seiner Uhr begeben, den Gang seiner Uhr und ihren Synchronismus mit der Normaluhr A vergleichen, sich nach B zurückbegeben und nun den Versuch ausführen. Jetzt wird sich die Absolutbewegung geltend machen, wenn nicht der Gang einer Uhr in einem bewegten System so von der Bewegung abhängt, dass der Synchronismus durch das Forttragen der Uhr gerade um den geeigneten Betrag sich ändert und dass beim Rücktragen der Uhr in umgekehrter Richtung bis A hier der Synchronismus wieder hergestellt ist. Der Gang der Uhren, durch die wir die Zeit in beliebigen Orten definieren, vermittelst der Normaluhr A, hängt also von der Geschwindigkeit des Systems A B ab. Die so definierte Zeit ist *natürlich ein durchaus relativer Begriff*. Zwei Ereignisse an verschiedenen Orten können nicht mehr *schlechthin* als gleichzeitig bezeichnet werden, das hat gar keinen Sinn mehr. Sind sie gleichzeitig für einen Beobachter, so sind sie es im allgemeinen nicht für einen zweiten, der sich relativ zum ersten bewegt. *Zwei Zeiten*, die für den ersten *gleich* sind, sind es nicht für den zweiten. Und da die Geschwindigkeiten die Quotienten von Verschiebungen

durch Zeiten sind, werden auch die *Axiome der Kinematik* hinfällig, das *Gesetz des Parallelogramms* der Geschwindigkeiten wird ungültig. Wenn ein Körnchen Radium nach zwei entgegengesetzten Richtungen Elektronen von 250000^{km} Geschwindigkeit aussendet, ist die relative Geschwindigkeit dieser Elektronen nicht einfach 500000^{km}, sondern ergibt sich aus einer komplizierten Formel gleich 296000^{km}: die Relativgeschwindigkeit bleibt kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, wenn die absoluten Geschwindigkeiten es waren.

Die Physik operiert stets mit dem Grenzbegriff des *starren Körpers*. Ein solcher würde jede Einwirkung *instantan* weitergeben. Das darf nicht sein. Dieser Grenzbegriff wird also als solcher unzulässig.

Doch auch die *Masse* wird zu einem ganz relativen Begriff. Sie hängt von der Geschwindigkeit ab, aber nicht von der Absolutgeschwindigkeit, wie in früheren Theorien, sondern von der relativen Geschwindigkeit in bezug auf den *Beobachter*. Zwei verschieden bewegte Beobachter werden also *demselben Körper zur selben Zeit mit gleichem Recht verschiedene Massen* zuschreiben.

Macht man alle diese Voraussetzungen, so ist es nun wirklich einem Beobachter unmöglich geworden, eine gleichförmige Translation seines Systems ohne Zuhilfenahme fremder Systeme festzustellen : das Prinzip der Relativität ist erfüllt. Vor einigen Jahrzehnten würden allerdings solche Konsequenzen eine Theorie als unannehmbar von vorne herein ausgeschlossen haben. Aber heute sind die Maxwellschen Gleichungen der Elektrizitätslehre und Optik so sehr zu Axiomen geworden, dass man ihnen ziemlich unbedenklich fast alle andern Axiome der Physik zu opfern bereit ist. *Merkwürdiges Schicksal einer Theorie*, von welcher zu Lebzeiten ihres Entdeckers fast niemand etwas wissen wollte.

Die von Einstein und Lorentz gemachten Hypothesen lassen sich dahin zusammenfassen, dass bei einer gewissen linearen Substitution der Koordinaten und der Zeit die Gleichungen der Naturerscheinungen ungeändert bleiben :

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t,\\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t,\\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t,\\
t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t,
\end{aligned}
$$

diese Substitutionsgleichungen enthalten 6 unabhängige Parameter.

Der Unterschied gegen früher besteht darin, dass auch t der Transformation unterworfen wird. Das eigentliche *Wesen* dieser Transformation hat erst Minkowski erkannt. Es wurde schon betont, dass in der gewöhnlichen Vorstellung die Naturvorgänge nicht davon abhängen, wie die wirkenden Körper in ihrer Gesamtheit gegen den Raum orientiert sind, sondern nur davon, wie sie gegeneinander liegen. Neben den drei Raumkoordinaten führt nun Minkowski als vierte die in geeigneter Einheit gemessene imaginäre Zeit ein. Die früher gemachten Hypothesen besagen nun einfach, dass in diesem neuen, vierdimensionalen Raum betrachtet, die Naturvorgänge von der absoluten Orientation unabhängig sind. Diese Aussage ist natürlich wesentlich *befriedigender* als die Lorentz-Einsteinschen Hypothesen, die ihrerseits den Vorzug haben, den Einfluss auf unsere gewohnten Begriffe augenscheinlicher zu machen. Sie erleichtert die *mathematische* Behandlung spezieller Probleme sehr, ich muss mir aber versagen, auf den weiteren Aufbau dieser Theorie hier einzugehen.

Wie verhalten sich nun die Dinge, wenn wir an der *klassischen* Form des Relativitätsprinzips festhalten, und an der Universalität der Zeit und dementsprechend die Emissionshypothese so umzugestalten suchen, dass sie die optischen Gesetze richtig darstellt, ohne ihre Vorzüge zu verlieren, die ja in der geometrischen Optik bekannt sind?

Ein solches Unternehmen könnte zunächst als aussichtslos gelten, nachdem die Differentialgleichungen der Optik sich so glänzend bewährt haben. Es war der *Elektronentheorie* von Lorentz vorbehalten, uns hier eine tiefere Einsicht zu eröffnen. Lorentz zeigte, dass man die partiellen Differentialgleichungen seiner elektrodynamischen und optischen Theorie auch ersetzen kann durch gewisse Kräfte, die zwischen den Elektronen der Lichtquelle, denen des optischen Apparates, endlich denen der Retina wirksam sind. Diese Kräfte sind der Gravitationskraft nicht unähnlich, unterscheiden sich aber von ihr zunächst dadurch, dass sie nicht nur von der Lage, sondern auch von den Geschwindigkeiten und Akzelerationen der Teilchen abhängen. Diese Verallgemeinerung hatte schon W. Weber in seinem berühmten Grundgesetz der Elektro-

dynamik vorgenommen. Zweitens ist für die Wirkung eines Elektrons A auf ein anderes B im Augenblick t nicht, wie bei dem Gravitationsgesetz, der gegenwärtige Zustand von A massgebend, sondern der Zustand zu einer früheren Zeit t_1, die soweit zurückliegt, dass eine von A im Moment t_1 ausgehende Welle B gerade im Moment t trifft.

Aber gesetzt zunächst, alle Geschwindigkeiten seien unendlich klein, so können wir ebenso gut statt von einer sich fortpflanzenden Energiewelle von einer fortgeschleuderten Energie sprechen : das Gesetz der Ausbreitung ist dasselbe in beiden Fällen, solange die Materie in bezug auf den Äther ruht. Bloss das Bild, welches wir den Dingen unterschieben, hat sich geändert. Statt eine in Zeit und Raum periodische Verteilung eines Lichtvektors zu Grunde zu legen, werden wir von der Betrachtung einer ebenso periodisch verteilten Energie ausgehen. Ja der Umstand, dass, wie die Versuche über den Lichtdruck zeigen, der strahlenden Energie eine Bewegungsgrösse zukommt, wie einem bewegten Körper, lässt die Zweckmässigkeit der Vorstellung schon deutlich zu Tage treten. Eine Kanone, die abgefeuert wird, erhält einen Rückschlag : ebenso ein Körper, der einen Energiestrahl aussendet. Und es ist doch wohl einleuchtender, von der Bewegungsgrösse zu sprechen, wenn sich die Energie wirklich bewegt als wenn, wie es die Lorentzsche Theorie will, es sich um einen Vorgang handelt, bei dem der Äther in Ruhe bleibt und gar keine reale Bewegung vorhanden ist.

Sie sehen also : bei unendlich kleinen Geschwindigkeiten kann das Bild « Äther » durch das Bild « Emission » ersetzt werden, wenn wir nur im Ausdruck der Kräfte durch die Lage, Geschwindigkeiten usw. sonst nichts ändern. Aber auch dies ist nicht einmal nötig. Man kann die absoluten Geschwindigkeiten, die in der Lorentzschen Formel für die Kräfte auftreten, und die in der Emissionstheorie keinen Sinn hätten, auf verschiedene Weisen durch relative Geschwindigkeit ersetzen.

Gehen wir nun auf den Fall *bewegter Körper* über, so wird sich zwar der Unterschied der beiden Gesetze für die Lichtausbreitung geltend machen; bei einer gleichförmigen Translation aber zu Gunsten der Emissionstheorie, weil das Relativitätsprinzip erfüllt ist. Ferner ist bekannt, wie einfach die Emissionshypothese die *Aberration* erklärt; ihre Überlegenheit über die Undulations-

theorie in dieser Hinsicht hat Kirchhoff ausdrücklich hervorgehoben. Eine nähere Betrachtung aller hierher gehörigen Erscheinungen zeigt wirklich, dass man der Erfahrung vollständig genügen kann.

Was nun *weitere Vorteile* der Emissionshypothese gegenüber der Lorentz-Einsteinschen Theorie betrifft, so scheint es mir, dass man den Vorteil für die *Ökonomie unseres Denkens* nicht zu gering anschlagen darf. Es wirkt sehr erschwerend, dass bei Behandlung irgend eines Problems sich stets dieser Widerspruch zwischen unsern Vorstellungen und den Gesetzen der neuen Kinematik geltend macht.

Ferner möchte ich eine grössere *Symmetrie* in der Beschreibung der Vorgänge hervorheben. Betrachten wir zwei gleichförmig bewegte Elektronen; nach dem alten Relativitätsprinzip sollte sich für die Kraft, die das eine auf das andere ausübt, ein Ausdruck ergeben, der nur von der relativen Lage und Geschwindigkeit abhängt, und es ist für eine Ungleichheit von Actio und Reactio gar kein Grund vorhanden. Dem ist anders in der Lorentzschen Elektrodynamik. Hier hängen die Kräfte ab, nicht von der Relativgeschwindigkeit, sondern von der Geschwindigkeit in bezug auf den Äther; es ergibt sich im allgemeinen eine Ungleichheit von Actio und Reactio auch bei gleichförmiger Bewegung. Dies hätte zur Folge, dass ein gegen die Richtung der Erdbewegung schräg aufgehängter *Kondensator* in geladenem Zustande eine andere Bewegungsgrösse hätte als im ungeladenen; bei der Entladung müsste er einen *Drehimpuls* erfahren. Der Versuch ist von Trouton und Noble ausgeführt worden: der Drehimpuls existiert nicht, und somit auch nicht die Dissymmetrie der Kräfte, die ihn hervorbringen sollten. Die Lorentz-Einsteinsche Relativitätstheorie hebt nun nicht etwa die Dissymmetrie der ursprünglichen Formel auf, sie kompensiert sie durch andere Dissymmetrien der Molekularkräfte und scheinbare Dimensionsänderungen der Körper. Dasselbe fand sich schon bei der Ausbreitung des Lichtes: die Erfahrung erforderte, dass in einem bewegten System die Ausbreitung des Lichtes symmetrisch vor sich gehe, wie in einem unbewegten, während das gewöhnliche Gesetz der Lichtausbreitung eine Dissymmetrie verlangt. Die Emissionshypothese hebt nun die Dissymmetrie des Grundgesetzes einfach auf, während die Einsteinsche

Theorie sie durch die Dissymmetrie des Zeitbegriffes kompensiert.

Der wichtigste Vorzug entsteht der Emissionstheorie aus der *Möglichkeit*, die *Gravitationskraft* auf elektrische Kräfte zurückzuführen, und zwar in der Weise, dass sie die Gravitationskonstante *a priori* aus elektrischen und molekularen Konstanten ableitet.

Die Elektronentheorie stellt sich bekanntlich jedes Atom vor als aufgebaut aus positiven und negativen Ladungen, deren Summe Null ergibt. Mit dieser Vorstellung hatten zwar schon Zöllner und Mosotti versucht, die Gravitation zu erklären, indem sie annahmen, dass die Anziehung entgegengesetzter Ladung die Abstossung gleicher Ladung um einen geringen Bruchteil übersteige. Derselbe ist allerdings ausserordentlich gering, nämlich etwa der 10^{-36te} Teil. Allein es ist leicht einzusehen, dass dies nur ein anderer Ausdruck für dieselben Tatsachen ist: die Gravitationskonstante ist nicht *a priori* ableitbar aus andern. Anders in der Emissionshypothese. Die Erscheinungen des *Magnetismus* erfordern nämlich, dass einige dieser Ladungen sich in Bewegung befinden. Nehmen wir an, um es mit einer bestimmten Vorstellung zu tun zu haben, dass einige der positiven Ladungen mit sehr grosser Geschwindigkeit rotieren, und die Geschwindigkeit sei dieselbe für alle. Zwei so konstituierte Atome werden zwar keine resultierende elektrostatische Kraft ergeben, wohl aber eine *elektrodynamische*. Allerdings haben wir es in Wirklichkeit immer mit Körpern zu tun, die eine grosse Anzahl Atome enthalten, und die Rotationsachsen werden alle möglichen Richtungen einnehmen: es muss das *Mittel* gebildet werden. In der Lorentzschen Theorie ergibt sich Null; denn die Wirkung einer elektrischen Kraft auf eine Ladung ist unabhängig von ihrer Bewegung und hebt sich für die positiven und negativen im Mittel heraus. Die Wirkung einer *magnetischen* Kraft daher ist proportional der *Absolutgeschwindigkeit* der Ladung, und dreht ihr Vorzeichen mit der Geschwindigkeit um. Entgegengesetzte Rotationen heben sich daher auf in ihrer Wirkung, es gibt keine resultierende Kraft.

Allein schon die Webersche Theorie hatte dieselben elektromagnetischen Kräfte durch die Einführung bloss von *Relativgeschwindigkeiten* in dem Ausdruck der Kraft dargestellt, und die Umkehrung der einen Geschwindigkeit kehrt hier die Kraft

nicht einfach um. Es fragt sich also, ob wir in dem *allgemeinen Ausdruck der Kraft*, die zwei Elektronen auf einander ausüben, in der Emissionstheorie nicht solche Glieder einführen können, ohne mit der Erfahrung in Konflikt zu kommen, die von der Relativgeschwindigkeit abhängen und bei der Mittelwertbildung nicht Null ergeben. Dem ist wirklich zo, z. B. sind Glieder möglich, die der Relativgeschwindigkeit zur vierten Potenz direkt proportional sind, dem Quadrat der Entfernung umgekehrt; und die Kraft liegt in der Verbindungslinie. Der Mittelwert ist von Null verschieden; da diese Glieder vierter Ordnung sind, ergeben sie, wie es ja sein muss, eine verhältnismässig ausserordentlich kleine Kraft. Der Koeffizient hängt ab von der Anzahl rotierender Ladungen und den Quadraten dieser universell gedachten Rotationsgeschwindigkeiten. Es genügt, in jedem Atom die *Anzahl der rotierenden Ladungen proportional der Masse* anzunehmen, um das Gravitationsgesetz zu erhalten und den Wert der Gravitationskonstante, ausgedrückt durch elektrische und molekulare Konstanten.

Damit wäre die Gravitationsenergie auf elektrische Energie zurückgeführt; gleiches gilt schon von der kinetischen (durch den Begriff der elektromagnetischen Masse) und den andern Energieformen. So eröffnet sich uns die Hoffnung, dass die Naturvorgänge dem Postulat der *Einheit der Energie* genügen, ein Postulat, das in der wohl zu speziellen Form, dass alle Energie kinetische sein müsse, von Lord Kelvin, Heinr. Hertz und andern aufgestellt worden ist. Gleichzeitig dürfen wir erwarten, dass die Verteilung und Bewegung der Energie im Raume bei der Beschreibung der Naturvorgänge ein besonders einfaches Element sein wird.

XXVII.

EXTRAITS DE LETTRES

SUR LA

ROTATION DU PLAN DE POLARISATION,

L'ABSORPTION,

LES SPECTRES EN SÉRIES.

Lettre non datée à A. Cotton.

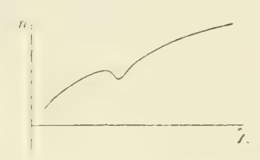
Vous ai-je dit que les calculs que j'ai faits sur les théories actuelles de la rotation de la lumière dans les liquides m'ont montré qu'elles conduisent toutes à des différences entre les deux indices d'absorption de même ordre qu'entre les indices de réfraction, $\frac{1}{100\,000}$, c'est-à-dire parfaitement inobservables ? Si je ne me trompe beaucoup (je n'ai pas repris ces calculs), le seul fait que vous avez découvert des absorptions nettement différentes fait crouler toutes ces théories, et permet de préciser la nature du terme de *frottement* qui conduit à l'explication vraie. Ce terme a précisément la forme d'une vitesse de rotation, et son influence asymétrique sur les déplacements des charges électriques ou des atomes environnants est comparable à celle d'une hélice de bateau. Les théories connues jusqu'ici n'admettaient aucune interprétation mécanique.

Dans une autre lettre à A. Cotton, Ritz énonce d'autres contradictions entre la théorie et l'expérience :

11 novembre 1908.

J'ai lu avec intérêt le Mémoire de Natanson. Je remarque qu'il ne sait pas que Drude a changé un peu sa théorie, d'après certaines

objections de Voigt. Elle est exposée dans *Winkelmanns Handbuch*, 2e édition. De plus, Natanson [1], comme les autres, ne remarque pas la contradiction que j'ai trouvée. Dans l'exemple qu'il traite, s'il avait calculé les pouvoirs absorbants et l'indice de réfraction séparément, il aurait trouvé que, étant donnée la valeur (approximative) de ces pouvoirs absorbants, l'influence de cette bande sur l'indice de réfraction ne se manifesterait que dans la 7ième décimale. Or, j'ai autrefois observé cet indice, et je me souviens



d'avoir constaté une dispersion anormale du genre de cette courbe, affectant la 2ième ou la 3ième décimale.

Pour décider si vraiment ces deux ordres de grandeur, calculé et observé, sont aussi incompatibles que je le dis, il faudrait reprendre la mesure du pouvoir absorbant et de l'indice de réfraction en fonction de λ. Vous voyez, puisqu'il s'agit de l'ordre de grandeur, que ces expériences n'auraient pas besoin d'être précises. L'indice d'absorption à 10 pour 100 près et la constatation d'une anomalie de la dispersion dans la 3ième décimale suffiraient. L'amplitude ayant le facteur $e^{-\frac{2\pi k z}{\lambda}}$, c'est la constante $k =$ fonct. de λ qu'il faudrait calculer.

Si j'avais ce résultat, je montrerais que les conclusions qui découlent de la théorie et de vos observations [2] sont incompatibles, et dans quel sens la théorie doit être modifiée.

Lettre à P. Weiss.

Gœttingue, 9 février 1909.

Il y a dans le spectre de l'hydrogène une série qu'on n'a encore observée que dans les étoiles. Une discussion des conditions où elle apparaît et de diverses autres questions y relatives me conduisent à croire que ces raies sont toujours faibles, mais appa-

(1) NATANSON, *Bulletin de l'Acad. de Cracovie*, octobre 1908.

(2) A. COTTON, *Ann. de Chimie et de Physique*, t. VIII, 1896, p. 347.

raissent mieux sous une grande épaisseur de gaz lumineux. De même, H_α, H_β ont même intensité dans quelque direction qu'on regarde le tube de Geissler, mais les nouvelles lignes infra-rouges n'apparaissent que *end on*, c'est-à-dire sous une épaisseur convenable. Donc j'aimerais regarder une décharge (ou une suite de décharges rectilignes) aussi longue que possible, la densité du gaz étant de quelques millimètres par exemple. L'hydrogène électrolytique humide suffit. Comme spectroscope, un petit, lumineux, suffirait pour l'instant. C'est surtout la ligne bleue 4687,88 (¹) qu'il y a espoir de trouver.

Lettre à F. Paschen.

Zürich, 4. April 1908.

... Besonders wichtig ist es, dass das Rydbergsche Gesetz so genau bestätigt wird. Denn da die Wellenzahlen der von Ihnen beobachteten Linien durch dies Gesetz als Differenz zweier bedeutend grösserer Zahlen bestimmt werden, so bringt eine Unsicherheit der extrapolierten Grenzen in der 6ten Stelle eine solche in der 5ten Stelle der berechneten Linien hervor: die Unsicherheit der 6ten Stelle in den Grenzen besteht aber, und zwar ist sie weniger den Formeln als den von uns ja mehrfach besprochenen Beobachtungsfehlern, die von Rowlands Normalen herrühren, zur Last zu legen.

Was nun die merkwürdige Linie $\lambda = 18\,700$ betrifft, so möchte ich Ihnen zwei Hypothesen mitteilen.

1° Sie gehört zu Wasserstoff. Denn, wie Sie wissen, kann man mit Grund vermuten, dass neben der Balmerschen Serie

$$\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (N = 109675,0)$$

auch bestehen könnten die Serien

$$\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{u^2}\right), \quad \frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{u^2}\right), \quad \frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{u^2}\right), \quad \ldots$$

$$(u = 1, 2, 3, \ldots).$$

(¹) Raie de la série principale de H qui n'était apparue jusqu'ici que dans les nébuleuses et qui a été découverte récemment par Stark dans les tubes à gaz raréfié.

Nun ist aber aus $\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)$, $\lambda = 18756$ Å.-E., und die Linie $\frac{1}{\lambda} = N\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)$ finde ich in Lymans extremen ultravioletten Spektrum. Man sollte also in Wasserstoffröhren die Linie 18756 *und einige schwächere* im Ultrarot erwarten. Ist H in Ihren Röhren vorhanden?

2° Dieselbe Hypothese kann man auch machen, ausgehend von einer der zwei *ersten Nebenserien von Helium*, deren Formel ist

$$\frac{1}{\lambda} = N\left[\frac{1}{(2-\varepsilon)^2} - \frac{1}{(n-\alpha)^2}\right] \qquad (\varepsilon, \alpha \text{ beide klein}).$$

Dann wäre 18700 eine He-*Linie*, deren exakte Berechnung ich Ihnen erst von Göttingen aus mitteilen kann, da mir meine Notizen hier fehlen.

Lettre à F. Paschen.

Göttingen, 14. Juni 1908.

Sie können sich denken, dass mich das Ergebnis bei Wasserstoff wieder sehr gefreut hat. Die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung liegt hier, wie bei den He-Linien daran, dass ich bei der ersten Berechnung durchaus nicht erwartete, dass Sie eine so hohe Genauigkeit erreichen würden, und demnach mit fünfstelligen Logarithmen und ohne Berücksichtigung der Luftrefraktion operierte. Die genaue Zahl, die sich aus der Vakuumformel

$$\frac{1}{\lambda} = 109675{,}0\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$

ergibt, ist in Luft $\lambda = 18751{,}7$, was mit Ihrer Angabe 18751 ± 2 vorzüglich übereinstimmt. Die nächste Linie der Serie

$$109675{,}0\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 5)$$

wäre $\lambda = 12818{,}5$, die Sie vielleicht noch finden können, wenn sie auch schwächer sein wird als die erste Linie ([1]).

([1]) Cette raie a aussi été trouvée par Paschen (*Ann. d. Phys.*, t. XXVII, 1908, p. 566) avec $\lambda = 12817{,}6$.

Sodann habe ich meinen Formeln für das Sauerstoffspektrum die ersten infraroten Glieder der Serien extrapoliert. Ich finde:

Triplets.

Zweite Nebenserie $m = 2,5$ $\qquad \lambda = \begin{cases} 11302,6 & \text{(stärkste Linie)} \\ 11298,2 \\ 11295,3. \end{cases}$

beobachtet haben Sie 11285 ± 14, die Differenz mag sowohl der Formel als der Beobachtung zuzuschreiben sein.

Erste Nebenserie $m = 3$ $\qquad \lambda = \begin{cases} 9267,0 & \text{(stärkste Linie)} \\ 9264,0 \\ 9262,0. \end{cases}$

Dublets (starke Komponente).

Zweite Nebenserie $\begin{cases} n = 2,5 & \lambda = 13184 \\ n = 1,5 & \lambda = 8430. \end{cases}$

Letztere Linie, gleichzeitig Grundlinie der Hauptserie, ist unzweifelhaft Ihr 8446,0; bei so weiter Extrapolation, da schon $n = 2,5$ nicht beobachtet ist, ist ein Fehler von 16 Å.-E. gering; durch passende Änderung der Konstanten könnte man ihn zum Verschwinden bringen, ohne den Anschluss der beobachteten Glieder zu verschlechtern in merklichem Maasse.

Erste Nebenserie $n = 3$ $\qquad \lambda = 11457.$

Ich denke, diese Linien werden sich wohl alle nachweisen lassen. Erst nach diesem Nachweis könnte ich die neuen Serien aus meinem Kombinationsprinzip bilden.

... Als ich in Tübingen war, hatten Sie eine Wasserstoffröhre für Kanalstrahlen-Untersuchungen in Betrieb. ... Ich möchte Ihnen ein Problem vorlegen, welches für die Frage nach dem Relativitätsprinzip, und somit für die ganze Elektrodynamik, von grösster Bedeutung ist. Nach der Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorie muss nämlich die Wellenlänge, die ein bewegtes Atom aussendet, nicht nur in der Richtung der Bewegung nach dem Dopplerschen Prinzip sich verändern, sondern auch bei Beobachtung senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit v muss sich eine Verschiebung nach

Rot im Betrag $\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\lambda$ (c = Lichtgeschwindigkeit) ergeben [1]. Bei H_β und $v = 1000$ km/sec wäre dies 0,02 Å.-E. etwa. Bei Beobachtung von Kanalstrahlen würde man eine scheinbare Verschiebung der Linie um weniger als 0,02 Å.-E. beobachten, da natürlich stehende und bewegte Intensität nicht zu trennen wären. Bei feinen Linien, und wenn man das normale und das verschobene Spektrum auf derselben Platte hat, liesse sich diese Verschiebung auch ohne grosses Gitter nachweisen. Wäre es nicht möglich zu machen, dass man die Frage nach der Existenz dieses Effektes mit Sicherheit beantworten könnte? Wenn der Effekt besteht, ist es aus mit unserer universellen Zeit, mit dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten und der ganzen Kinematik. Ich hoffe, der Effekt besteht nicht, das wäre viel schöner. Da es sich aber um ein wirkliches *Experimentum crucis* handelt, und Sie vielleicht, trotz der grössen Schwierigkeit, ein Mittel finden werden die Sache zu realisieren, wollte ich sie Ihnen doch mitteilen....

Lettre à F. Paschen.

Göttingen, 16. Juli 1908.

... Ich hoffe, mit Hilfe Ihrer wertvollen Untersuchungen auch wirklich noch weiter zu kommen. Vorerst muss ich Ihnen beichten, dass meine Sauerstoffrechnung, die ich nur einmal, nicht, wie sonst, mehrmals gemacht habe, einen Fehler enthält, und zwar bei der Linie 11457. Diese ist falsch, da ich die Zusatzgrösse meiner Formel, die bei Haupt- und zweiter Nebenserie stets positiv ist, in der Zerstreuung auch hier, bei der ersten Nebenserie, addierte, wo ich hätte subtrahieren sollen. Der richtige Wert, der sich angenähert auch aus Ihrer und Herrn Runges Formel ergibt, ist 11260 [2], und ich zweifle nicht, dass dies 11287 sein sollte; dieser Fehler ist ganz normal, der andere war unmöglich. 11294 und 11300 halte ich für das Triplett. Betreffend He sind ja allerdings die Grenzen unsicher; ich glaube aber, dass die erste Nebenserie

(1) EINSTEIN, *Ann. d. Phys.*, t. XXIII, 1907, p. 197.

(2) Das Triplett 9266 der ersten Nebenserie hatte ich schon früher berechnet, das ist richtig.

nur eine Grenze $\geqq 29222,8$ zulässt, so dass $29219,69$ mir ausgeschlossen scheint. Vielleicht ist auch meine Formel $(m, p_1 - p_2, \pi_1 - \pi_2)$ nicht so ganz genau, es könnte sich doch die Unsicherheit der Serienformel in der 6ten Stelle bemerkbar machen, und ich glaube, man muss die Frage offen lassen zunächst und zufrieden sein, dass es so schön klappt.

Lettre à F. Paschen.

Göttingen (non datée).

...Ich wollte wissen, ob das Schema konstante Differenzen, das Rydberg seinerzeit für das rote Argonspektrum aufgestellt hatte, auch einige Ihrer Linien umfasst. Dies ist wirklich so: es treten die charakteristischen Differenzen bei $\lambda = 8522,85$; $9123,6$; $9658,90$ auf, und wenn man noch Ihre und Runges Messungen im Rot dazunimmt, noch bei einer ganzen Anzahl anderer Linien. Das Rydbergsche Schema hat so genau die Form, die nach dem Kombinationsprinzip zu erwarten ist, dass mich dieses Spektrum besonders interessiert. Es wäre gut, die den Heliumserien entsprechenden Argonserien zu finden. Es müssten Doppellinien mit dem Abstand etwa 100 dabei sein (die Wellenzahlen in 5 Stellen). Ich finde eine sehr häufig auftretende Differenz 115,6, die Ihr Paar 13505,6; 13719,9 zeigt. Ob das ein Paar der Serien ist?

XXVIII.

SUR LES SPECTRES DE BANDES,

d'après quelques notes manuscrites de Ritz et une conversation.

Par Pierre Weiss.

PREMIÈRE PARTIE. — MÉCANISME D'ÉMISSION DES SPECTRES DE BANDES.

Dans le Mémoire [1] où Ritz étudie un mécanisme électromagnétique simple émettant les spectres en séries, il dit (*Œuvres*, p. 112) :

« Auf Bandenspektren sind diese Theorien nicht anwendbar. Ich möchte mich in dieser Hinsicht auf die Bemerkung beschränken, dass man sie vielleicht geschlossenen Ringen oder Polygonen, aus den betrachteten Elementarmagneten bestehend, zuschreiben könnte, in der Annahme, dass solche Gebilde eine wichtige Rolle im Baue des Atoms spielen, und dass sie durch die lichterregenden elektrischen oder chemischen Prozesse erst gesprengt werden müssen, bevor ein Serienspektrum zustande kommen kann. »

Il a été trouvé dans les papiers laissés par Ritz, sur une petite feuille portant quelques équations et quelques mots de texte, une ébauche de théorie de ce mécanisme d'émission des spectres de bandes que je vais essayer d'expliciter.

Rappelons que l'organe d'émission des spectres en séries, imaginé d'abord comme des bâtonnets magnétiques et non magnétiques, juxtaposés en ligne droite, peut être réalisé de diverses façons. Ritz se représentait volontiers [2] les bâtonnets magnétiques comme

[1] *Magnetische Atomfelder und Serienspektren* (*Œuvres*, VII, p. 98).

[2] *Loc. cit.*; *Œuvres*, p. 108.

fournis par des solides de révolution chargés d'électricité à leur surface et animés d'un mouvement rapide de rotation autour de leur axe. Il s'était rendu compte, en particulier, que pour des solides de révolution quelconques on peut trouver une distribution superficielle d'électricité qui les rend équivalents à des systèmes de deux pôles magnétiques situés sur l'axe. Lorsque les pôles magnétiques se rapprochent de la surface, la densité électrique augmente indéfiniment dans leur voisinage, et les surfaces portant l'électricité deviennent pratiquement équivalentes à des charges ponctuelles. Ces solides sont alternativement positifs et négatifs et doués de rotation de sens contraire. Ils sont fixés les uns aux autres, en chaîne linéaire, par leur attraction électrostatique. Il avait pensé que les bâtonnets non magnétiques, exigés eux aussi par la théorie des spectres en séries, pourraient être des corps électrisés de même espèce mais dépourvus de rotation, puis, faisant un pas de plus, que l'électron vibrant et le pôle électrique libre à l'extrémité de la file des bâtonnets sont une seule et même chose.

Supposons que, supprimant les bâtonnets non magnétiques, on considère une file de bâtonnets magnétiques. On peut admettre que, lorsqu'elle est soumise à une tension α^2, elle possède la propriété de prendre des mouvements vibratoires analogues à ceux d'une corde ou plutôt d'une chaîne.

Il règne le long de cette corde un champ magnétique H dirigé dans le sens de la longueur, et elle porte des charges électriques équidistantes. Supposons que ces charges exécutent des vibrations circulaires autour de l'axe sous l'influence combinée de la tension α^2 et du champ H. (Les notes de Ritz sont muettes sur la raison pour laquelle l'action du champ sur les charges positives et négatives voisines ne se neutralisent pas. On peut peut-être invoquer à cet effet une différence de configuration des charges positives et négatives, que l'on est disposé à admettre par ailleurs. Les unes, occupant un espace plus étendu, seraient, par exemple, partiellement en dehors du champ.)

L'état vibratoire est alors décrit par

$$(1)\qquad \begin{cases} y = A \sin \dfrac{m\pi x}{a} \sin \nu t, \\[2mm] z = A \sin \dfrac{m\pi x}{a} \cos \nu t, \end{cases}$$

où a est la distance entre deux nœuds consécutifs pour la vibration fondamentale et $\nu : 2\pi$ la fréquence. Les équations du mouvement d'un élément de corde dx, de masse μdx, et de charge εdx contiendront le terme d'inertie et les forces provenant du champ magnétique et de la tension de la corde :

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon H \frac{\partial z}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \\ &\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \varepsilon H \frac{\partial y}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où, en substituant (1), deux fois la même équation :

$$(3)\qquad \mu \nu^2 + \varepsilon \nu H - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \alpha^2 = 0,$$

dans laquelle H peut aussi être remplacé par — H, donc

$$(4)\qquad \nu = \pm \frac{\varepsilon H}{2\mu} \pm \frac{\varepsilon H}{2\mu} \sqrt{1 + \frac{4 m^2 \pi^2 \mu}{\varepsilon^2 H^2 a^2} \alpha^2}.$$

Les solutions correspondant aux deux signes + et aux deux signes — sont seules acceptables. En posant

$$\frac{4 \pi^2 \alpha^2 \mu}{\varepsilon^2 H^2 a^2} = k^2,$$

nombre qui est petit quand la tension de la corde a un rôle subordonné par rapport au champ, on a

$$(5)\qquad \nu = \frac{\varepsilon H}{\mu} \left(1 + \frac{m^2 k^2}{4} - \frac{m^4 k^4}{16} + \dots \right).$$

Pour $m = 0$, on retrouve la fréquence d'une charge décrivant un cercle dans le champ H. Si l'on s'arrête au deuxième terme, on a la loi de Deslandres avec $\nu_0 = \frac{\varepsilon H}{\mu}$ pour la tête de la bande. Si l'on conserve le troisième terme, ν croît moins vite, comme le veut l'expérience dans certaines bandes à raies nombreuses.

Ritz est amené ici à choisir entre une file rectiligne et un anneau fermé. Il donne la préférence à ce dernier dans les termes suivants : « S'il y a deux extrémités, les lignes devraient être d'abord simples ($m = 1, 2, \dots$), puis à m grand correspondront des vibrations

diverses selon que l'on se trouve aux extrémités ou au milieu. Donc anneau circulaire. »

ν croît avec m, la bande a donc la tête du côté du rouge. Pour obtenir des valeurs de ν décroissantes, il faut supposer α^2 négatif. L'anneau, au lieu d'être tendu, est comprimé dans la direction de la périphérie.

L'écartement entre deux raies consécutives est donné, à partir de la formule complète (4), par

$$\frac{d\nu}{dm} = \frac{\nu_0}{2} \frac{mk^2}{\sqrt{1 + m^2 k^2}}. \tag{6}$$

Il croît plus lentement que la loi de Deslandres l'indique, et cela est conforme à l'expérience. Mais l'écart ne cesse pas de croître. La formule ne donne donc pas le maximum d'écartement des expériences de Kayser et Runge ([1]) sur le spectre du cyanogène ([2]).

Sur une autre feuille de notes de Ritz se trouve la trace de nombreuses tentatives pour trouver la meilleure formule empirique à trois constantes représentant ces expériences de Kayser et Runge. Cette feuille paraît être antérieure à ses idées sur l'origine électromagnétique des spectres et n'est donc qu'indirectement en rapport avec ce qui précède. Il essaye notamment

$$\nu = a + bm^2 \sqrt{1 + cm^4}$$

et les trois premiers termes de son développement

$$\nu = a + bm^2 + cm^6$$

et trouve que le terme en m^6 varie trop rapidement. Il essaye

$$\nu^2 = a + bm^2 + cm^4$$

et

$$\nu = a + bm^2 + cm^4.$$

Il trouve cette dernière formule préférable aux autres et note à ce

([1]) KAYSER et RUNGE, *Wied. Ann.*, t. XXXVIII, 1889, p. 80.

([2]) La même feuille de Notes porte encore l'indication suivante, qui se rapporte à une autre solution possible du problème, dans laquelle n'intervient pas la tension α^2 : « Outre le champ magnétique constant qu'il produit dans toute sa longueur, un anneau peut être soumis encore à des champs magnétiques extérieurs, variables de point en point, faibles par rapport au premier. »

propos que « *à partir de la 160ᵉ raie les fonctions* $\nu = f(m)$ *et* $\nu^2 = f(m)$ *se comportent d'une manière non régulière* ». Nous allons revenir sur ce point. Il essaye encore

$$\nu^2 = \frac{a - bm^2}{1 + \alpha m^2};$$

l'erreur est un peu plus grande que ci-dessus.

Dans une conversation, Ritz avait énoncé une idée qui rattache ce qu'il appelle *le caractère non régulier de la fonction* ν *pour les raies d'ordre élevé* au mécanisme d'émission. Il s'était exprimé à peu près de la manière suivante :

On possède dans certaines bandes des nombres de raies considérables dont la position est déterminée avec exactitude, mais quelle que soit la loi empirique avec laquelle on cherche à représenter la distribution des raies dans ces bandes, il arrive un moment où, pour un numéro d'ordre élevé des raies, cette loi est en défaut. Si l'on a recours à une représentation graphique, la courbe tourne court avec une brusquerie que les formules habituelles ne rendent pas.

Imaginons que la partie de l'atome, dont les vibrations émettent des spectres de bandes, ait une structure analogue à celle d'une chaîne composée de maillons de longueur déterminée. On conçoit alors très bien que les vibrations se produisent pour la plus grande partie du phénomène, comme si la chaîne avait une structure continue, tandis que, pour des longueurs d'ondes voisines de la longueur du maillon (ou de certaines valeurs particulières en relation avec elle), les nombres de vibrations sont influencés par la grandeur finie de l'élément.

DEUXIÈME PARTIE. — STRUCTURE DES BANDES.

A la question qui lui avait été adressée : N'est-il pas établi que les bandes ont quelquefois deux *têtes*, l'une du côté des grandes longueurs d'ondes, l'autre du côté des petites? [hypothèse de Thiele (¹)], Ritz avait répondu sans commentaires : « Cette idée n'est pas soutenable. »

(¹) THIELE, *Astroph. Journal*, t. VI, 1897, p. 65.

Les Tableaux de nombres trouvés dans ses notes montrent que cette conviction se rattache aussi à l'étude des bandes du cyanogène observées d'abord par Kayser et Runge [1], puis par Jungbluth [2] et dont les têtes sont à 3883,56; 3871,53; 3861,85 et 3854,85 Å.

Voici en quelques mots l'état de la question : King [3] ayant découvert de nouvelles têtes dirigées du côté des petites longueurs d'ondes, a cru pouvoir les considérer comme les *queues* correspondant aux *têtes* anciennement connues et les a associées en faisant chevaucher les bandes les unes sur les autres. Comme preuve de cette coordination, il donne des relations numériques entre les longueurs d'ondes des têtes et des queues. Elles sont contenues dans le Tableau suivant :

T_n	Q_n	$\frac{T_n}{Q_n}$	T_n	Q_n	$\frac{T_n}{Q_n}$
3590,52	3203,84	1,12069	3883,60	3465,69	1,12059
3585,99	3180,58	1,12746	3871,59	3433,17	1,12770
3584,10	3160,32	1,13409	3861,91	3405,04	1,13417

La valeur démonstrative de ce Tableau me paraît faible. D'après la loi de Deslandres, qui est applicable aux têtes de bandes d'une série, comme aux raies d'une bande, les distances entre les têtes successives, mesurées à l'échelle des fréquences, forment une progression arithmétique. Supposons que l'on associe deux séries de bandes tournées en sens contraire et obéissant l'une et l'autre à cette loi, mais entièrement indépendantes quant à leur origine. Si les raisons des deux progressions sont voisines, comme cela arrive fréquemment [4], les distances entre les têtes et les queues formeront elles aussi une progression arithmétique et cela pourra se produire suivant que les raisons seront de même signe ou de signe contraire, quand on se déplace à partir des premières bandes dans le même sens ou en sens contraire (Criterium de dépendance invoqué par Jungbluth). Il en sera même ainsi quelles que soient les deux premières bandes que l'on associe et que l'on se déplace à partir de celle-ci dans le même sens ou en sens contraire.

---

(1) Kayser et Runge, *Wied. Ann.*, t. XXXVIII, 1889, p. 80.

(2) Jungbluth, *Regularities in the Structure of the third Cyanogen Band* (*Astroph. Journal*, t. XX, 1904, p. 237).

(3) King, *Astroph. Journal*, t. XIV, 1901, p. 323.

(4) *Voir*, par exemple, Fabry, *J. de Phys.*, 4e série, t. IV, 1905, p. 245.

En première approximation, le quotient des fréquences variera, lui aussi, en progression arithmétique. C'est ce que trouve King. Eu égard à la grande similitude des séries de bandes successives, on ne saurait attribuer une portée quelconque à ce que ce quotient passe deux fois approximativement par les mêmes trois valeurs.

Cet argument paraît néanmoins avoir pesé d'un assez grand poids dans la conviction de Kayser (¹), qui considère comme certain que King ait trouvé les queues correspondant aux têtes et que par suite l'hypothèse de Thiele soit exacte.

Jungbluth se propose de contrôler cette hypothèse en faisant de nouvelles mesures sur une partie des bandes anciennement connues. Pour les discuter, il porte en abscisses (²) les longueurs d'ondes et en ordonnées la différence des longueurs d'ondes de deux raies consécutives. Les courbes qu'il obtient ainsi pour quatre des bandes du cyanogène partent de leurs têtes T_1, T_2, T_3, T_4 avec une allure approximativement parabolique, qui correspond à la loi

$$\nu = A - (Bn + C)^2$$

(ν = fréquence, n = nombre entier) de Deslandres ; mais pour les raies de numéros d'ordre élevés la courbe est nettement au-dessous de la parabole et l'écart entre les raies consécutives passe même par un maximum. Ces courbes expérimentales sont continuées en pointillé et semblent aboutir naturellement, dans le dessin original de Jungbluth, pour les trois dernières bandes à des queues Q_2, Q_3, Q_4 indiquées par King. Pour la première, une tête de King faisant défaut dans la région où Jungbluth l'attend, il continue la courbe par continuité, et détermine ainsi la position de la queue Q_1, dans une région où elle est inobservable par suite de la présence d'une bande intense.

Laissant celle-ci de côté, nous avons :

Têtes d'après Jungbluth.		Têtes d'après King.	Queues supposées.	
T_2....	3871,53	4152,93	Q_2....	3603,12
T_3....	3861,85	4158,22	Q_3....	3628,98
T_4....	3854,85	4165,54	Q_4....	3658,27

(¹) Kayser, *Handbuch der Spektrosk.*, t. II, p. 487.

(²) La figure donnée plus loin est celle de Jungbluth, redessinée en remontant aux Tableaux de nombres contenus dans son travail.

La coordination des têtes et des queues de Jungbluth est donc formellement en contradiction avec celle de King. En outre, chez Jungbluth les bandes complètes de King chevauchant (*fig.* 1) les unes sur les autres, sont remplacées par des bandes s'emboîtant (*fig.* 2) les unes dans les autres.

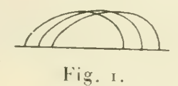


Fig. 1.

Jungbluth, qui signale expressément cette circonstance, ne craint pas d'ajouter que, rapprochée des relations numériques de King, elle apporte aux idées de ce dernier une nouvelle confirmation.

Pour rechercher quelle est exactement la portée des expériences

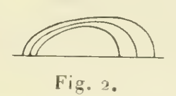


Fig. 2.

de Jungbluth, j'ai marqué dans le dessin (*fig.* 3) les points observés. La partie expérimentale, représentée en traits pleins, se termine, pour les quatre bandes, en *a*, *b*, *c*, *d*. Pour deux des bandes,

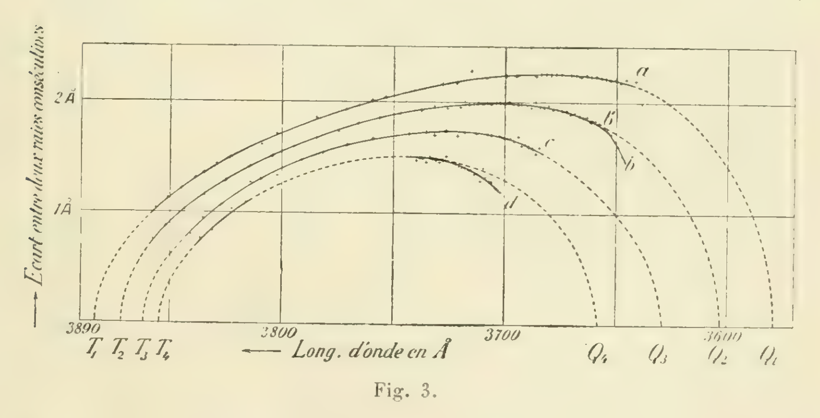


Fig. 3.

en *b* et en *d*, elle s'écarte de la partie extrapolée par Jungbluth, représentée en pointillé, par une plus grande courbure, semblant donner raison à l'idée de Ritz, et rendant impossible l'attribution des queues faites par Jungbluth.

Mais si l'on compare les expériences de Jungbluth à celle de

Kayser et Runge, la concordance qui est bonne jusqu'en b' cesse. On se rend compte facilement que Jungbluth a, en b', passé par inadvertance à des raies d'une bande voisine placée par rapport à celles de la bande suivie jusque-là à peu près comme les traits d'un vernier par rapport à ceux de l'échelle principale. D'ailleurs, Jungbluth supprime dans son graphique la portion $b'b$. En définitive, sur les quatre bandes, la corrélation entre les têtes et les queues est admissible à la rigueur pour deux d'entre elles ($T_2 - Q_2$; $T_3 - Q_3$).

L'idée de Ritz sur la nature non régulière de la fonction pour les raies d'ordre élevé, qui repose sur la brusquerie du coude en b', a donc en partie comme origine une erreur de Jungbluth.

Il semble qu'à la suite du travail de Jungbluth, la conviction que l'hypothèse de Thiele est exacte se soit généralisée. En 1905, A. Hagenbach (1) l'exprime dans une monographie sur les spectres de bandes. On n'a pas remarqué qu'en réalité les *conclusions* de Jungbluth à la fin de son travail sont beaucoup moins affirmatives que ses *courbes*.

On trouve encore dans les Notes de Ritz l'indication suivante :

« Les queues de King, en particulier à 3603, sont impossibles, parce qu'elles sont composées de raies relativement intenses avec des *différences* presque *constantes*, tandis que les différences devraient croître très rapidement comme à la tête de la bande. »

Cette remarque est très probablement suggérée par l'examen de la planche de Kayser et Runge (2) sur laquelle il est aisé de reconnaître l'aspect décrit par Ritz. On peut y évaluer la distance des raies à 0,5 Å environ, ce qui porte l'arc de courbe correspondant bien en dehors des limites de la figure. Le même aspect est visible sur la planche de Jungbluth (*loc. cit.*).

Cet argument semble définitivement détruire ce qu'il reste de probabilité aux attributions faites par Jungbluth. Nous avons déjà fait justice incidemment de l'argument que Jungbluth tire de ce que les *longueurs* des bandes varient en progression arithmétique. Mentionnons que, par contre, Ritz note avec soin, comme un fait

(1) A. HAGENBACH, *Wullner-Festschrift*, 1905, p. 133.

(2) *Akad. Berlin* (*Phys. Abh. nicht zur Akad. gehör. Gelehrter*, t. I, 1889, p. 44.

important, la progression arithmétique, signalée par Jungbluth, des écartements maxima des raies des quatre bandes (2,25; 2,00; 1,75; 1,5 Å.). Ce fait conserve sa valeur indépendamment de toute hypothèse sur l'existence d'une seule ou de deux têtes.

On peut donc conclure de la manière suivante : L'hypothèse de Thiele est appuyée par :

1° L'existence des têtes dirigées dans les deux sens;

2° L'existence d'un maximum dans l'écartement des raies.

Mais la démonstration de cette hypothèse n'a pu être continuée jusqu'à présent, ni par la possibilité de coordonner sans équivoque les têtes et les queues, ni par la poursuite de la décroissance de la distance des raies dans un intervalle assez étendu au delà du maximum. L'écartement des raies dans le voisinage de la queue 3603 y contredit formellement.

L'idée de Ritz n'est pas en contradiction avec les faits. Mais les indications en sa faveur, qui restent dans les quatre bandes du cyanogène, sont un peu diminuées après suppression de la partie fautive $b'b$ de Jungbluth.

Il y aurait grand intérêt à faire de nouvelles déterminations sur des bandes composées d'un grand nombre de raies et, peut-être, à la reprise de la discussion des données déjà connues.

FIN.



TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.

45685 Quai des Grands-Augustins, 55.









